X1-020 (2003/11/20)

اختلافِ‌فشار ِ ناشی از کشش ِ سطحی، و هندسه‌یِ‌دیفرانسیل ِ رویه‌ها

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

اختلافِ‌فشار ِ دو نقطه یِ نزدیک به هم (یک ی درون ِ یک توده یِ مایع و یک ی بیرون ِ آن) بر حسب ِ مشخصات ِ هندسی یِ سطح ِ آزاد ِ مایع محاسبه می‌شود.

1 انرژی یِ سطحی و کشش ِ سطحی

هر مایع، به خاطر ِ سطح ِ آزاد َ ش (سطح یِ که مرز ِ مایع با بیرون است) یک انرژی‌یِ‌پتانسیل دارد. این انرژی یِ سطحی، متناسب با مساحت ِ سطح ِ آزاد است: به این معنی که برا یِ دو مایع ِ هم‌جنس و هم‌حجم، تفاضل ِ انرژی یِ این دومایع متناسب است با تفاضل ِ مساحت ِ سطحِ‌آزادها یِ این دومایع. ضریب ِ تناسب را کشش ِ سطحی می‌نامند. به این ترتیب، انرژی یِ سطحی می‌شود

$$E = \tau\, A, \tag{1}$$

که τ کشش ِ سطحی و A مساحت ِ سطح ِ آزاد ِ مایع است. τ به جنس ِ مایع و ماده یِ بیرون َ ش (و البته پارامترها یِ مشخص‌کننده یِ حالت ِ ترمودینامیکی یِ مایع و ماده یِ بیرونی) بسته‌گی دارد. اگر ماده یِ بیرونی یک گاز ِ رقیق ِ بدون ِ برهم‌کنش ِ زیاد با

مایع باشد، و مایع را تراکم‌ناپذیر بگیریم، و میدان ِ خارجی یی هم در کار نباشد، می‌شود کشش ِ سطحی را تابع ِ فقط جنس ِ مایع و دما گرفت. در این حالت کشش ِ سطحی نوعاً مثبت است، چون انرژی یِ سطحی به خاطر ِ آن است که ملکول‌ها یِ سطحی یِ مایع هم‌سایه‌ها یِ کم‌تر ی دارند، و هر هم‌سایه متناظر است با مقدار ی انرژی یِ پتانسیل ِ منفی (نسبت به وقتی فاصله یِ ملکول‌ها از هم زیاد می‌شود).

به این ترتیب، کشش ِ سطحی یِ هر توده یِ مایع می‌خواهد مساحت ِ سطح ِ آزاد ِ توده را کم کند. با استفاده از این انرژی یِ سطحی، می‌شود نیرو یِ وارد بر بخش ی از سطح ِ آزاد ِ مایع ناشی از بخش ِ مجاور ِ آن را به دست آورد. فرض کنید خم ِ γ مرز ِ بخش ی از سطح ِ آزاد ِ مایع (بخش ِ S) باشد. برا یِ این که این خم را چنان بکشیم که مساحت ِ آن بخش به اندازه یِ ΔA زیاد شود، کار ِ ΔW لازم است. این کار می‌شود

$$\Delta W = \oint_\gamma \mathrm{d}l\; \mathbf{f}\cdot\Delta\mathbf{r}. \tag{2}$$

$\mathbf{f}\,\mathrm{d}l$ نیرو یی است که به بخش ی از خم به طول ِ $\mathrm{d}l$ وارد می‌شود، و $\Delta\mathbf{r}$ تغییرِمکان ِ (مجازی یِ) خم است. اگر $\mathbf{f}$ همان چگالی‌یِ‌نیرو یی باشد که بخش ی از سطح ِ آزاد ِ مایع که مجاور ِ S است، (بخش ِ S') به آن وارد می‌کند، مایع شتاب نمی‌گیرد و کار ِ رابطه یِ (2) صرف ِ تغییر ِ انرژی یِ سطحی می‌شود. از این‌جا،

$$\tau\,\Delta A = \oint_\gamma \mathrm{d}l\; \mathbf{f}\cdot\Delta\mathbf{r}, \tag{3}$$

که A مساحت ِ بخش ِ S، و ΔA تغییر ِ این مساحت است. اگر $\Delta\mathbf{r}$ را مماس بر سطح بگیریم،

$$\Delta A = \oint_\gamma \mathrm{d}l\; \mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{r}, \tag{4}$$

که $\mathbf{u}$ بردار ِ یکه یِ مماس بر سطح ِ آزاد، عمود بر خم ِ γ، و به طرف ِ بیرون ِ بخش ِ S است. از این‌جا،

$$\oint_\gamma \mathrm{d}l\; (\tau\,\mathbf{u}-\mathbf{f})\cdot\Delta\mathbf{r} = 0. \tag{5}$$

چگالی‌یِ‌نیرو یی را در نظر بگیرید که بخش ِ S به بخش ِ S' وارد می‌کند. این را با $\mathbf{f}'$ نشان می‌دهیم. $\mathbf{f}$ قرینه یِ $\mathbf{f}'$ نسبت به صفحه ای است که شامل ِ بردار ِ مماس بر γ و

