X1-019 (2003/09/29)

حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ مغناطیسی یِ تقریباًهم‌گن

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

اثر ِ ناهم‌گنی‌ها یِ کوچک ِ یک میدان ِ مغناطیسی، بر حرکت ِ یک ذره یِ باردار در آن میدان بررسی می‌شود. معلوم می‌شود تا مرتبه یِ اول نسبت به ناهم‌گنی، حرکت ِ ذره به شکل ِ مارپیچی دور ِ خط ِ میدان است که یک سوق به آن اضافه شده. ضمناً سرعت ِ ذره آن در راستا یِ میدان تغییر می‌کند: هر چه میدان شدیدتر شود، این سرعت کم‌تر می‌شود.

0 مقدمه

حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ مغناطیسی یِ یک‌نواخت ساده است: ذره مارپیچ ی را می‌پیماید که محور ِ آن موازی با میدان است. مئلفه یِ موازی‌بامیدان ِ سرعت ِ ذره ثابت است، و تصویر ِ حرکت ِ ذره در صفحه یِ عمود بر میدان یک حرکت ِ دایره‌ای یِ یک‌نواخت است. بس‌آمد ِ زاویه‌ای یِ این حرکت ِ دایره‌ای

$$\omega := \frac{q\,B}{m\,\gamma(v)} \tag{1}$$

است، که q بار ِ ذره، m جرم ِ آن، B اندازه یِ میدان ِ مغناطیسی، v اندازه یِ سرعت ِ ذره، و γ ضریب ِ لُرِنتس [a] است:

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{2}$$

c سرعت ِ نور است. (1) در سیستم ِ SI نوشته شده. برا یِ تبدیل به سیستم ِ گاؤس [b] یا لُرِنتس [a]ـ هِوی‌ساید [c]، کافی است به جا یِ B بگذاریم (B/c). میدان ِ مغناطیسی بر ذره یِ باردار کار انجام نمی‌دهد. پس سرعت ِ ذره ثابت می‌ماند. به این ترتیب، اثر ِ نسبیت ِ خاص بر حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ مغناطیسی (حتا اگر این میدان هم‌گن نباشد)، فقط این است که جرم ِ m به یک جرمِ‌مئثر ِ ثابت ِ m_{eff} تبدیل می‌شود:

$$m_{\mathrm{eff}} := m\,\gamma(v). \tag{3}$$

این مطالب را می‌شود مثلاً در [1] پیدا کرد.

در [1]، حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ مغناطیسی یِ اندکی‌ناهم‌گن هم بررسی شده است. نتیجه آن است که ناهم‌گنی یِ میدان ِ مغناطیسی باعث می‌شود به حرکت ِ مارپیچی یِ ذره یک سوق اضافه شود، و ضمناً مئلفه یِ موازی‌بامیدان ِ سرعت ثابت نماند. این‌جا می‌خواهیم همین حکم‌ها را با حل ِ اختلالی یِ معادله یِ حرکت به دست آوریم. پارامتر ِ اختلال، ناهم‌گنی یِ (یعنی مشتق ِ) میدان ِ مغناطیسی است.

1 حل ِ اختلالی یِ معادله یِ حرکت

نقطه ی که حرکت ِ ذره در نزدیکی یِ آن را بررسی می‌کنیم را مبدئ، (x,y,z) را مختصات ِ دکارتی، و محور ِ z را هم‌جهت با میدان ِ مغناطیسی در مبدئ می‌گیریم. با تعریف ِ

$$\boldsymbol{\omega} := \frac{q\,\mathbf{B}}{m_{\mathrm{eff}}}, \tag{4}$$

و با فرض ِ این که میدان ِ مغناطیسی در نزدیکی یِ مبدئ هم‌وار است، نتیجه می‌شود تا مرتبه یِ یک نسبت به بردارِمکان ِ $\mathbf{r}$،

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{0}) + D\,\mathbf{r}, \tag{5}$$

