X1-021 (2004/01/22)

معادله‌ها يِ میدان ِ الکترومغناطیسی در ماده

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

ترکیب ی از بخش ی از چشمه‌ها يِ میدان ِ الکترومغناطیسی (که ناشی از بارها و جریان‌ها يِ یک محیط ِ مادی است) به میدان ِ الکترومغناطیسی اضافه می‌شود و به این ترتیب میدان‌ها يِ جدید ی تعریف می‌شود. معادله‌ها يِ مَکسوِل [a] بر حسب ِ این میدان‌ها يِ جدید بازنویسی می‌شود.

0 مقدمه

چشمه يِ میدان ِ الکترومغناطیسی همه يِ بارها و جریان‌ها يِ الکتریکی است. اما کارکردن با همه يِ بارها و جریان‌ها ساده نیست: بخش ی از چشمه است که معمولاً به آن چشمه يِ آزاد (بار یا جریان ِ آزاد) می‌گویند، و آن را می‌شود نسبتاً به‌ساده‌گی کنترل کرد. بخش يِ دیگر ی از چشمه ناشی از این است که میدان ِ الکترومغناطیسی آرایش ِ بارها و جریان‌ها يِ اتم‌ها يِ سازنده يِ ماده را تغییر می‌دهد. پس اگر یک چشمه يِ خارجی يِ (آزاد ِ) میدان ِ الکترومغناطیسی را به محیط ی وارد کنیم، فقط همان چشمه نیست که میدان ِ الکترومغناطیسی را می‌سازد: به خاطر ِ خود ِ میدان چشمه يِ دیگر ی هم

درست می‌شود. هدف این است که این چشمه يِ جدید را از بخش ِ چشمه يِ میدان ِ الکترومغناطیسی در معادله‌ها يِ مَکسوِل [a] جدا، و وارد ِ میدان ِ الکترومغناطیسی کنیم. به این ترتیب یک میدان ِ جدید ِ چگالی (در واقع دو میدان، یک ی متناظر با میدان ِ الکتریکی و یک ی متناظر با میدان ِ مغناطیسی) تعریف می‌شود و معادله‌ها يِ میدان شامل ِ میدان ِ الکترومغناطیسی، میدان ِ چگالی، و بخش ِ آزاد ِ چشمه می‌شود. این معادله‌ها، با دانستن ِ رابطه يِ میدان ِ چگالی با میدان ِ الکترومغناطیسی (معادله يِ ساخت‌مندی) و بخش ِ آزاد ِ چشمه علی‌الاصول قابلِ‌حل اند.

بخش ی از چشمه که وارد ِ میدان ِ چگالی شده (بخش ِ مادی یا مقید ِ چشمه) شامل ِ افت‌خیزها یی هم هست که مقیاس ِ طول و زمان ِشان بسیار کوچک‌تر از خطا يِ سنجش ِ طول و زمان است. چون معادله‌ها يِ میدان نسبت به کل ِ چشمه خطی و مستقل از زمان و مکان اند، افت‌وخیزها يِ پربس‌آمد ِ چشمه به افت‌وخیزها يِ پربس‌آمد ِ میدان می‌انجامند. پس اگر به جا يِ چشمه يِ واقعی چشمه ای بگذاریم که مئلفه‌ها يِ پربس‌آمد َش حذف شده، در میدان ِ حاصل از این چشمه يِ جدید هم فقط مئلفه‌ها يِ پربس‌آمد حذف می‌شود و مئلف‌ها يِ کم‌بس‌آمد بی‌تغییر می‌مانند. به این فرآیند هم‌وارسازی می‌گوییم. به معادله‌ها يِ مَکسوِل [a] پس از بردن ِ چشمه‌ها يِ مادی به درون ِ میدان و هم‌وارسازی، معادله‌ها يِ ماکروسکپی يِ مَکسوِل [a] می‌گوییم [1].

1 تجزیه يِ چشمه

چگالی يِ بار ِ الکتریکی يِ ناشی از یک مجموعه ذره يِ باردار

$$\rho(t,\mathbf{r})=\sum_i q_i\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)] \tag{1}$$

است، که $\rho(t,\mathbf{r})$ چگالی در زمان ِ t در نقطه يِ $\mathbf{r}$، q_i بار ِ ذره يِ i، و $\mathbf{r}_i(t)$ مکان ِ ذره يِ i در زمان ِ t است. هر یک از بارها يِ این مجموعه ذره يِ باردار را می‌شود به یک اتم نسبت داد. در این صورت (1) را می‌شود به این شکل باز نوشت.