بردار ِ عمود بر سطح است (چون عوض‌کردن ِ جا یِ S و S'، موضعاً شبیه ِ قرینه‌کردن نسبت به این صفحه است). ضمناً به خاطر ِ قانون ِ سه‌وم ِ نیوتُن [a]،

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}'. \tag{6}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود $\mathbf{f}$ با $\mathbf{u}$ موازی است. این نتیجه را با شکل ِ قوی یِ قانون ِ سه‌وم ِ نیوتُن [a] هم می‌شد به دست آورد. حالا به رابطه یِ (5) برمی‌گردیم. این رابطه باید برا یِ Δr ِ دل‌بخواه (و البته مماس بر سطح) درست باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود مئلفه یِ مماس‌برسطح ِ پرانتز ِ انتگرال‌ده صفر است. اما این پرانتز مئلفه یِ عمود بر سطح ندارد. پس،

$$\mathbf{f} = \tau\, \mathbf{u}. \tag{7}$$

2 اختلافِ‌فشار و کشش ِ سطحی

بخش ِ S از سطح ِ آزاد ِ مایع را در نظر بگیرید. نیروها یِ وارد بر این بخش عبارت اند از نیرو یِ ناشی از کشش ِ سطحی، نیرو یِ ناشی از فشار ِ درون یِ مایع، و نیرو یِ ناشی از فشار ِ بیرونی یِ مایع. فشارها یِ درونی و بیرونی در مجاورت ِ سطح را با به ترتیب P_i و P_o نشان می‌دهیم. در حالت ِ تعادل، نیرو یِ کل ِ وارد بر این سطح صفر است. پس،

$$\int_S \mathrm{d}A\; \delta P\, \mathbf{n} + \oint_{\partial S} \mathrm{d}l\; \tau\, \mathbf{u} = 0, \tag{8}$$

که $\mathbf{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح و به طرف ِ بیرون ِ مایع است، و

$$\delta P := P_\mathrm{i} - P_\mathrm{o}. \tag{9}$$

(8) را می‌شود چنین نوشت

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \mathrm{d}A\; \delta P\, \mathbf{n} + \oint_{\partial S} \mathrm{d}\mathbf{l}\, \times \mathbf{n}\, \tau, \\ &= \int_S \mathrm{d}A\; [\delta P\, \mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{n}\, \tau]. \end{aligned} \tag{10}$$

این رابطه باید برا یِ هر بخش ی از سطح ِ آزاد ِ مایع درست باشد. پس انتگرال‌ده یِ طرف ِ چپ صفر است:

$$\delta P\,\mathbf{n} = -\tau\,(\mathbf{n}\times\nabla)\times\mathbf{n},$$

$$= -\tau\,(\mathbf{n}\times\nabla_{\mathrm{t}})\times\mathbf{n},$$

$$= \tau\left[\mathbf{n}\,\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{n} - \frac{1}{2}\nabla_{\mathrm{t}}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\right], \tag{11}$$

و از آن‌جا،

$$\delta P = \tau\,\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{n}. \tag{12}$$

در این رابطه‌ها ∇_{t} بخش ِ موازی‌باسطح ِ ∇ است:

$$\nabla_{\mathrm{t}} = \nabla - \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\cdot\nabla). \tag{13}$$

در رسیدن به (12) هم از این استفاده شده که مشتق ِ $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}$ در راستاها یِ مماس بر سطح صفر است.

3 کم ی از هندسه یِ دیفرانسیل ِ رویه‌ها

مطالب ِ این بخش را می‌شود در کتاب‌ها یِ هندسه یِ دیفرانسیل (مثلاً در [1]) یافت. رویه یِ S در فضا یِ $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. این رویه موضعاً با دو پارامتر ِ (x^1, x^2) مشخص می‌شود؛ یعنی بردار ِ مکان ِ نقطه‌ها یِ این رویه، تابع ِ این دوپارامتر است. بردارها یِ $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ با تعریف ِ

$$\mathbf{e}_i := \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}, \tag{14}$$

یک پایه برا یِ صفحه یِ مماس بر این رویه اند. ($\mathbf{r}$ بردار ِ مکان است.) با استفاده از این بردارها، متریک ِ g و خمش ِ عارضی یِ K را تعریف می‌کنیم:

$$g_{ij} := \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j,$$

$$K_{ij} := \mathbf{n}\cdot\partial_i\mathbf{e}_j = \mathbf{n}\cdot\partial_i\partial_j\mathbf{r}, \tag{15}$$

که $\mathbf{n}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح است. روشن است که g و K متقارن اند. تعبیر ِ هندسی یِ مئلفه‌ها یِ قطری یِ K ساده است. صفحه ای شامل ِ $\mathbf{n}$ و $\mathbf{e}_i$ را در نظر بگیرید. اشتراک ِ این صفحه با رویه یِ S، خم ی است که موضعاً می‌شود آن را با x^i پارامتری کرد. بردار ِ مماس بر این خم $\mathbf{e}_i$ است، و رابطه یِ طولِ‌قوس ِ این خم l با x^i چنین است.

