X1-022 (2004/02/21)

یُنها یِ هیدرُژن- گونه، و سْپینُرها یِ کروی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

معادله یِ دیرَک [1] بر حسب ِ سْپینُرها یِ کروی نوشته میشود. برا یِ پتانسیلها یِ کروی- متقارن، بخشها یِ زاویِئی و شعاعی یِ سْپینُر از هم جدا میشوند و از آنجا، بخش ی از طیف ِ یُنها یِ هیدروژن- گونه که متناظر با حالتها یِ مقید است محاسبه میشود.

0 مقدمه

معادله یِ دیرَک [1] تقریب ی برا یِ توصیف ِ ذرها یِ با اسپین ِ $(1/2)$ در یک میدان ِ خارجی ست. این تقریب آثار ِ نسبیتی را در بر دارد، اما تصحیحها یِ تابشی را نَ. از جمله، با حل ِ معادله یِ دیرَک [1] برا یِ پتانسیل ِ مرکزی یِ متناسب با وارون ِ فاصله، میشود طیف ِ یُنها یِ هیدروژن- گونه را (صرف- ِ -نظر از تصحیحها یِ تابشی) به دست آورد. برا یِ حل ِ معادله یِ دیرَک [1] در پتانسیلها یِ مرکزی، معمولَن خُد ِ سْپینُر را به شکل ِ دکَرتی نگه میدارند اما معادله را بر حسب ِ مختصات ِ کروی مینویسند. سپس بخشها یِ زاویِئی و شعاعی را از هم جدا میکنند و دُ معادله- یِ- دیفرانسیل ِ عادی یِ جفت- شده یِ از مرتبه یِ یک به دست میئاورند، که متغیر ِ شان شعاع است. (این معادلِها برا یِ ویژه- بردارها یِ انرژی یَند.) برا یِ پتانسیل ِ متناسب با وارون ِ فاصله، میشود این معادلِها را حل کرد و طیف ِ

انرژی را به دست آورد. این کار ی است، که در مثلَن [2] انجام شده است.

اینجا هدف آن است که معادله یِ دیرَک [1] از ابتدا در مختصات ِ کروی نوشته شود، یعنی نَ-تنها سْپینُر تابع ِ مختصات ِ کروی باشد، بلکه هموستارها یِ سْپینُری یِ مختصات ِ کروی هم در معادله وارد شوند. معلوم میشود سْپینُرها یِ کروی یی که در این معادله ظاهر میشوند، با یک تبدیل- ِ-لُرِنتس [3] ِ مُضعی به سْپینُرها یِ دکَرتی مربوط َند. (سْپینُرها یِ دکَرتی آنها یی یَند که در معادله-یِ-دیرَک [1] ِ بدون ِ هموستار ظاهر میشوند).

در ادامه، بخشها یِ زاویِئ و شعاعی یِ سْپینُرها یِ کروی از هم جدا میشوند و برا یِ پتانسیلها یِ متناسب با وارون ِ فاصله، طیف ِ سیستم به دست میئاید. طبعَن این طیف همان ی است که از معادله یِ دکَرتی به دست میئاید.

در سراسر ِ این متن در واحدها یی کار میکنم که c (سرعت ِ نور) و $\hbar$ (ثابت ِ پْلانک [4] تقسیم بر 2π) یک َند، مگر صریحَن خلاف ِ آن گفته شود.

1 معادله یِ دیرَک در مختصات ِ (یا فضازمانها یِ) ناتخت

معادله یِ دیرَک [1] برا یِ یک ذره یِ آزاد، این است.

$$[\gamma^a(\partial_a+\Gamma_a)-\mu]\psi=0. \tag{1}$$

ψ سْپینُر ِ دیرَک [1]، و μ جرم ِ ذره (عکس ِ طول- ِ-مُج ِ کامپتِن [5] ِ ذره) است. γ^a ها ماتریسها یی ثابت َند، که تعداد ِشان برابر ِ بُعد ِ فضازمان است و رابطه یِ جبر ِ کْلیفُرد [6] را بر میئاورند:

$$\{\gamma^a,\gamma^b\}=\eta^{a\,b}. \tag{2}$$

ماتریس ِ η با شاخص ِ بالا وارون ِ ماتریس ِ η با شاخص ِ پایین است:

$$\eta^{a\,b}\,\eta_{b\,c}=\delta^a_c, \tag{3}$$

و $\eta_{a\,b}$ ها مئلفها یِ متریک در یک پایه یِ راست-هنجار ِ فضا یِ مماس َند. این پایه را با $\{(a,e_a)\mid a\}$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\eta_{a\,b}=e_a\cdot e_b,$$
$$\{\eta_{a\,b}\}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1). \tag{4}$$

(این برا یِ فضازمانِ $(p+1)$ بُعدی ست. برا یِ فضازمانِ $(p+q)$ بُعدی، تعدادِ (-1) ها q و تعدادِ $(+1)$ ها p است.) با η شاخصها را بالا و پایین میبرم.

