X1-018 (2003/08/28)

اثـر ِ جَـو ِ زمـیـن بـر شـکـل و انـدازه یِ ظاهری یِ اجسام

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

اثر ِ شکست ِ نور در جَو ِ زمین بر اندازه و شکل ِ ظاهری یِ اجسام بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود این پدیده که اجسام در نزدیکی یِ افق بزرگ‌تر می‌نمایند، نَه یک پدیده یِ فیزیکی بل که یک پدیده یِ روان‌شناختی است، اما این پدیده که اجسام در نزدیکی یِ افق پخ می‌نمایند، فیزیکی است.

0 مقدمه

چگالی یِ جَو ِ زمین یک‌نواخت نیست. به همین خاطر نور ی که وارد ِ جَو ِ زمین می‌شود می‌شکند و این شکست، بر اندازه و شکل ِ ظاهری یِ اجسام (از جمله ماه و خورشید) مئثر است. جهت ِ مثبت ِ محور ِ z را جهت ِ شعاعی در نقطه یِ مشاهده در سطح ِ زمین و به طرف ِ بیرون می‌گیریم. هر جهت را می‌شود با (θ, ϕ) مشخص کرد، که زاویه‌ها یِ مختصات ِ کروی با این محور ِ z و به مرکز ِ نقطه یِ مشاهده اند. به خاطر ِ شکست ِ نور در جَو، پرتو یی که ظاهراً از جهت ِ (θ_0, ϕ_0) می‌آید، در واقع از جهت ِ (θ, ϕ) آمده است. با معلوم‌بودن ِ ضریبِ‌شکست در جَو، بسته‌گی یِ (θ, ϕ) به

(θ_0, ϕ_0) به دست می‌آید. از این‌جا می‌شود اندازه (یِ زاویه‌ای) یِ و شکل ِ واقعی جسم را بر حسب ِ مشخصات ِ ظاهری یِ آن به دست آورد. به‌ویژه، می‌خواهیم ببینیم پدیده یِ درشت‌دیدن ِ ماه و خورشید در نزدیکی یِ افق، و بیضی‌دیدن ِ قرص ِ ماه و خورشید در نزدیکی یِ افق، فیزیکی (ناشی از شکست ِ نور) است یا روان‌شناختی.

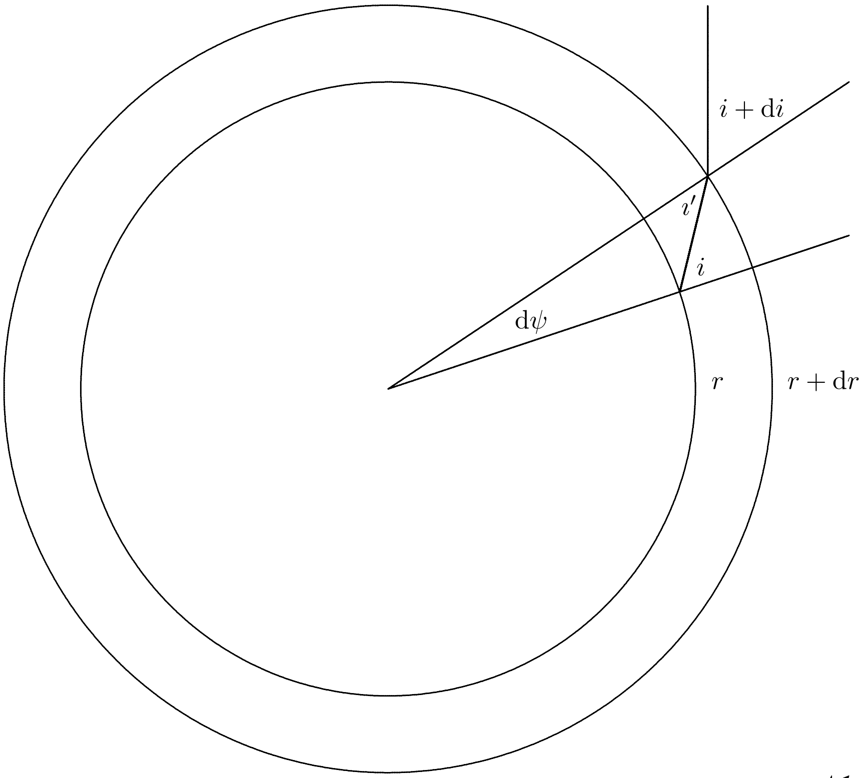
در یک مدل ِ ساده برا یِ جَو، فرض می‌کنیم چگالی یِ جَو تابع ِ فقط ارتفاع (یا فاصله تا مرکز ِ زمین) است. از این‌جا نتیجه می‌شود زاویه‌ها یِ سمتی یِ ϕ و ϕ_0 برابر اند:

$$\phi = \phi_0, \tag{1}$$

و θ هم تابع ِ θ_0 است. با به‌دست‌آوردن ِ بسته‌گی یِ θ به θ_0، شکل و اندازه یِ زاویه‌ای یِ واقعی یِ هر جسم بر حسب ِ مشخصات ِ ظاهری یِ آن به دست می‌آید. اگر اندازه یِ زاویه‌ای یِ جسم ِ موردِنظر کوچک باشد، آن‌گاه رابطه یِ مشخصه‌ها یِ ظاهری و واقعی به فقط زاویه یِ جهت ِ مشاهده یِ جسم با جهت ِ روبه‌بالا بسته‌گی دارد.

1 مسیر ِ نور در جَو

زمین را یک کره یِ کامل به شعاع ِ R می‌گیریم، و فاصله یِ هر نقطه در جَو با مرکز ِ زمین را با r و ضریب ِ شکست در جَو را با $n(r)$ نشان می‌دهیم. مختصات ِ کروی یِ (r, ψ, ϕ) را با همان محور ِ z که در بخش ِ قبل تعریف شد، اما با مبدئ ِ منطبق بر مرکز ِ زمین در نظر می‌گیریم. مسیر ِ یک باریکه یِ نور در جَو را با $\psi(r)$ نشان می‌دهیم. (با فرض ی که در باره یِ ضریب ِ شکست شد، ϕ مستقل از r است.) به این ترتیب، θ_0 برابر است با زاویه یِ باریکه در $r = R$، با محور ِ z؛ و θ برابر است با مقدار ِ ψ در حد ِ $r \to \infty$. زاویه یِ باریکه با جهت ِ شعاعی را با i نشان می‌دهیم. شکل ِ 1 هندسه یِ شکست ِ نور را نشان می‌دهد.



شکل ـِ 1

از قانون ـِ سْنِل [a]—دِکَرت [b]،

$$\frac{\sin(i + \mathrm{d}i)}{\sin i'} = \frac{n}{n + \mathrm{d}n}. \tag{2}$$

هم‌چنین، از رو یِ شکل ـِ 1 دیده می‌شود

$$i' = i - \mathrm{d}\psi, \tag{3}$$

و

$$\begin{aligned} r\,\mathrm{d}\psi &= (\tan i')\,\mathrm{d}r, \\ &= (\tan i)\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{4}$$

رابطه‌ها یِ اخیر، تا مرتبه یِ یک درست اند. از این‌جا،

$$\frac{\sin i+(\cos i)\,\mathrm{d}i}{\sin i-r^{-1}(\cos i\,\tan i)\,\mathrm{d}r}=1-\frac{\mathrm{d}n}{n}, \tag{5}$$

یا

$$(\cot i)\,\mathrm{d}i+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}n}{n}=0, \tag{6}$$

که نتیجه می‌دهد

$$n\,r\,\sin i=C. \tag{7}$$

C مقداری ثابت است. از ترکیب ِ (4) با (7)، دیده می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}=\frac{\dfrac{C}{n\,r^2}}{\sqrt{1-\dfrac{C^2}{n^2\,r^2}}}, \tag{8}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}u}=-\frac{\dfrac{N\,\sin\theta_0}{n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{N\,\sin\theta_0}{n}\,u\right)^2}}, \tag{9}$$