$$\mathrm{d}l = \sqrt{g_{ii}}\,\mathrm{d}x^i. \tag{16}$$

از این‌جا می‌شود خمش ِ این خم ($|\kappa_i|$) را حساب کرد:

$$\begin{aligned}|\kappa_i| &= \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i}}\right)\right|,\\ &= \left|\frac{1}{\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_i}\,\mathbf{n}\cdot\partial_i\mathbf{e}_i\right|,\\ &= \left|\frac{K_{ii}}{g_{ii}}\right|, \end{aligned}\tag{17}$$

و از آن‌جا،

$$K_{ii} = \kappa_i\,g_{ii}, \tag{18}$$

که κ_i خمش ِ جبری است: علامت ِ آن همان علامت ِ تصویر ِ $\partial_i\mathbf{e}_i$ در راستا یِ $\mathbf{n}$ است.

با استفاده از متریک ِ g، رد ِ K را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(K) &:= {K_i}^i,\\ &:= g^{ij}\,K_{ij}, \end{aligned}\tag{19}$$

که ماتریس ِ g با شاخص‌ها یِ بالا وارون ِ ماتریس ِ g با شاخص‌ها یِ پایین است:

$$g^{ij}\,g_{jk} = \delta^i_k, \tag{20}$$

و

$$K_i{}^k := g^{kj}\, K_{ij}. \tag{21}$$

تعبیر ِ هندسی یِ رد ِ K هم ساده است. فرض کنید به ازا یِ $i \neq j$، $g_{ij} = 0$، یعنی $\mathbf{e}_i$ و $\mathbf{e}_j$ بر هم عمود اند. در این صورت،

$$\begin{aligned} g^{ii} &= (g_{ii})^{-1}, \\ g^{ij} &= 0, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{22}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\mathrm{tr}(K) = \sum_i \kappa_i. \tag{23}$$

طرف ِ چپ به پارامتربندی یِ رویه بسته‌گی ندارد، و برابر است با حاصل‌ِجمع ِ خمش‌ها یِ جبری یِ خم‌ها یی که هر یک اشتراک ِ یک ی از صفحه‌ها یِ عمود برهم ِ شامل ِ $\mathbf{n}$ با رویه اند. به نصف ِ این مقدار، خمش ِ میان‌گین می‌گویند.

خمش ِ عارضی (K) را بر حسب ِ مشتق ِ بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح هم می‌شود نوشت:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{e}_j, \\ &= -\mathbf{e}_j \cdot \partial_i \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{24}$$

با تعریف ِ

$$\mathbf{e}^i := g^{ij}\, \mathbf{e}_j, \tag{25}$$

دیده می‌شود

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j, \tag{26}$$

و به ازا یِ هر بردار ِ $\mathbf{F}$،

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{e}^i\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}. \tag{27}$$

از ثابت‌بودن ِ طول ِ $\mathbf{n}$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{n}\cdot\partial_i\mathbf{n}=0, \tag{28}$$

و از آن‌جا،

$$\begin{aligned}\partial_i\mathbf{n}&=\mathbf{n}\,\mathbf{n}\cdot\partial_i\mathbf{n}+\mathbf{e}^k\,\mathbf{e}_k\cdot\partial_i\mathbf{n},\\&=-\mathbf{e}^k\,K_{ik},\end{aligned} \tag{29}$$

یا

$$\partial_i\mathbf{n}=-K_i{}^j\,\mathbf{e}_j. \tag{30}$$

به ویژه‌بردارها یِ ماتریس ی با مئلفه‌ها یِ $K_i{}^j$ جهت‌ها یِ اصلی، و به‌ویژه‌مقدارها یِ متناظر خمش‌ها یِ (جبری یِ) اصلی می‌گویند. به این ترتیب، خمش ِ میان‌گین برابر است با نصف ِ مجموع ِ ویژه‌مقدارها یِ این ماتریس.

از (27)، ضمناً داریم

$$\nabla_{\rm t}=\mathbf{e}^i\,\mathbf{e}_i\cdot\nabla. \tag{31}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned}{\rm tr}(K)&=K_i{}^i\\&=-(\mathbf{e}^i\,\partial_i)\cdot\mathbf{n},\\&=-(\mathbf{e}^i\,\mathbf{e}_i\cdot\nabla)\cdot\mathbf{n},\\&=-\nabla_{\rm t}\cdot\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{32}$$

از مقایسه یِ این با (12)، دیده می‌شود

$$\delta P=-\tau\,{\rm tr}(K). \tag{33}$$

یعنی اختلافِ‌فشار ِ دوطرف ِ سطح ِ آزاد ِ مایع، برابر است با کشش ِ سطحی ضرب در دوبرابر ِ خمش ِ میان‌گین.

4 مرجع

[1] Erwin Kreyszig; "Differential geometry", (Dover, 1991) chapter IV

5 اسم ِ خاص

[a] Newton