∂_a مشتقِ سویی در راستا یِ e_a است. Γ_a ها هم هموستارها یِ سْپینُری یَند. برا یِ فضازمان ی با هموستارِ لِوی-چیویتا [7]، Γ_a ها چنین محاسبه میشوند. پایه یِ دُگانِ $\{(a, e_a)\ \mid\ a\}$ را $\{(a, e^a) \mid a\}$ میگیرم:

$$e^a(e_b) = \delta^a_b. \tag{5}$$

تک-فرم-ِ-دیفرانسیلها یِ $\Gamma^a{}_b$ را چنان میگیرم که

$$\mathrm{d}e^a + \Gamma^a{}_b \wedge e^b = 0. \tag{6}$$

$$\Gamma_{a\,b} + \Gamma_{b\,a} = 0. \tag{7}$$

(اینها را میشود در مثلَن [8] یافت.) هموستارها میشوند

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\,\Gamma^b{}_a{}^c\,\sigma_{c\,b}, \tag{8}$$

که

$$\Gamma^b{}_c =: \Gamma^b{}_{a\,c}\,e^a, \tag{9}$$

و ماتریسها یِ $\sigma_{a\,b}$ مولدها یِ تبدیلِ لُرنتس [3] برا یِ سْپینُرها یند:

$$\sigma_{a\,b} = -\frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]. \tag{10}$$

این را میشود در مثلَن [9] یافت. $\sigma_{a\,b}$ ها این ویژه‌گی را دارند که اگر Λ ماتریسِ یک تبدیلِ لُرِنتس [3] با

$$\Lambda = \exp(\Xi) \tag{11}$$

باشد، که

$$\Xi^{a\,b} + \Xi^{b\,a} = 0, \tag{12}$$

و

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\,\Xi^{a\,b}\,\sigma_{b\,a}\right), \tag{13}$$

آنگاه

$$\gamma^a[S(\Lambda)] = [S(\Lambda)]\gamma^b\,\Lambda^a{}_b. \tag{14}$$

با استفاده از این و از رو یِ تعریف ِ هموستارها یِ سْپینُری، میشود نشان داد اگر ψ معادله یِ (1) را براورَد، آنگاه

$$[\gamma^a(\partial_{a'} + \Gamma'_{a'}) - \mu]\psi' = 0, \tag{15}$$

که

$$\psi' = [S^{-1}(\Lambda)]\psi. \tag{16}$$

و $\partial_{a'}$ و $\Gamma'_{a'}$ مشتق ِ سویی و هموستار- ِ-سْپینُری یی یَند که با پایه یِ راست-هنجار ِ $\{(a, e'_a) \mid a\}$ تعریف میشوند:

$$e'_a = \Lambda^b{}_a\,e_b. \tag{17}$$

$$\Gamma'_{a'} = \frac{1}{2}\,\Gamma'^{b'}{}_{a'}{}^{c'}\,\sigma_{c\,b}, \tag{18}$$

برا یِ اثبات ِ همَرزی یِ (15) با (1)، این را به کار میبرم که

$$\begin{aligned}[S(\Lambda)]\gamma^a(\partial_{a'} + \Gamma'_{a'})[S^{-1}(\Lambda)] &= (\Lambda^{-1})^a{}_b\,\gamma^b[S(\Lambda)](\partial_{a'} + \Gamma'_{a'})[S^{-1}(\Lambda)],\\ &= \gamma^b[S(\Lambda)]\,(\partial_b + \Gamma'_b)[S^{-1}(\Lambda)].\end{aligned} \tag{19}$$

همچنین،

$$\Lambda^a{}_c(\Lambda^{-1})^d{}_b\Gamma'^{c'}{}_{d'} + \Lambda^a{}_c\,\mathrm{d}(\Lambda^{-1})^c{}_b = \Gamma^a{}_b. \tag{20}$$