$$\rho(t,\mathbf{r})=\sum_a \rho_a(t,\mathbf{r}), \tag{2}$$

و

$$\rho_a(t,\mathbf{r})=\sum_i^a q_i\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)-\mathbf{R}_i(t)]. \tag{3}$$

ρ_a چگالی یِ ناشی از اتم ِ a، $\mathbf{r}_a$ جا یِ یک نقطه یِ خاص ِ اتم ِ a، و $\mathbf{R}_i$ جا یِ ذره یِ i نسبت به $\mathbf{r}_a$ است. شاخص ِ a در جمع‌بندی، یعنی جمع‌بندی فقط رو یِ بارها یِ مربوط به اتم ِ a است. (3) را می‌شود نوشت

$$\begin{aligned}\rho_a(t,\mathbf{r})&=\left\{\sum_i^a q_i\,\exp[-\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\\&=\tilde\rho_a(t,\mathbf{r})-\left\{\sum_i^a q_i\,[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\,F[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\end{aligned} \tag{4}$$

که

$$\begin{aligned}\tilde\rho_a(t,\mathbf{r})&:=Q_a\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\\&:=\left(\sum_i^a q_i\right)\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\end{aligned} \tag{5}$$

و

$$F(x):=\frac{1-\exp(-x)}{x}. \tag{6}$$

با تعریف ِ

$$\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}):=\left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{R}_i(t)\,F[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)], \tag{7}$$

دیده می‌شود

$$\rho_a(t,\mathbf{r})=\tilde\rho_a(t,\mathbf{r})-\nabla\cdot\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}), \tag{8}$$

و از آن‌جا

$$\rho(t,\mathbf{r})=\tilde\rho(t,\mathbf{r})-\nabla\cdot\mathbf{P}(t,\mathbf{r}), \tag{9}$$

که

$$\tilde{\rho}(t,\mathbf{r}) = \sum_a \tilde{\rho}_a(t,\mathbf{r}), \tag{10}$$

و

$$\mathbf{P}(t,\mathbf{r}) = \sum_a \mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}). \tag{11}$$

به $\tilde{\rho}$ چگالی یِ بارها یِ آزاد می‌گوییم. $\mathbf{P}$ ناشی از چندقطبی‌ها یِ الکتریکی یِ ماده است. بخش ی از $\mathbf{P}$ که ناشی از اولین جمله یِ بسط ِ تیلر [b] ِ F است، چگالی یِ دوقطبی یِ الکتریکی است:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_a^{(1)}(t,\mathbf{r}) &= \left[\sum_i^a q_i\,\mathbf{R}_i(t)\right]\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\\ &=: \mathbf{p}_a(t)\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)].\end{aligned} \tag{12}$$

جمله‌ها یِ بعدی یِ بسط هم مشتق ِ چهارقطبی، مشتق ِ دوم ِ هشت‌قطبی، و غیره را می‌دهند.

چگالی یِ جریان در زمان ِ t و نقطه یِ $\mathbf{r}$ می‌شود

$$\mathbf{J}(t,\mathbf{r}) = \sum_i q_i\,\mathbf{v}_i(t)\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)], \tag{13}$$

که $\mathbf{v}_i$ سرعت ِ ذره یِ i است:

$$\mathbf{v}_i(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

(13) را هم می‌شود شبیه ِ (2) و (3) تجزیه کرد:

$$\mathbf{J}(t,\mathbf{r}) = \sum_a \mathbf{J}_a(t,\mathbf{r}), \tag{15}$$

که

$$\mathbf{J}_a(t,\mathbf{r}) = \sum_i^a q_i\,[\mathbf{v}_a(t)+\mathbf{V}_i(t)]\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)-\mathbf{R}_i(t)], \tag{16}$$

و

$$\mathbf{V}_i(t) := \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_i(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{17}$$

با استفاده از (3)،

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_a(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_a(t)\,\rho_a(t,\mathbf{r}) + \sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i(t)\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)-\mathbf{R}_i(t)],\\
&= \mathbf{v}_a(t)\,\rho_a(t,\mathbf{r}) + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i\,\exp[-\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\\
&= \mathbf{v}_a(t)\,\tilde{\rho}_a(t,\mathbf{r}) - \mathbf{v}_a(t)\,\nabla\cdot\mathbf{P}(t,\mathbf{r})\\
&\quad + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i\,\exp[-\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)].
\end{aligned}\tag{18}$$