که

$$u:=\frac{R}{r},$$

$$N:=n(r=R), \tag{10}$$

و ثابت ِ C هم بر حسب ِ N، R، و θ_0 بیان شده است. در $r=R$ (نقطه ي مشاهده) ψ صفر است. به این ترتیب،

$$\psi(r\to\infty)=\int_0^1\mathrm{d}u\,\frac{\dfrac{N\,\sin\theta_0}{n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{N\,\sin\theta_0}{n}\,u\right)^2}}, \tag{11}$$

و از آن‌جا،

$$\theta=\int_0^1\mathrm{d}u\,\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{(n/N)^2-(u\,\sin\theta_0)^2}}. \tag{12}$$

در محیط‌ها یِ رقیق، ضریب ِ شکست به شکل ِ

$$n = 1 + \alpha\,\rho \tag{13}$$

است، که ρ چگالی و α ثابت ی وابسته به جنس ِ محیط است. (اگر ملکول‌ها یِ سازنده یِ محیط دوقطبی یِ الکتریکی یِ دائمی داشته باشند، این ثابت به دما هم بسته‌گی دارد.) این رابطه وقت ی درست است که انحراف ِ ضریب ِ شکست از 1 کوچک باشد [1]. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\frac{n}{N} &= 1 + \alpha\,(\rho - \rho_0),\\ &= 1 + \alpha\,\rho_0\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right),\end{aligned} \tag{14}$$

که ρ_0 چگالی یِ هوا در سطح ِ زمین است، و چون بیش‌تر ِ جَو از ملکول‌ها یِ بدون ِ دوقطبی یِ دائم ساخته شده، α ثابت فرض شده. عبارت ِ بالا را به این شکل می‌نویسیم.

$$\frac{n}{N} = 1 - \Delta\,f(u), \tag{15}$$

که

$$\Delta := \rho_0\,\alpha = N - 1 = 1 - \frac{1}{N}, \tag{16}$$

و

$$f := 1 - \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{17}$$

با استفاده از

$$N = 1.0003, \tag{18}$$

نتیجه می‌شود

$$\Delta = 3 \times 10^{-4}. \tag{19}$$

مقدار ِ f بین ِ 0 و 1 است، و

$$
\begin{aligned}
f(u=0) &= 1,\\
f(u=1) &= 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Δ هم ثابت ی کوچک است. به این ترتیب، (12) می‌شود

$$
\begin{aligned}
\theta &= \int_0^1 \mathrm{d}u\ \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1-(u\,\sin\theta_0)^2 - 2\Delta\, f(u)}},\\
&= \int_0^1 \mathrm{d}u\ \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1-(u\,\sin\theta_0)^2}} + \Delta\,\sin\theta_0\,\int_0^1 \mathrm{d}u\ \frac{f(u)}{[1-(u\,\sin\theta_0)]^{3/2}},\\
&= \theta_0 + \Delta\,\sin\theta_0\,\int_0^1 \mathrm{d}u\ \frac{f(u)}{[1-(u\,\sin\theta_0)]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

چگالی ي جَو، در فاصله ي کوچک ی از سطح ِ زمین (کوچک در مقایسه با شعاع ِ زمین) عملاً صفر می‌شود. بنابراین f یک است، مگر آن که u خیل ی نزدیک به یک باشد. یک تقریب برا ي f این است که نمودار ِ آن را به شکل ِ دو پاره‌خط بگیریم:

$$
f(u) = \begin{cases} 1, & 0 \le u \le 1-\sigma \\ \\ \sigma^{-1}\,(1-u), & 1-\sigma \le u \le 1 \end{cases}. \tag{22}
$$

ثابت ِ σ از مشتق ِ f در $u = 1$ به دست می آید:

$$
f'(1) = -\frac{1}{\sigma}. \tag{23}
$$

یک مدل برا ي جَو ِ زمین، جَو ِ هم‌دما است. برا ي چنین‌جَو ی،

$$
f = 1 - \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\,\left(\frac{1}{u}-1\right)\right], \tag{24}
$$