این را میشود مثلَن از (6) و مانسته اَش برا یِ Γ':

$$\mathrm{d}\,e'^a + \Gamma'^{a'}{}_{b'} \wedge e'^b = 0, \tag{21}$$

و نیز (7) و مانسته اَش برا یِ Γ'، و سرانجام (17) به دست آورد. با استفاده از (10) و (14)،

$$\sigma_{a\,b}[S(\Lambda)] = [S(\Lambda)]\sigma_{c\,d}\,\Lambda_a{}^c\,\Lambda_b{}^d. \tag{22}$$

از این رابطه و (20)، نتیجه میشود

$$[S(\Lambda)]\Gamma'[S^{-1}(\Lambda)] + \frac{1}{2}\,\Lambda^d{}_e\,[\mathrm{d}(\Lambda^{-1})^{e\,c}]\,\sigma_{c\,d} = \Gamma. \tag{23}$$

در رسیدن به این رابطه، از تعامد ِ ماتریس ِ Λ نسبت به η هم استفاده شده:

$$\Lambda^a{}_b\,\Lambda_{c\,b} = \delta^a_c. \tag{24}$$

سرانجام،

$$[S(\Lambda)]\,\mathrm{d}[S^{-1}(\Lambda)] = \frac{1}{2}\,\Lambda^d{}_e\,[\mathrm{d}(\Lambda^{-1})^{e\,c}]\,\sigma_{c\,d}. \tag{25}$$

اثبات ِ این رابطه برا یِ Λ نزدیک به همانی، به سادِگی از (11) و (13) نتیجه میشود. برا یِ Λ ها یِ دلبخاه هم، کافی ست هم ین حکم برا یِ Λ ها یِ نزدیک به همانی، و نیز ویژِگی یِ همریختی یِ S:

$$[S(\Lambda)][S(\Lambda')] = S(\Lambda\,\Lambda'), \tag{26}$$

به کار رود. از (23) و (25) نتیجه میشود

$$[S(\Lambda)](\mathrm{d}+\Gamma')[S^{-1}(\Lambda)] = \mathrm{d}+\Gamma, \tag{27}$$

که نشان میدهد (15) با (1) همٲرز است.

2 سْپینُرها یِ کروی

یک فضا یِ مینکُوْسکی [10] یِ (3+1) بعدی را میگیرم. سْپینُر ِ کروی متناظر با پایه یِ $\{(a, e_a) \mid a\}$:

$$\begin{aligned} e_0 &= \hat{\boldsymbol{t}},\\ e_1 &= \hat{\boldsymbol{r}},\\ e_2 &= \hat{\boldsymbol{\theta}},\\ e_3 &= \hat{\boldsymbol{\phi}}, \end{aligned} \tag{28}$$

را با ψ نشان می‌دهم. t مختصه یِ زمان است و (r,θ,ϕ) مختصات ِ کروی یِ فضا یَند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\partial_0 &= \frac{\partial}{\partial\, t},\\
\partial_1 &= \frac{\partial}{\partial\, r},\\
\partial_2 &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\,\theta},\\
\partial_3 &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\phi}.
\end{aligned}\tag{29}$$

پایه یِ دوگان ِ $\{(a,e_a)\mid a\}$ میشود $\{(a,e^a)\mid a\}$:

$$\begin{aligned}
e^0 &= \mathrm{d}\,t,\\
e^1 &= \mathrm{d}\,r,\\
e^2 &= r\,\mathrm{d}\,\theta,\\
e^3 &= r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\,\phi.
\end{aligned}\tag{30}$$

با استفاده از (6) و (7)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
\Gamma^{2\,1} &= -\Gamma^{1\,2} = \frac{1}{r}\,e^2,\\
\Gamma^{3\,1} &= -\Gamma^{1\,3} = \frac{1}{r}\,e^3,\\
\Gamma^{3\,2} &= -\Gamma^{2\,3} = \frac{\cot\theta}{r}\,e^3,
\end{aligned}\tag{31}$$