با استفاده از (7)،

$$\begin{aligned}
\partial_t\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) &= -\mathbf{v}_a(t)\cdot\nabla\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i(t)\,F[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]\\
&\quad + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{R}_i(t)\,[\mathbf{V}_i(t)\cdot\nabla]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\\
&= -\mathbf{v}_a(t)\cdot\nabla\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i(t)\,F[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]\\
&\quad + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i(t)\,[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]\\
&\quad + \nabla\times\left\{\sum_i^a q_i\,[\mathbf{R}_i(t)\times\mathbf{V}_i(t)]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],\\
&= -\mathbf{v}_a(t)\cdot\nabla\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) + \left\{\sum_i^a q_i\,\mathbf{V}_i\,\exp[-\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]\\
&\quad + \nabla\times\left\{\sum_i^a q_i\,[\mathbf{R}_i(t)\times\mathbf{V}_i(t)]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)].
\end{aligned}\tag{19}$$

F' مشتق ِ F است، و در به‌دست‌آوردن ِ تساوی ِ آخر

$$F(x) + x\,F'(x) = \exp(-x) \tag{20}$$

به کار رفته است. از (18) و (19) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{J}_a(t,\mathbf{r}) = \mathbf{v}_a(t)\,\tilde{\rho}_a(t,\mathbf{r}) + \partial_t\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) - \mathbf{v}_a(t)\,\nabla\cdot\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) + \mathbf{v}_a(t)\cdot\nabla\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r})$$
$$-\nabla\times\left\{\sum_i^a q_i\,[\mathbf{R}_i(t)\times\mathbf{V}_i(t)]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],$$
$$= \mathbf{v}_a(t)\,\tilde{\rho}_a(t,\mathbf{r}) + \partial_t\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) + \nabla\times[\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r})\times\mathbf{v}_a(t)]$$
$$-\nabla\times\left\{\sum_i^a q_i\,[\mathbf{R}_i(t)\times\mathbf{V}_i(t)]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]. \qquad (21)$$

با تعریف‌ها یِ

$$\tilde{\mathbf{J}}_a(t,\mathbf{r}) := \mathbf{v}_a(t)\,\tilde{\rho}_a(t,\mathbf{r}), \qquad (22)$$

و

$$\mathbf{M}_a(t,\mathbf{r}) := -\left\{\sum_i^a q_i\,[\mathbf{R}_i(t)\times\mathbf{V}_i(t)]\,F'[\mathbf{R}_i(t)\cdot\nabla]\right\}\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)] + \mathbf{P}_a(t,\mathbf{r})\times\mathbf{v}_a(t), \qquad (23)$$

رابطه یِ (21) می‌شود

$$\mathbf{J}_a(t,\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{J}}_a(t,\mathbf{r}) + \partial_t\mathbf{P}_a(t,\mathbf{r}) + \nabla\times\mathbf{M}_a(t,\mathbf{r}), \qquad (24)$$

و از آن‌جا

$$\mathbf{J}(t,\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{J}}(t,\mathbf{r}) + \partial_t\mathbf{P}(t,\mathbf{r}) + \nabla\times\mathbf{M}(t,\mathbf{r}), \qquad (25)$$

که

$$\tilde{\mathbf{J}}(t,\mathbf{r}) = \sum_a \tilde{\mathbf{J}}_a(t,\mathbf{r}), \qquad (26)$$

و

$$\mathbf{M}(t,\mathbf{r}) = \sum_a \mathbf{M}_a(t,\mathbf{r}). \qquad (27)$$

به $\tilde{\mathbf{J}}$ چگالی یِ جریان‌ها یِ آزاد می‌گوییم. $\mathbf{M}$ ناشی از چندقطبی‌ها یِ مغناطیسی یِ ماده است. جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (23) اثر ِ چندقطبی‌ها یِ مغناطیسی یی است که از

حرکت ِ چندقطبی‌ها یِ الکتریکی یِ اتم ِ a نتیجه می‌شود. جمله یِ اول ِ طرف ِ راست اثر ِ چندقطبی‌ها یِ مغناطیسی یِ ناشی از حرکت ِ بارها درون ِ اتم ِ a است. بخش ی از $\mathbf{M}$ که ناشی از اولین جمله یِ بسط ِ تِیلِر [b]ِ F و F' است، چگالی یِ دوقطبی یِ مغناطیسی است:

$$\mathbf{M}_a^{(1)}(t,\mathbf{r}) = \left\{\left[\sum_i^a \frac{1}{2}\,q_i\,\mathbf{R}_i(t)\times\mathbf{V}_i(t)\right] + \mathbf{p}_a(t)\times\mathbf{v}_a(t)\right\}]\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],$$

$$=:\mathbf{m}_a(t)\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)],$$
$$=:[\boldsymbol{\mu}_a(t)+\mathbf{p}_a(t)\times\mathbf{v}_a(t)]\,\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t)]. \tag{28}$$

جمله یِ اول ِ کروشه یِ طرف ِ راست، دوقطبی یِ مغناطیسی یِ ناشی از حرکت ِ بارها نسبت به نقطه یِ مرجع ِ اتم ($\mathbf{r}_a$) است. جمله یِ دوم ِ کروشه دوقطبی یِ مغناطیسی یِ حاصل از حرکت ِ دوقطبی یِ الکتریکی یِ اتم است.