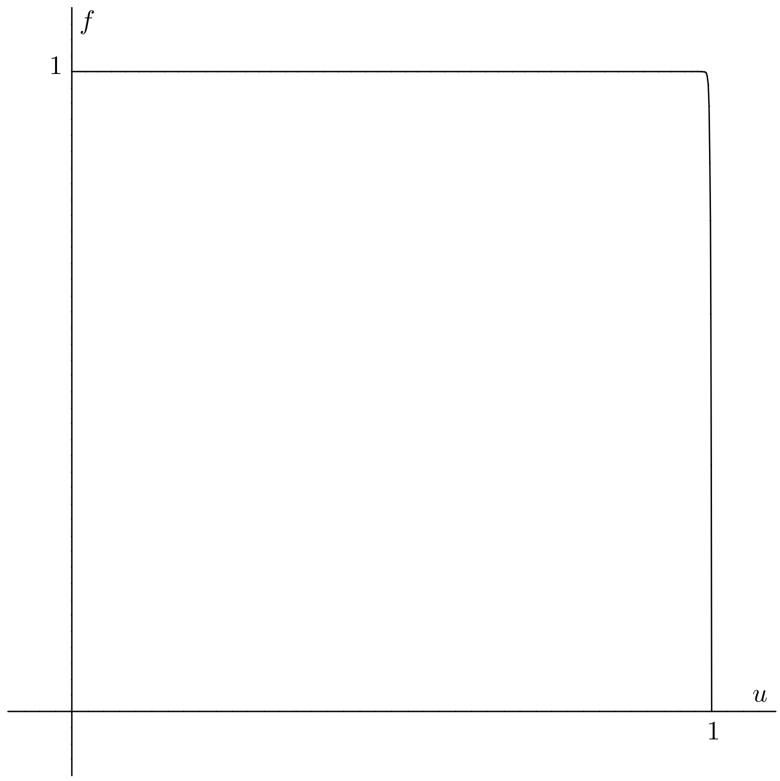
(مثلاً [2])، که

$$
\sigma := \frac{L}{R} := \frac{k_{\mathrm{B}}\,T}{g\,m\,R}. \tag{25}
$$

k_{B} ثابت ِ بُلتس‌مان [c]، T دما ي مطلق ِ جَو، g شتاب ِ گرانش، و m جرم ِ ملکولی ي میان‌گین ِ هوا است. L پارامتر ی با بعد ِ طول است. با گذاشتن ِ $(N_{\mathrm{A}}\,k_{\mathrm{B}}) = 8.3\,\mathrm{J/(molK)}$، $T = 300\ \mathrm{K}$، $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$، و $(N_{\mathrm{A}}\,m) = 0.029\,\mathrm{kg/mol}$، و $R = 6400\,\mathrm{km}$ (که N_{A} عدد ِ آوُگادرُ [d] است)، نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
L &= 8.8\ \text{km}, \\
\sigma &= 0.0014, \qquad (26)
\end{aligned}
$$

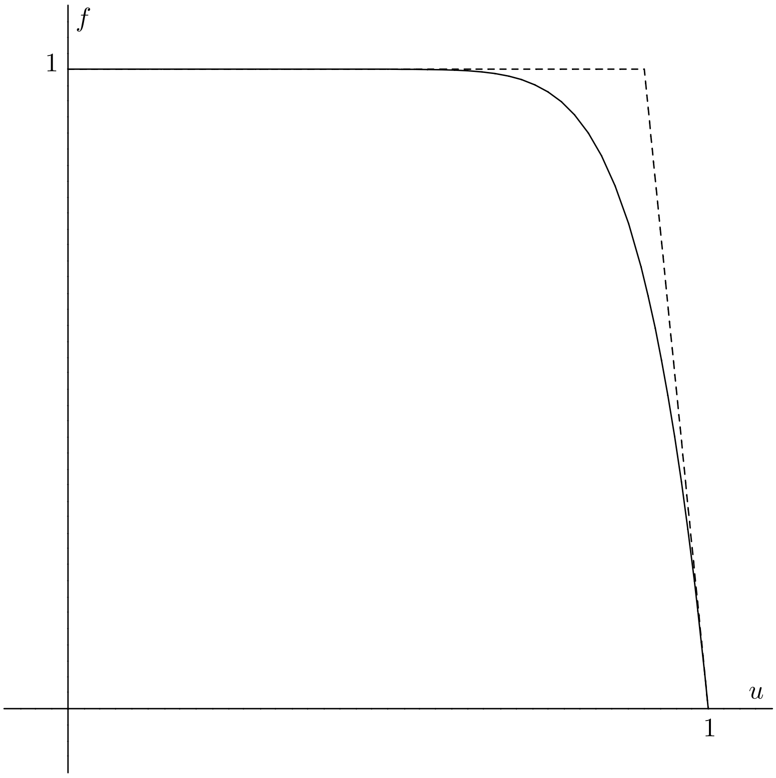
که نشان می‌دهد σ واقعاً کوچک است. در واقع اگر نمودار ـِ f بر حسب ـِ u، و تقریب ـِ دوپاره‌خطی یِ آن را بکشیم، با این مقدار ـِ σ فقط یک مربع دیده می‌شود، شکل ـِ 2.