و بقیه یِ هموستارها صفر َند. از اینجا،

$$\begin{aligned}
\gamma^a(\partial_a+\Gamma_a) &= \gamma^0\,\frac{\partial}{\partial\,t}+\gamma^1\,\frac{\partial}{\partial\,r}+\gamma^2\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}+\frac{1}{r}\,\sigma_{1\,2}\right)\\
&\quad+\gamma^3\left(\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\phi}+\frac{1}{r}\,\sigma_{1\,3}+\frac{\cot\theta}{r}\,\sigma_{2\,3}\right),\\
&=\gamma^0\,\frac{\partial}{\partial\,t}+\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial\,r}+\frac{1}{r}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}+\frac{\cot\theta}{2\,r}\right)\\
&\quad+\gamma^3\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\phi}.
\end{aligned}\tag{32}$$

رابطه یِ سْپینُر ِ کروی یِ ψ با سْپینُر ِ دِکَرتی یِ ψ' معادله یِ (16) است. پایه یِ $\{(a, e'_a) \mid a\}$ را چنین میگیرم

$$\begin{aligned} e'_0 &= \hat{\boldsymbol{t}}, \\ e'_1 &= \hat{\boldsymbol{x}}, \\ e'_2 &= \hat{\boldsymbol{y}}, \\ e'_3 &= \hat{\boldsymbol{z}}, \end{aligned} \tag{33}$$

که (x, y, z) مختصات ِ دِکَرتی یِ فضا یَند. دیده میشود

$$\begin{aligned} e'_0 &= e_0, \\ e'_1 &= e_1\ \sin\theta\ \cos\phi + e_2\ \cos\theta\ \cos\phi - e_3\ \sin\phi, \\ e'_2 &= e_1\ \sin\theta\ \sin\phi + e_2\ \cos\theta\ \sin\phi + e_3\ \cos\phi, \\ e'_3 &= e_1\ \cos\theta - e_2\ \sin\theta, \end{aligned} \tag{34}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \Lambda^a{}_b &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\ \cos\phi & \sin\theta\ \sin\phi & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta\ \cos\phi & \cos\theta\ \sin\phi & -\sin\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}^a{}_b, \\ &= [\exp(\Xi_3)\ \exp(\Xi_2)\ \exp(\Xi_1)]^a{}_b, \end{aligned} \tag{35}$$

که

$$\begin{aligned} (\Xi_1)^3{}_2 &= -(\Xi_1)^2{}_3 = \frac{\pi}{2}, \\ (\Xi_2)^1{}_3 &= -(\Xi_2)^3{}_1 = \phi, \\ (\Xi_3)^2{}_1 &= -(\Xi_1)^1{}_2 = \frac{\pi}{2} - \theta, \end{aligned} \tag{36}$$

و بقیه یِ مئلفِها یِ Ξ_i ها صفر َند. با تعریف ِ

$$\Sigma_1 = 2\,\mathrm{i}\,\sigma_{2\,3},$$

$$\Sigma_2 = 2\,\mathrm{i}\,\sigma_{3\,1},$$

$$\Sigma_3 = 2\,\mathrm{i}\,\sigma_{1\,2}, \tag{37}$$

دیده میشود

$$S(\Lambda) = \exp\left[-\,\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\Sigma_3\right]\,\exp\left[-\,\mathrm{i}\left(\frac{\phi}{2}\right)\Sigma_2\right]\,\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}\right)\Sigma_1\right]. \tag{38}$$

از جمله دیده میشود S تابع ی تک- مقدار از فضا نیست، و تحت ِ تبدیل ِ $\phi \to (\phi + 2\pi)$ به شکل ِ $S \to (-S)$ عوض میشود، چون

$$\exp(-\mathrm{i}\,\pi\,\Sigma_2) = -1 \quad \Rightarrow \quad \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\phi+2\pi}{2}\right)\Sigma_2\right] = -\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\phi}{2}\right)\Sigma_2\right]. \tag{39}$$

این یعنی اگر سْپینُر ِ دِکَرتی تک- مقدار باشد (که چنین فرض میشود) آنگاه،

$$\phi \to (\phi + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \psi \to (-\psi). \tag{40}$$

3 میدان ِ مرکزی

معادله یِ دیرَک [1] برا یِ یک ذره در یک پتانسیل ِ خارجی با جفتش ِ کمین، به هم ان شکل ِ (1) است، با این تفاوت که باید به جا یِ انرژی گذاشت انرژی منها یِ انرژی یِ پتانسیل:

$$[\gamma^a(\partial_a + \mathrm{i}\,\delta^0_a\,V + \Gamma_a) - \mu]\psi = 0, \tag{41}$$

که V انرژی-یِ-پتانسیل ِ خارجی ست. (معادله یِ متناظر با یک ذره یِ با سْپین ِ $(1/2)$ در یک میدان ِ الکترُمغناطیسی با جفتش ِ کمین میشود

$$[\gamma^a(\partial_a - i\,q\,A_a + \Gamma_a) - \mu]\psi = 0, \tag{42}$$

که q بار ِ ذره و A پتانسیل ِ الکترومغناطیسی است.)