که D ماتریس ِ مشتق ِ ω نسبت به مکان، در مبدئ است:

$$D_{ij} := \frac{\partial \omega_i}{\partial r^j}(\mathbf{0}),$$

$$= \frac{q}{m_{\mathrm{eff}}}\,\frac{\partial B_i}{\partial r^j}(\mathbf{0}). \tag{6}$$

چون تک‌قطبی یِ مغناطیسی نداریم، رد ِ D صفر است:

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0. \tag{7}$$

معادله یِ حرکت ِ ذره یِ باردار

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} \tag{8}$$

است. شکل ِ مئلفه‌ای یِ این معادله، با استفاده از (5) می‌شود

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - \omega\,\dot{y} &= +\dot{y}\,(D_{31}\,x + D_{32}\,y + D_{33}\,z) - \dot{z}\,(D_{21}\,x + D_{22}\,y + D_{23}\,z),\\
\ddot{y} + \omega\,\dot{x} &= -\dot{x}\,(D_{31}\,x + D_{32}\,y + D_{33}\,z) + \dot{z}\,(D_{11}\,x + D_{12}\,y + D_{13}\,z),\\
\ddot{z} &= +\dot{x}\,(D_{21}\,x + D_{22}\,y + D_{23}\,z) - \dot{y}\,(D_{11}\,x + D_{12}\,y + D_{13}\,z).
\end{aligned} \tag{9}$$

ω مئلفه یِ سه‌وم ِ ω در مبدئ است. با معرفی یِ متغیرها یِ مختلط ِ

$$\begin{aligned}
\xi &:= x + i\,y,\\
\bar{\xi} &:= x - i\,y,
\end{aligned} \tag{10}$$

(9) می‌شود

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} + i\,\omega\,\dot{\xi} = {}& \frac{D_{12} - D_{21} + i\,(D_{11} + D_{22})}{2}\,\dot{z}\,\xi - i\,D_{33}\,z\,\dot{\xi}\\
&+ (i\,D_{13} - D_{23})\,z\,\dot{z} + \frac{D_{32} - i\,D_{31}}{2}\bar{\xi}\,\dot{\xi}\\
&+ \frac{-D_{12} - D_{21} + i\,(D_{11} - D_{22})}{2}\,\dot{z}\,\bar{\xi} + \frac{-D_{32} - i\,D_{31}}{2}\,\xi\,\dot{\xi},
\end{aligned} \tag{11}$$

و

$$\ddot{z} = (D_{21} - D_{12})\,\frac{\dot{\bar{\xi}}\,\xi + \bar{\xi}\,\dot{\xi}}{4} + (D_{11} + D_{22})\,\frac{\dot{\bar{\xi}}\,\xi - \bar{\xi}\,\dot{\xi}}{4\,i}$$
$$+2\mathrm{Re}\left(\frac{D_{23} + i\,D_{13}}{2}\,\dot{\xi}\,z\right)$$
$$+2\mathrm{Re}\left[\frac{D_{21} + D_{12} + i\,(D_{11} - D_{22})}{4}\,\xi\,\dot{\xi}\right]. \tag{12}$$

جواب ِ مرتبه ی صفر ِ (11) و (12)

$$\xi_0(t) = a\,\exp(-i\,\omega\,t),$$
$$z_0(t) = V\,t, \tag{13}$$

است، که a و V ثابت اند. این یک حرکت ِ مارپیچی است؛ ذره در $t = 0$ در صفحه یِ $z = 0$ است، مئلفه یِ موازی‌بامیدان ِ سرعت ِ ذره V، محور ِ مارپیچ محور ِ z، و شعاع ِ مارپیچ $|a|$ است.