شکل ـِ 2

نمودار ـِ f بر حسب ـِ u

شکل ـِ 3 نمودار ـِ اغراق‌شده یِ f و تقریب ـِ آن است. در این نمودار، $\sigma = 0.1$ است.



شکل ِ 3

نمودار ِ f بر حسب ِ u، به ازا یِ $\sigma = 0.1$. خط‌چین تقریب ِ f با دو مماس بر آن در $u = 0$ و $u = 1$ را نشان می‌دهد.

چنان که از شکل ِ 2 بر می آید، f با تقریب ِ بسیارخوب ی 1 است. اگر θ_0 خیلی به $(\pi/2)$ نزدیک نباشد، انتگرال‌ده یِ رابطه یِ (21) در نزدیکی یِ $u = 1$ خیلی بزرگ نمی‌شود و می‌شود f را 1 گرفت. در این صورت،

$$\theta = \theta_0 + \Delta \, \tan \theta_0. \tag{27}$$

این تقریب زمان ی معتبر است که جسم ِ موردِمشاهده خیلی نزدیک به افق نباشد. این تقریب، در واقع هم‌ارز با این است که جَو را لایه ای مسطح بگیریم (و نَه کروی)، که اگر مسیر ِ نور در جَو، در مقایسه با شعاع ِ زمین ناچیز باشد، معقول است. دیده می‌شود در این حالت تنهامشخصه یِ جَو که وارد می‌شود ضریب ِ شکست در سطح ِ زمین است. با

محاسبه يِ مستقیم ـِ شکست ـِ نور ی که از یک تیغه يِ مسطح می‌گذرد، نتیجه می‌شود

$$\sin\theta = N\ \sin\theta_0. \tag{28}$$

از (16) نتیجه می‌شود

$$N = 1 + \Delta, \tag{29}$$

که از ترکیب ـِ (28) با آن،

$$\sin\theta_0 + (\theta-\theta_0)\ \cos\theta_0 = \sin\theta_0 + \Delta\ \sin\theta_0, \tag{30}$$

که همان (27) است.

برا يِ جسم‌ها يِ نزدیک به افق، تقریب ـِ (27) خوب نیست. یک راه استفاده از تقریب ـِ (22) است. با جاگذاری يِ این عبارت در (21) نتیجه می‌شود

$$\theta = \theta_0 + \Delta\ \left[\frac{(1-\sigma)\ \sin\theta_0}{\sqrt{1-(1-\sigma)^2\ \sin^2\theta_0}} - \frac{(1-\sigma)\ \sin\theta_0}{\sigma\sqrt{1-(1-\sigma)^2\ \sin^2\theta_0}} + \frac{1}{\sigma}\ \tan\theta_0 - \frac{1}{\sigma\ \sin\theta_0\ \cos\theta_0} + \frac{1}{\sigma\ \sin\theta_0\sqrt{1-(1-\sigma)^2\ \sin^2\theta_0}}\right]. \tag{31}$$