(41) را میشود چنین نوشت.

$$i\,\partial_0\,\psi = H\,\psi, \tag{43}$$

که

$$H=V+\mu\,\beta+\sum_{j\neq 0}\alpha^j[-i(\partial_j+\Gamma_j)],\tag{44}$$

و

$$\begin{aligned}\beta&=\mathrm{i}\,\gamma_0,\\ \alpha^j&=\gamma_0\,\gamma^j=-\mathrm{i}\,\beta\,\gamma^j.\end{aligned}\tag{45}$$

رابطه یِ (44) برا یِ حالت ی نوشته شده که Γ_0 صفر است. از جمله، برا یِ فضا-زمان ِ مینکُوْسکی [10] با مختصات ِ کروی

$$\begin{aligned}H&=V+\mu\,\beta-\mathrm{i}\left[\alpha^1\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+\alpha^2\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cot\theta}{2\,r}\right)+\alpha^3\,\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\ &=V+\mu\,\beta-\mathrm{i}\,\alpha^1\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{\beta\,K}{r}\right),\end{aligned}\tag{46}$$

که

$$\begin{aligned}K&=\beta\left[\alpha^1\,\alpha^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\,\cot\theta\right)+\frac{\alpha^1\,\alpha^3}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\ &=\mathrm{i}\,\beta\left[\Sigma_3\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\,\cot\theta\right)-\frac{\Sigma_2}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\ &=\mathrm{i}\,\beta\,\Sigma_3\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\,\cot\theta+\frac{\mathrm{i}\,\Sigma_1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right).\end{aligned}\tag{47}$$

میگویم میدان ِ خارجی مرکزی ست، اگر V تابع ِ فقط r و t باشد. به سادِگی دیده میشود اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، آنگاه

$$[K,H]=0.\tag{48}$$

اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، سیستم تقارن ِ کروی دارد و مئلفِها یِ تکانه-یِ-زاویئی یِ کل با همیلتنی (H) جابِجا میشوند. یک راه ِ ساده یِ دیدن ِ این (و به-دست-آوردن ِ مئلفِها یِ تکانه-ی-زاویِئی)، شروع با سْپینُرها یِ دِکَرتی ست. همیلتنی یِ متناظر با سْپینُرها یِ دِکَرتی میشود

$$H'=V+\mu\,\beta-\mathrm{i}\left(\alpha^1\,\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^2\,\frac{\partial}{\partial y}+\alpha^3\,\frac{\partial}{\partial z}\right).\tag{49}$$

رابطه یِ H و H'

$$H = S\,H'\,S^{-1}, \tag{50}$$

است، که S هم ان $S(\lambda)$ در (38) است. به سادِگی دیده میشود اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد،

$$[J'_{j\,k}, H'] = 0, \qquad j, k \neq 0, \tag{51}$$

که

$$J'_{j\,k} = -\mathrm{i}(x'_j\,\partial_{k'} - x'_k\,\partial_{j'}) + \mathrm{i}\,\sigma_{j\,k}. \tag{52}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست تکانه-یِ-زاویِئی یِ مداری، و جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست تکانه-یِ-زاویِئی یِ ذاتی (سْپین) است. مئلفِها یِ تکانه-یِ-زاویِئی، بر حسب ِ مختصات ِ کروی میشوند

$$\begin{aligned} J'_{\pm} &= \exp(\pm\mathrm{i}\,\phi)\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{2}(\Sigma_1 \pm \mathrm{i}\,\Sigma_2),\\ J'_3 &= -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{2}\,\Sigma_3, \end{aligned} \tag{53}$$

که

$$\begin{aligned} J'_{\pm} &= J'_{2\,3} \pm \mathrm{i}\,J'_{3\,1},\\ J'_3 &= J'_{1\,2}. \end{aligned} \tag{54}$$