برا یِ حل ِ اختلالی یِ (11) و (12)، باید (13) را در طرف ِ راست ِ (11) و (12) بگذاریم. دو جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (11) مضرب ِ $\exp(-i\,\omega\,t)$ و $t\,\exp(-i\,\omega\,t)$ اند، که جمله یِ شاخصی اند؛ چون $(-i\,\omega)$ ریشه یِ معادله یِ مشخصه یِ متناظر با شکل ِ مختل‌نشده یِ (11) است. برا یِ درنظرگرفتن ِ اثر ِ آن‌ها، می‌گیریم

$$\xi = \xi_{\mathrm{i}} + \xi_{\mathrm{n}}, \tag{14}$$

که

$$\ddot{\xi}_{\mathrm{i}} + i\,\omega\,\dot{\xi}_{\mathrm{i}} = \frac{[D_{12} - D_{21} + i\,(D_{11} + D_{22})]\,V}{2}\,\xi_{\mathrm{i}} - i\,D_{33}\,V\,t\,\dot{\xi}_{\mathrm{i}},$$
$$\ddot{\xi}_{\mathrm{n}} + i\,\omega\,\dot{\xi}_{\mathrm{n}} = (i\,D_{13} - D_{23})\,V^2\,t + \frac{(-i\,D_{32} - D_{31})\,|a|^2\,\omega}{2}$$
$$+c_1\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2\,\exp(-i\,2\omega t), \tag{15}$$

که c_1 و c_2 ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه یِ یک) اند. نهاده ای به شکل ِ

$$\xi_{\mathrm{i}} = a\,\exp[-i\,\omega\,t - i\,\phi(t)] \tag{16}$$

را در نظر می‌گیریم. این نهاده را در معادله یِ اول ـِ (15) می‌گذاریم و فقط جمله‌ها یِ خطی را نگه می‌داریم. نتیجه می‌شود

$$-\,i\,\ddot{\phi} - \omega\,\dot{\phi} = \frac{[D_{12} - D_{21} + i\,(D_{11} + D_{22})]\,V}{2} - \omega\,D_{33}\,V\,t. \tag{17}$$

جواب ـِ این معادله

$$\dot{\phi}(t) = D_{33}\,V\,t + \frac{(D_{21} - D_{12})\,V}{2\omega} - \frac{i\,D_{33}}{2\omega}\,V + c\,\exp(i\,\omega\,t) \tag{18}$$

است، که c ثابت (و نسبت به پارامتر ـِ اختلال از مرتبه یِ یک) است. بخش ـِ حقیقی یِ $\dot{\phi}$ تغییر ـِ بس‌آمد ـِ زاویه‌ای یِ حرکت ـِ مارپیچی، و بخش ـِ موهومی یِ $\dot{\phi}$ نشان‌دهنده یِ تغییر ـِ نسبی یِ شعاع ـِ مارپیچ است. پس تا جا یی که متوسط ـِ زمانی یِ بس‌آمد ـِ زاویه‌ای و تغییر ـِ شعاع (هردو رو یِ یک دوره متناظر با بس‌آمدِزاویه‌ای یِ ω) موردِنظر است، مقدار ـِ c مهم نیست و می‌شود آن را صفر گذاشت. از این‌جا،

$$\begin{aligned}
\xi_{\mathrm{i}} \;&=\; a\,\exp\left(-\frac{D_{33}\,V}{2\omega}\,t\right)\,\exp\left[-i\,\left(\omega'\,t + \frac{D_{33}\,V}{2}\,t^2\right)\right],\\
&=: a(t)\,\exp\left[-i\int_0^t \mathrm{d}t'\;\omega''(t')\right],
\end{aligned} \tag{19}$$

که

$$a(t) := a\,\exp\left(-\frac{D_{33}\,V}{2\omega}\,t\right), \tag{20}$$

و

$$\begin{aligned}
\omega'' &:= \omega' + D_{33}\,V\,t,\\
&:= \omega + \frac{(D_{21} - D_{12})\,V}{2\omega} + D_{33}\,V\,t.
\end{aligned} \tag{21}$$

از معادله یِ دوم ـِ (15) نتیجه می‌شود

$$\xi_{\rm n}(t) = \frac{(D_{13}+i\,D_{23})\,V^2}{2\omega}\,t^2 + \left[\frac{(i\,D_{13}-D_{23})\,V^2}{\omega^2} + \frac{(i\,D_{31}-D_{32})\,|a|^2}{2}\right]\,t$$

$$+c_1'\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2'\,\exp(-i\,2\omega\,t),$$

$$= \frac{A}{2}\,t^2 + V_{\rm d}\,t + c_1'\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2'\,\exp(-i\,2\omega\,t), \tag{22}$$