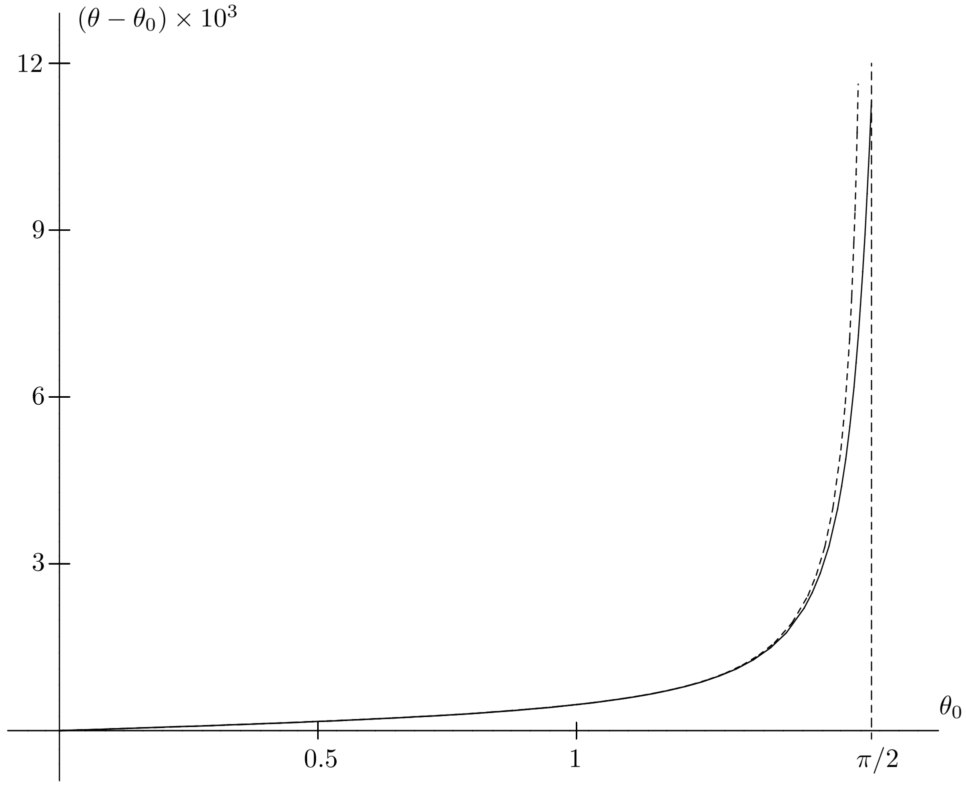
از جمله،

$$\theta\left(\theta_0=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \Delta\sqrt{\frac{2-\sigma}{\sigma}}, \tag{32}$$

که با گذاشتن ـِ مقدارها يِ عددی يِ Δ و σ می‌دهد

$$\theta\left(\theta_0=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 0.01. \tag{33}$$

شکل ـِ 4 نمودار ـِ $(\theta-\theta_0)$ بر حسب ـِ θ را نشان می‌دهد.



شکل ِ 4

نمودار ِ $(\theta-\theta_0)$ بر حسب ِ θ. خط‌چین نمودار ِ $\Delta\,\tan\theta_0$ بر حسب ِ θ_0 است.

2 اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری و اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی

دو بردار ِ یکه یِ $\hat{\mathbf{n}}$ و $\hat{\mathbf{n}}'$ با جهت‌ها یِ به‌ترتیب (θ,ϕ) و (θ',ϕ') را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}',\\ &= \cos\theta\,\cos\theta' + \sin\theta\,\sin\theta'\,\cos(\phi-\phi'),\end{aligned}\qquad (34)$$

که γ زاویه یِ این دوبردار با هم است. اگر مقدارها یِ

$$\delta\theta := \theta' - \theta,$$
$$\delta\phi := \phi' - \phi \tag{35}$$

کوچک باشند (جهت‌ها یِ این دوبردار به هم نزدیک باشند) (34) را می‌شود ساده‌تر کرد:

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos(\theta' - \theta) + \sin\theta\,\sin\theta'\,[\cos(\phi' - \phi) - 1],\\ &\approx 1 - \frac{(\delta\theta)^2}{2} - \frac{\sin^2\theta\,(\delta\phi)^2}{2},\end{aligned} \tag{36}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\gamma \approx \sqrt{(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta\,(\delta\phi)^2}. \tag{37}$$