از تعریف ِ

$$J_{j\,k} = S\,J'_{j\,k}\,S^{-1}, \tag{55}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \exp(\pm\mathrm{i}\,\phi)\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\Sigma_1}{2\,\sin\theta}\right),\\ J_3 &= -\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \tag{56}$$

از (51) یا با محاسبه یِ مستقیم، معلوم میشود اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، آنگاه

$$[J_{j\,k}, H] = 0, \qquad j, k \neq 0, \tag{57}$$

یا

$$\begin{aligned} [J_\pm, H] &= 0, \\ [J_3, H] &= 0. \end{aligned} \tag{58}$$

4 جبر ِ گسترش-یافته یِ دوران

اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، (48) و (58) برقرار َند. پس اگر میدان ِ خارجی مرکزی باشد، K و مئلفِها یِ تکانه-یِ-زاویِئی تقارن ِ سیستم َند. به جبر ِ ساخته-شده با اینها جبر ِ گسترش-یافته یِ دوران میگویم. به سادِگی دیده میشود مئلفِها یِ تکانه-یِ-زاویِئی جبر ِ آشنا یِ

$$\begin{aligned} [J_3, J_\pm] &= \pm J_\pm, \\ [J_+, J_-] &= 2\, J_3 \end{aligned} \tag{59}$$

را بر میئاورند. این را یشود با محاسبه یِ مستقیم تحقیق کرد، یا از اینجا نتیجه گرفت که کمیتها یِ پریمدار ِ متناظر رابطِها یِ مشابه ی را بر میئاورند. همچنین دیده میشود

$$[K, J_3] = 0, \tag{60}$$

$$[K, J_\pm] = 0. \tag{61}$$

با تعریف ِ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} &= (J_{1\,2})^2 + (J_{2\,3})^2 + (J_{3\,1})^2, \\ &= (J_3)^2 + \frac{1}{2}\,(J_+\,J_- + J_-\,J_+), \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{i\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\Sigma_1\,\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{4\sin^2\theta}, \end{aligned} \tag{62}$$

معلوم میشود

$$K^2 = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} + \frac{1}{4}. \tag{63}$$

جبر ِ گسترش-یافته یِ دوران، اندک ی بزرگتر از جبر ِ دوران (جبر ِ ساخته-شده از فقط تکانه-یِ-زاویِئی) است: لازم نیست همه یِ توانها یِ K وارد شوند، چون توانها یِ زُج ِ K را میشود بر حسب ِ تکانه-یِ-زاویِئی نوشت.

از (60) نتیجه میشود K و J_3 را میشود همزمان قطری کرد. ویژه-بردارها یِ همزمان ِ J_3 و K را با $\mathcal{Y}_{\kappa\, m}$ نشان میدهم:

$$K\,\mathcal{Y}_{\kappa\, m} = \kappa\,\mathcal{Y}_{\kappa\, m}, \tag{64}$$

$$J_3\,\mathcal{Y}_{\kappa\, m} = m\,\mathcal{Y}_{\kappa\, m}. \tag{65}$$

از (63) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathcal{Y}_{\kappa\, m} = j\,(j+1)\,\mathcal{Y}_{\kappa\, m}, \tag{66}$$

که

$$\kappa = \pm\left(j+\frac{1}{2}\right). \tag{67}$$

از (65) و (66) نتیجه میشود

$$(j-m)\in\mathbb{Z}, \qquad j\geq |m|, \tag{68}$$

که $\mathbb{Z}$ مجموعه یِ عددها یِ صحیح است.

جواب ِ (65) میشود

$$\mathcal{Y}_{\kappa\, m}(\theta,\phi) = \Theta_{\kappa\, m}(\theta)\,\exp(i\,m\,\phi). \tag{69}$$

از (40) نتیجه میشود m نصف ِ یک عدد ِ فرد است (و از این نتیجه میشود j نصف ِ یک عدد ِ فرد ِ مثبت است). برا یِ به-دست-آوردن ِ Θ ها، ابتدا $\Theta_{\kappa\, j}$ را حساب میکنم:

$$J_+\,\mathcal{Y}_{\kappa\, j} = 0, \tag{70}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - j\,\cot\theta + \frac{\Sigma_1}{2\,\sin\theta}\right)\Theta_{\kappa\, j} = 0 \tag{71}$$