که c_1' و c_2' ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه یِ یک) اند،

$$A := \frac{(D_{13}+i\,D_{23})\,V^2}{\omega}, \tag{23}$$

و

$$V_{\rm d} := \frac{(i\,D_{13}-D_{23})\,V^2}{\omega^2} + \frac{(i\,D_{31}-D_{32})\,v_{\rm t}^2}{2\omega^2},$$

$$v_{\rm t} := |a|\,\omega. \tag{24}$$

از (14)، (19)، و (22)، نتیجه می‌شود

$$\xi(t) = \frac{A}{2}\,t^2 + V_{\rm D}\,t + a(t)\,\exp\left[-i\int_0^t {\rm d}t'\;\omega''(t')\right] + c_1'\,\exp(i\,\omega\,t) + c_2'\,\exp(-i\,2\omega\,t). \tag{25}$$

حل ِ اختلالی یِ (12) از این معادله به دست می‌آید.

$$\ddot z = \frac{(D_{11}+D_{22})\,|a|^2\,\omega}{2}$$

$$+2{\rm Re}\left[\frac{(-i\,D_{23}+D_{13})\,a\,V\,\omega}{2}\,t\,\exp(-i\,\omega t)\right] +$$

$$+2{\rm Re}\left[c_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)\right], \tag{26}$$

که c_3 ثابت (و نسبت به پارامتر ِ اختلال از مرتبه یِ یک) است. جواب ِ این معادله می‌شود

$$
\begin{aligned}
z(t) = & V\,t - \frac{D_{33}\,|a|^2\,\omega}{4}\,t^2 \\
& -2\mathrm{Re}\left[\frac{(-D_{13}+i\,D_{23})\,a\,V}{2\omega}\,\left(1+\frac{2}{i\,\omega\,t}\right)\,t\,\exp(-i\,\omega\,t)\right] \\
& +2\mathrm{Re}\,[c'_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)]\,, \\
= & \int_0^t \mathrm{d}t'\,V(t') - \mathrm{Re}\left[\frac{A^*\,a}{V}\,\left(1+\frac{2}{i\,\omega\,t}\right)\,t\,\exp(-i\,\omega\,t)\right] \\
& +2\mathrm{Re}\,[c'_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)]\,,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

که c'_3 ثابت (و نسبت به پارامترِ اختلال از مرتبه یِ یک) است، و

$$
V(t) := V - \frac{D_{33}\,|a|^2\,\omega}{2}\,t. \tag{28}
$$

(25) و (27)، حلِ اختلالی یِ معادله یِ دیفرانسیلِ حرکت اند.

2 توصیفِ جواب

(25) و (27) را به این شکل می‌نویسیم.

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= \Xi_0(t) + \Xi_{\mathrm{d}}(t) + \xi_{\mathrm{t}}(t) + c'_1\,\exp(i\,\omega\,t) + c'_2\,\exp(-i\,2\omega\,t), \\
z(t) &= Z_0(t) + z_{\mathrm{t}}(t) + 2\mathrm{Re}\,[c'_3\,\exp(-i\,2\omega\,t)]\,,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

که

$$
\begin{aligned}
\Xi_0(t) &:= A\,t^2/2, \\
Z_0(t) &:= \int_0^t \mathrm{d}t'\,V(t'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Xi_{\rm d}(t) &:= V_{\rm d}\, t,\\
\xi_{\rm t}(t) &:= a(t)\, \exp\left[-i\int_0^t {\rm d}t'\; \omega''(t')\right],\\
z_{\rm t}(t) &:= -{\rm Re}\left[\frac{A^*\, a}{V}\,\left(1+\frac{2}{i\,\omega\, t}\right)\, t\, \exp(-i\,\omega\, t)\right]. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