جمله‌ها یِ بعدی یِ بسط ِ F و F' هم مشتق ِ چهارقطبی، مشتق ِ دوم ِ هشت‌قطبی، و غیره را می‌دهند.

2 میدان‌ها یِ چگالی

معادله‌ها یِ مَکسوِل [a] برا یِ میدان ِ الکتریکی ($\mathbf{E}$) و میدان ِ مغناطیسی ($\mathbf{B}$)

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = 0, \tag{29}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(t,\mathbf{r})+\partial_t\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = 0, \tag{30}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \varepsilon_0^{-1}\,\rho(t,\mathbf{r}), \tag{31}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}(t,\mathbf{r})-\mu_0\,\varepsilon_0\,\partial_t\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \mu_0\,\mathbf{J}(t,\mathbf{r}) \tag{32}$$

اند. با استفاده از (9) و (25)، معادله‌ها یِ ناهم‌گن ِ (31) و (32) می‌شوند

$$\nabla\cdot[\varepsilon_0\,\mathbf{E}(t,\mathbf{r})+\mathbf{P}(t,\mathbf{r})] = \tilde{\rho}(t,\mathbf{r}), \tag{33}$$

$$\nabla\times[\mu_0^{-1}\,\mathbf{B}(t,\mathbf{r})-\mathbf{M}(t,\mathbf{r})]-\partial_t[\varepsilon_0\,\mathbf{E}(t,\mathbf{r})+\mathbf{P}(t,\mathbf{r})] = \tilde{\mathbf{J}}(t,\mathbf{r}). \tag{34}$$

میدان‌ها يِ چگالی يِ شار ِ الکتریکی $(\mathbf{D})$ و چگالی يِ گردش ِ مغناطیسی $(\mathbf{H})$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) := \varepsilon_0\,\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) + \mathbf{P}(t,\mathbf{r}), \tag{35}$$

$$\mathbf{H}(t,\mathbf{r}) := \mu_0^{-1}\,\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) - \mathbf{M}(t,\mathbf{r}). \tag{36}$$

با استفاده از این‌ها، (33) و (34) می‌شوند

$$\nabla\cdot\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(t,\mathbf{r}), \tag{37}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}(t,\mathbf{r}) - \partial_t\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{J}}(t,\mathbf{r}). \tag{38}$$

معادله‌ها يِ (29)، (30)، (37)، و (38) شامل ِ چهار میدان اند: دو میدان ِ الکترومغناطیسی و دو میدان ِ چگالی. این معادله‌ها برا يِ به‌دست‌آوردن ِ این چهارمیدان با داشتن ِ چشمه‌ها يِ آزاد و شرایط ِ اولیه و مرزی کافی نیستند. برا يِ حل ِ این معادله‌ها باید معادله‌ها يِ ساخت‌مندی را هم به این مجموعه افزود. معادله‌ها يِ ساخت‌مندی، میدان‌ها يِ چگالی را بر حسب ِ میدان‌ها يِ الکترومغناطیسی می‌دهند. معادله‌ها يِ (29)، (30)، (37)، و (38)، هم‌راه با معادله‌ها يِ ساخت‌مندی جای‌گزین ِ معادله‌ها يِ (29) تا (32) اند.

3 هم‌وارسازی

فرآیند ِ هم‌وارسازی، اصولاً یعنی به جا يِ مقدار ِ میدان در یک نقطه نوع يِ میان‌گین ِ مقدار ِ میدان در هم‌سایه‌گی يِ آن نقطه را بگذاریم. این کار به این شکل انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}f)(t,\mathbf{r}) &:= \int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}V'\;W(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,f(t',\mathbf{r}'),\\ &= \int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}V'\;W(t',\mathbf{r}')\,f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{aligned} \tag{39}$$

که $\mathcal{S}f$ هم‌وارشده يِ f، و W تابع ی هم‌وار و جای‌گزیده حول ِ مبدئ با پهنا يِ زمانی يِ Δt و پهنا يِ فضایی يِ Δr است. هم‌چنین

$$\int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}V\ W(t, \mathbf{r}) = 1. \tag{40}$$