این یک معادله‌-یِ-دیفرانسیلِ جداشدنی ست، که جواب‌َش میشود

$$\Theta_{\kappa\,j}(\theta) = \exp\left[j\ln(\sin\theta) + \frac{\Sigma_1}{4}\,\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right]\Upsilon_{j\,u},$$
$$= \sin^j\theta\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_{j\,u}, \tag{72}$$

که $\Upsilon_{j\,u}$ سْپینُر ی مستقل از θ است،

$$u = \frac{\kappa}{|\kappa|}, \tag{73}$$

و

$$\Omega(\theta) = \exp\left[\frac{\Sigma_1}{4}\,\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right],$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \Sigma_1\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]. \tag{74}$$

سرانجام، (64) میشود

$$\mathrm{i}\,\beta\,\Sigma_3\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\,\cot\theta - \frac{j\,\Sigma_1}{\sin\theta}\right)\Theta_{\kappa\,j} = \kappa\,\Theta_{\kappa\,j}, \tag{75}$$

یا با استفاده از (71)،

$$\mathrm{i}\,\beta\,\Sigma_3\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(\cot\theta - \frac{\Sigma_1}{\sin\theta}\right)\Theta_{\kappa\,j} = \kappa\,\Theta_{\kappa\,j}. \tag{76}$$

با استفاده از (67)، (72)، و (73)،

$$\mathrm{i}\,\beta\,\Sigma_3\left(\cot\theta - \frac{\Sigma_1}{\sin\theta}\right)\Omega(\theta)\,\Upsilon_{j\,u} = u\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_{j\,u}. \tag{77}$$

با استفاده از این که $(\beta\,\Sigma_3)$ با Σ_1 پادجابِجا میشود، (77) میشود

$$\mathrm{i}[\Omega(\theta)]^{-1}\left(\cot\theta + \frac{\Sigma_1}{\sin\theta}\right)[\Omega(\theta)]^{-1}\beta\,\Sigma_3\,\Upsilon_{j\,u} = u\,\Upsilon_{j\,u}. \tag{78}$$

با استفاده از

$$\{[\Omega(\theta)]^{-1}\}^2 = \exp\left[-\frac{\Sigma_1}{2}\,\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right],$$
$$= \frac{1}{\sin\theta} - \Sigma_1\cot\theta. \tag{79}$$

رابطه یِ (78) میشود

$$\mathrm{i}\,\Sigma_1\,\beta\,\Sigma_3\,\Upsilon_{j\,u} = u\,\Upsilon_{j\,u}, \tag{80}$$

یا

$$\beta\,\Sigma_2\,\Upsilon_{j\,u} = u\,\Upsilon_{j\,u}. \tag{81}$$

دیده میشود معادله یِ ویژه-مقداری یی که $\Upsilon_{j\,u}$ آن را بر میئاورد، به j بستِگی ندارد. پس میشود نوشت

$$\Upsilon_{j\,u} =: N_j\,\Upsilon_u, \tag{82}$$

که Υ_u سْپینُر ی ثابت، و N_j یک ضریب ِ بهنجارش است. به این ترتیب،

$$\mathcal{Y}_{\kappa\,j}(\theta,\phi) = N_j\,\exp(\mathrm{i}\,j\,\phi)\,\sin^j\theta\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_u. \tag{83}$$

برا یِ به-دست-آوردن ِ بقیه یِ $\mathcal{Y}_{\kappa\,m}$ ها، J_- را بر $\mathcal{Y}_{\kappa\,j}$ اثر میدهم. از (61) نتیجه میشود با این کار ویژه-مقدار ِ K عوض نمیشود. از اینجا،

$$\mathcal{Y}_{\kappa\,m}(\theta,\phi) = N_{j\,m}\,(J_-)^{j-m}\,\exp(\mathrm{i}\,m\,\phi)\,\sin^j\theta\,\Omega(\theta)\,\Upsilon_u, \tag{84}$$

که $N_{j\,m}$ یک ثابت- ِ-بهنجارش ِ دیگر است. اگر خاسته شود طول ِ $\mathcal{Y}_{\kappa\,m}$ با طول ِ $\mathcal{Y}_{\kappa\,j}$ برابر باشد،

$$N_{j\,m} = N_j\,\sqrt{\frac{(j+m)!}{(2\,j)!\,(j-m)!}}. \tag{85}$$

5 معادله یِ شعاعی

معادله یِ (43) با همیلتنی یی به شکل ِ (46) را میگیرم، و فرض میکنم میدان ِ خارجی مرکزی ست. دیده میشود

$$\left[K, H - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\right] = 0.$$
$$\left[J_3, H - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\right] = 0. \tag{86}$$