(این نتیجه را با استفاده از شکل ِ عنصر ِ طول در مختصات ِ کروی هم می‌شد به دست آورد.) از این‌جا رابطه یِ اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری و اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_0}{\gamma} &= \frac{\sqrt{(\delta\theta_0)^2 + \sin^2\theta_0\,(\delta\phi_0)^2}}{\sqrt{(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta\,(\delta\phi)^2}},\\ &= \frac{\sqrt{(\delta\theta_0)^2 + \sin^2\theta_0\,(\delta\phi_0)^2}}{\sqrt{(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\theta_0)^2(\delta\theta_0)^2 + [(\sin^2\theta)/(\sin^2\theta_0)]\,\sin^2\theta_0\,(\delta\phi_0)^2}}.\end{aligned} \tag{38}$$

در این‌جا از این استفاده شده که ϕ و ϕ_0 برابر اند. از جمله،

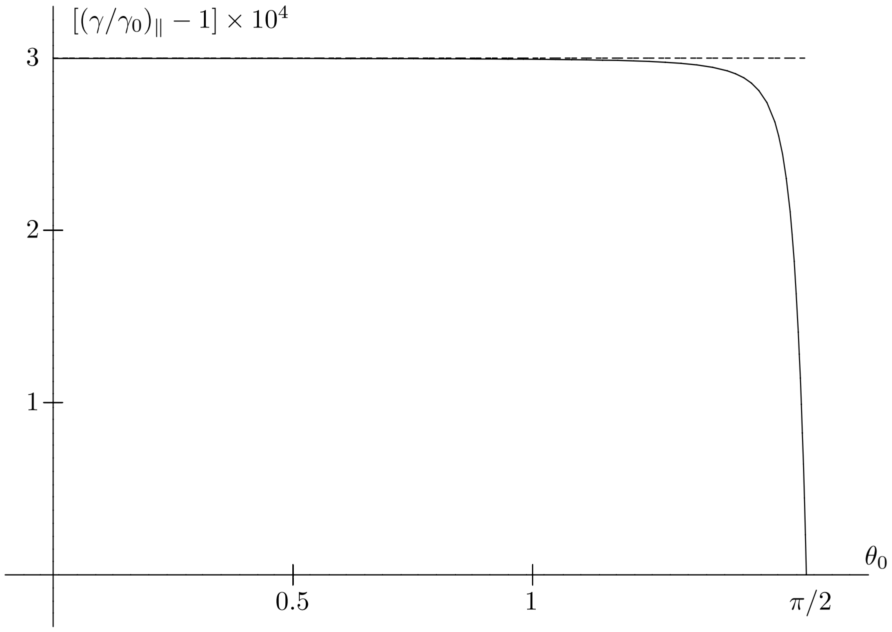
$$\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)_{\parallel} = \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}, \tag{39}$$

و

$$\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)_{\perp} = \frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}\theta}, \tag{40}$$

که $\parallel$ و $\perp$، متناظر اند با به‌ترتیب حالت ی که پاره‌خط ِ موردِمشاهده موازی با افق یا عمود بر آن است.

شکل ِ 5 نمودار ِ $[(\gamma/\gamma_0)_\parallel - 1]$ بر حسب ِ θ_0 است. از این نمودار دیده می‌شود برا ي پاره‌خط‌ها ي موازی با افق، اندازه‌ي‌زاویه‌ای ي ظاهری کوچک‌تر از اندازه‌ي‌زاویه‌ای ي واقعی است، اما اختلاف ِ نسبی ي این اندازه‌ها از مرتبه ي 10^{-4} است.