هر چه Δt و Δr بزرگ‌تر شوند، هم‌وارسازی شدیدتر است. برا یِ دیدن ِ این، کافی است از (39) تبدیل ِ فوریه [c] بگیریم:

$$[\mathcal{F}(\mathcal{S}f)](\omega, \mathbf{k}) = [(\mathcal{F}W)(\omega, \mathbf{k})]\, [(\mathcal{F}f)(\omega, \mathbf{k})], \tag{41}$$

که $\mathcal{F}$ تبدیل ِ فوریه [c] است:

$$(\mathcal{F}f)(\omega, \mathbf{r}) := \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}V\ \ \exp[i(\omega\, t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]\, f(t, \mathbf{r}). \tag{42}$$

اما اگر پهنا یِ تابع ِ جای‌گزیده ای Δx باشد، پهنا یِ تبدیلِ‌فوریه [c] یِ آن تابع از مرتبه یِ عکس ِ Δx است. پس پهنا یِ $\mathcal{F}W$ برا یِ متغیر ِ ω از مرتبه یِ $(\Delta t)^{-1}$ و برا یِ متغیر ِ $\mathbf{k}$ از مرتبه یِ $(\Delta r)^{-1}$ است. این یعنی یِ $\mathcal{F}(\mathcal{S}f)$، برا یِ ω ها یِ خیل ی بزرگ‌تر از $(\Delta t)^{-1}$ یا $\mathbf{k}$ ها یِ با $|\mathbf{k}|$ یِ خیل ی بزرگ‌تر از $(\Delta r)^{-1}$، خیل ی کوچک‌تر از $\mathcal{F}f$ برا یِ همین مقدارها یِ ω و $\mathbf{k}$ است. پس هم‌وارسازی با W، افت‌وخیزها یِ با مقیاس‌ها یِ زمانی یِ کوچک‌تر از Δt یا مقیاس‌ها یِ فضایی یِ کوچک‌تر از Δr را حذف می‌کند.

با استفاده از (39)، به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\partial_t f) &= \partial_t(\mathcal{S}f),\\ \mathcal{S}(\nabla f) &= \nabla(\mathcal{S}f). \end{aligned} \tag{43}$$

این نشان می‌دهد (29) تا (38)، برا یِ هم‌وارشده یِ میدان‌ها و چشمه‌ها (به جا یِ خود ِ میدان‌ها و چشمه‌ها) هم برقرار اند. از جمله،

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(\mathcal{S}\mathbf{B})(t, \mathbf{r}) &= 0,\\ \nabla\times(\mathcal{S}\mathbf{E})(t, \mathbf{r}) + \partial_t(\mathcal{S}\mathbf{B})(t, \mathbf{r}) &= 0,\\ \nabla\cdot(\mathcal{S}\mathbf{D})(t, \mathbf{r}) &= (\mathcal{S}\tilde{\rho})(t, \mathbf{r}),\\ \nabla\times(\mathcal{S}\mathbf{H})(t, \mathbf{r}) - \partial_t(\mathcal{S}\mathbf{D})(t, \mathbf{r}) &= (\mathcal{S}\tilde{\mathbf{J}})(t, \mathbf{r}), \end{aligned} \tag{44}$$

(معادلات ِ ماکروسکپی یِ مَکسوِل [a]) و

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}\mathbf{D})(t,\mathbf{r}) &:= \varepsilon_0\,(\mathcal{S}\mathbf{E})(t,\mathbf{r}) + (\mathcal{S}\mathbf{P})(t,\mathbf{r}),\\
(\mathcal{S}\mathbf{H})(t,\mathbf{r}) &:= \mu_0^{-1}\,(\mathcal{S}\mathbf{B})(t,\mathbf{r}) - (\mathcal{S}\mathbf{M})(t,\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{45}
$$

در خیل ی جاها، برا یِ ساده‌گی علامت ـِ $\mathcal{S}$ را از میدان‌ها یِ هم‌وارشده بر می‌دارند. (44) و (45) (هم‌راه با معادله‌ها یِ ساخت‌مندی برا یِ میدان‌ها یِ هم‌وارشده) علی‌الاصول برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ میدان‌ها یِ هم‌وارشده از رو یِ شرایط ـِ اولیه و مرزی و چشمه‌ها یِ آزاد ـِ هم‌وارشده کافی اند.

4 مرجع

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 6

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Maxwell

[b] Taylor

[c] Fourier