$(\dot\Xi_0, \dot Z_0)$ سرعت ی موازی با میدان ِ مغناطیسی را نشان می‌دهد. برا یِ دیدن ِ این، کافی است توجه کنیم

$$
\begin{aligned}
\dot\Xi_0 &= A\, t,\\
&= \dot Z_0\, \frac{(D_{13}+i\, D_{23})\, Z_0}{\omega},\\
&= \dot Z_0\, \frac{\omega_1+i\,\omega_2}{\omega_3}. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

این سرعت را با $\mathbf{V}_0$ نشان می‌دهیم. اندازه یِ این سرعت ثابت نیست، و از (28) داریم

$$
\dot V = -\frac{|a|^2}{4}\,\partial_3(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}), \qquad (32)
$$

که به شکل ِ مستقل‌ازمختصات می‌شود

$$
\frac{\rm d}{{\rm d}t}(\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0) = -\frac{|a|^2}{2}\,\mathbf{V}_0\cdot\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}). \qquad (33)
$$

$(\dot\Xi_{\rm d}, 0)$ سرعت ی در راستا یی عمود بر میدان ِ مغناطیسی را نشان می‌دهد. با استفاده از (24)، شکل ِ مستقل‌ازمختصات ِ این سرعت $(\mathbf{V}_{\rm d})$ می‌شود

$$
\mathbf{V}_{\rm d} = \frac{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega})}{(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}\,\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})}{4\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}\,v_{\rm t}^2. \qquad (34)
$$

این رابطه نشان می‌دهد اثر ِ $v_{\rm t}$ در $\mathbf{V}_{\rm d}$ ناشی از یک‌نواخت‌نبودن ِ اندازه یِ میدان است؛ در حال ی که اثر ِ V در $\mathbf{V}_{\rm d}$ ناشی از یک‌نواخت‌نبودن ِ جهت ِ میدان است. در واقع جمله یِ اول ِ $\mathbf{V}_{\rm d}$ را می‌شود بر حسب ِ انحنا یِ اصلی یِ خط ِ میدان نوشت:

$$
\mathbf{V}_{\rm d} = \frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})}{4\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}\,v_{\rm t}^2, \qquad (35)
$$

که

$$\boldsymbol{\kappa} := \kappa\,\hat{\mathbf{n}}, \tag{36}$$

و κ عکس ِ شعاع ِ انحنا يِ خم و $\hat{\mathbf{n}}$ قائم ِ اصلی يِ خم است (مثلاً [2]).

به این ترتیب، برا يِ جمله‌ها يِ غیرِنوسانی يِ مکان ِ ذره يِ باردار ($\mathbf{R}$) می‌شود نوشت

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_{\rm d}, \tag{37}$$

که در هر نقطه $\mathbf{V}_0$ با میدان موازی است و تغییرات ِ اندازه اَش از (33) به دست می‌آید، و $\mathbf{V}_{\rm d}$ بر میدان عمود است و از (34) به دست می‌آید. در (34)، به جا يِ $\mathbf{V}_0$ می‌شود $\dot{\mathbf{R}}$ هم گذاشت، چون اختلاف ِ این‌دو از مرتبه يِ یک است.

(33)، (24)، و (37)، برا يِ به دست‌آوردن ِ $\mathbf{R}$ کافی نیستند، چون در آن‌ها $v_{\rm t}$ (یا $|a|$) هم ظاهر شده. مشتق ِ $|a|$ را می‌شود از (20) حساب کرد:

$$\frac{{\rm d}|a|}{{\rm d}t} = -\frac{|a|}{4\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{V}_0\cdot\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}), \tag{38}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$|a|^2\,\sqrt{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}} = \alpha, \tag{39}$$

که α ثابت است. با استفاده از این، (33) می‌شود

$$\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0 = \beta - \alpha\sqrt{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}, \tag{40}$$

که β ثابت است، و (34) می‌شود

$$\mathbf{V}_{\rm d} = \frac{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{\omega})}{(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}\,(\beta-\alpha\sqrt{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}) + \frac{\boldsymbol{\omega}\times\nabla(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})}{4\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})^2}\,(\alpha\sqrt{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}}). \tag{41}$$