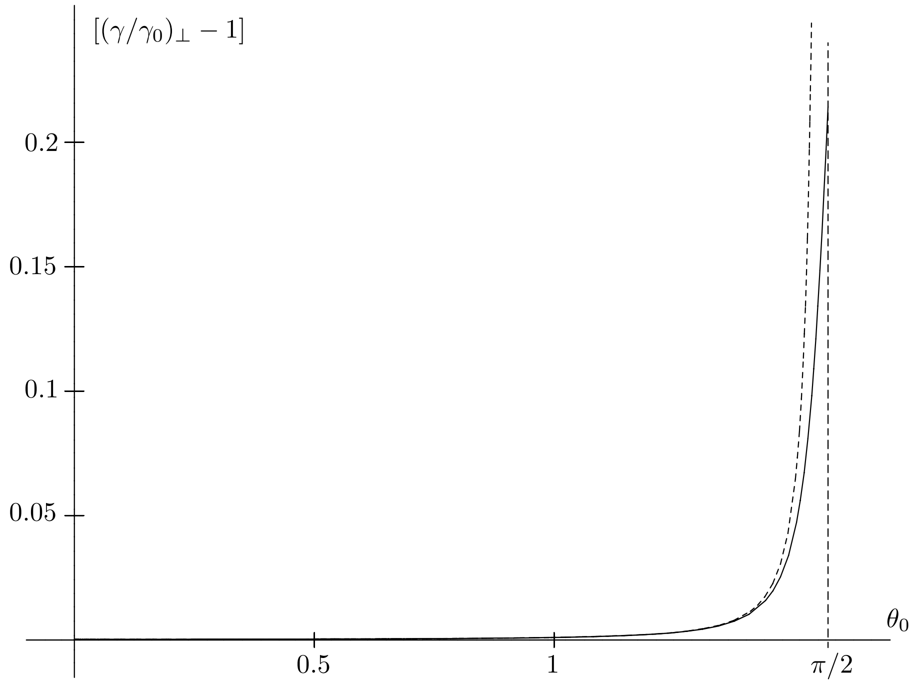


شکل ِ 5

نمودار ِ $[(\gamma/\gamma_0)_\parallel - 1]$ بر حسب ِ θ_0

شکل ِ 6 نمودار ِ $[(\gamma/\gamma_0)_\perp - 1]$ بر حسب ِ θ_0 است. از این نمودار دیده می‌شود برا ي پاره‌خط‌ها ي عمود بر افق هم، اندازه‌ي‌زاویه‌ای ي ظاهری کوچک‌تر از اندازه‌ي‌زاویه‌ای ي واقعی است. اما این بار اختلاف ِ نسبی ي این اندازه‌ها، در نزدیکی ي افق چشم‌گیر است:

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)_\perp \left(\theta_0 = \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0.2. \tag{41}$$



شکل ـِ 6

نمودار ـِ $[(\gamma/\gamma_0)_\perp - 1]$ بر حسب ـِ θ_0. خط‌چین نمودار ـِ $\Delta\,(1+\tan^2\theta_0)$ بر حسب ـِ θ_0 است.

3 نتیجه

از نمودارها یِ بخش ـِ پیش، دیده می‌شود

- اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ ظاهری یِ هر جسم، هم‌واره کوچک‌تر از اندازه‌یِ‌زاویه‌ای یِ واقعی یِ آن است.
- این اختلافِ‌اندازه، جز زمان ی که جسم نزدیک به افق است ناچیز است.
- تغییرِاندازه یِ ظاهری، در راستا یِ موازی با افق همیشه ناچیز است، حتا وقت ی جسم نزدیک ـِ افق باشد.

به این ترتیب، این که ماه و خورشید در نزدیکی یِ افق بزرگ‌تر به نظر می‌رسند، یک پدیده یِ روان‌شناختی است نَه فیزیکی [3]. اما اندازه‌یِ زاویه‌ای یِ ظاهری یِ ماه و خورشید در راستا یِ عمود بر افق، واقعاً حدود ِ 20% کم‌تر از اندازه‌یِ زاویه‌ای یِ واقعی است. پس این که ماه و خورشید، در نزدیکی یِ افق پخ می‌نمایند، یک پدیده یِ فیزیکی است. ضمناً برا یِ تحلیل ِ این مسئله، فقط دو داده لازم است: Δ و σ. اول یِ برابر است با ضریبِ‌شکست ِ جَو در سطح ِ زمین منها یِ یک، و دوم ی برابر است با ارتفاع ِ مشخصه یِ افت ِ چگالی یِ جَو در سطح ِ زمین تقسیم بر شعاع ِ زمین.

4 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 4

[2] S. P, Strelkov; “Mechanics”, 3rd edition (Mir Publishers, 1969) section 97

[3] Lloyd Kaufman & James R. Kaufman; “Explaining the moon illusion”, Proceddings of the National Academy of Sciences **97** (2000) 500

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Snell

[b] Descartes

[c] Boltzmann

[d] Avogadro