دیده می‌شود ثابت ِ β، مجذور ِ سرعت ِ کل است، که باید ثابت بماند، چون میدان ِ مغناطیسی کار ی بر ذره انجام نمی‌دهد:

$$\mathbf{V}_0\cdot\mathbf{V}_0 + v_{\rm t}^2 = \beta. \tag{42}$$

در رابطه يِ بالا اثر ِ $\mathbf{V}_{\rm d}$ در نظر گرفته نشده. علت آن است که $\mathbf{V}_{\rm d}$ از مرتبه يِ یک، و بر $\mathbf{V}_0$ عمود است. پس تنهاجمله يِ مرتبه‌يِ‌یک ی که به خاطر ِ آن در مجذور ِ

سرعت می‌ماند، حاصلِ‌ضرب ِ آن در بخش ِ نوسانی یِ سرعت است، و میان‌گین ِ این حاصلِ‌ضرب صفر است.

(35)، (40)، و (41)، بردار ِ $\dot{\mathbf{R}}$ را بر حسب ِ $\mathbf{R}$ می‌دهند.

$(\xi_{\mathrm{t}}, z_{\mathrm{t}})$ حرکت ی نوسان ی با دامنه و بس‌آمد ِ متغیر است. این حرکت رو یِ دایره ای به شعاع ِ $|a|$ انجام می‌شود، که صفحه یِ آن بر میدان ِ مغناطیسی عمود است. برا یِ نشان‌دادن ِ این، حاصلِ‌ضرب ِ داخلی یِ $\mathbf{V}_0$ در این بردار $(\mathbf{r}_{\mathrm{t}})$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{t}} &= \mathrm{Re}(\dot{\Xi}_0^* \, \xi_{\mathrm{t}}) + \dot{Z}_0 \, z_{\mathrm{t}}, \\
&= \mathrm{Re}[A^* \, t \, a \, \exp(-i \, \omega \, t)] - \mathrm{Re}[A^* \, t \, a \, \exp(-i \, \omega \, t)], \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

این محاسبه تا مرتبه یِ یک انجام شده؛ ضمناً در آن از یک در برابر ِ $\omega \, t$، صرفِ‌نظر شده. در واقع برا یِ این که دایره یِ حرکت خوش‌تعریف باشد، لازم است ω بزرگ باشد تا پیش از این که مشخصات ِ دایره تغییر ِ چشم‌گیر ی کند، ذره چندین بار دایره را دور بزند. (39) می‌گوید شار ِ مغناطیسی یِ گذرنده از این دایره ثابت است.

بردار ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ ذره $-\omega''$ است، که

$$\omega'' = \boldsymbol{\omega} + \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}}{2 \, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \, \mathbf{V}_0. \tag{44}$$

جمله‌ها یِ باقی‌مانده در (29)، جمله‌ها یی نوسانی اند که بس‌آمدها یشان هم‌آهنگ‌ها یِ بس‌آمد ِ اصلی یِ نوسان است. می‌شود این چنین تعبیر کرد که این جمله‌ها مشخصات ِ دایره یِ نوسان را تغییر می‌دهند، اما چنان که میان‌گین ِ این تغییرات صفر است.

در نقطه ای که کرل ِ میدان ِ مغناطیسی صفر باشد، (34) یا (35)، و (44) ساده‌تر می‌شوند. اگر

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0, \tag{45}$$

آن‌گاه،

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \, \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}), \tag{46}$$

و از آن‌جا،

$$\mathbf{V}_{\mathrm{d}} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} \left(\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{v_{\mathrm{t}}^2}{2} \right). \tag{47}$$

هم‌چنین، (45) رابطه یِ (44) را هم ساده می‌کند:

$$\omega'' = \omega. \tag{48}$$

در این حالت، سرعت ِ زاویه‌ای یِ حرکت ِ دایره‌ای مستقل از حرکت ِ ذره در راستا یِ میدان است.

3 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 12

[2] David W. Henderson; “Differential geometry: a geometric introduction”, (Prentice Hall, 1998) chapter 2

4 اسم‌ها یِ خاص

[a] Lorentz

[b] Gauss

[c] Heaviside