ψ را بر حسب ِ ویژه- بردارها یِ همزمان ِ K و J_3 بسط میدهم:

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\kappa, m} R_{\kappa\, m}(t, r)\, \mathcal{Y}_{\kappa\, m}(\theta, \phi). \tag{87}$$

$R_{\kappa\, m}$ ها ماتریسها یی یَند که با K و مثلفِها یِ تکانه یِ زاویِئی جابِجا میشوند. از اینجا،

$$\left[\mu\, \beta + V - \mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\, \alpha^1 \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{\kappa\, \beta}{r}\right)\right]\, R_{\kappa\, m}(t, r) = 0. \tag{88}$$

تعریف میکنم

$$\begin{aligned}
\varphi_{\kappa\, m}(t, r) &= \frac{1 + \beta}{2}\, R_{\kappa\, m}(t, r),\\
\chi_{\kappa\, m}(t, r) &= -\mathrm{i}\, \alpha^1\, \frac{1 - \beta}{2}\, R_{\kappa\, m}(t, r).
\end{aligned} \tag{89}$$

$[(1 + \beta)/2]$ و $[-\mathrm{i}\, \alpha^1\, (1 - \beta)/2]$ را از چپ در (88) ضرب میکنم:

$$\begin{pmatrix} \mu + \left(V - \mathrm{i}\, \dfrac{\partial}{\partial t}\right) & \left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\right) - \dfrac{\kappa}{r} \\ -\left(\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\right) - \dfrac{\kappa}{r} & -\mu + \left(V - \mathrm{i}\, \dfrac{\partial}{\partial t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{\kappa\, m} \\ \chi_{\kappa\, m} \end{pmatrix} = 0. \tag{90}$$

از جداسازی یِ معادله یِ دِکَرتی هم هم ین معادله برا یِ بستِگی یِ شعاعی و زمانی به دست میئاید [2].

6 ویژه- مقدارها یِ انرژی یِ یُنها یِ هیدرُژن- گونه، برا یِ حالتها یِ مقید

در معادله یِ (90) میگذارم

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{91}$$

که k ثابت یِ مثبت است. همچنین، تعریف میکنم

$$\begin{aligned}
\varphi_{\kappa\, m}(t, r) &=: f(r)\, \exp(-\mathrm{i}\, E\, t),\\
\chi_{\kappa\, m}(t, r) &=: g(r)\, \exp(-i\, E\, t).
\end{aligned} \tag{92}$$

معادله یِ (90) میشود

$$\begin{pmatrix} \mu - \dfrac{k}{r} - E & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{\kappa}{r} \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \dfrac{1}{r} - \dfrac{\kappa}{r} & -\mu - \dfrac{k}{r} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0. \tag{93}$$

در r ها یِ بزرگ، این معادله میشود

$$\begin{pmatrix} \mu - E & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} & -\mu - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \sim 0. \tag{94}$$

یک جوابِ این معادله

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \exp(v\, r) \tag{95}$$

است، که v ثابت است و F و G تابعها یی کندتغییر اَند. در این صورت (94) میشود

$$\begin{pmatrix} \mu - E & v \\ -v & -\mu - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \sim 0, \tag{96}$$

که نتیجه میدهد

$$-\mu^2 + E^2 + v^2 = 0. \tag{97}$$

اگر $\mu < |E|$، آنگاه v مُهومی میشود، که این متناظر با حالتها یِ نامقید است. برا یِ حالتها یِ مقید، $\mu > |E|$. در این صورت، برا یِ جواب ی که در $r \to \infty$ خُش- رفتار باشد،

$$v = -\sqrt{\mu^2 - E^2}. \tag{98}$$

نهاده یِ (95) را در (93) میگذارم:

$$\begin{pmatrix} \mu - \dfrac{k}{r} - E & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \dfrac{1-\kappa}{r} + v \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \dfrac{1+\kappa}{r} - v & -\mu - \dfrac{k}{r} - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = 0. \tag{99}$$

برا یِ جوابِ این معادله، نهاده ای به شکلِ یک سری یِ توانی میگیرم:

$$\begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{\infty} W_p\, r^{s+p}. \tag{100}$$

از اینجا،

$$\sum_{p=0}^{\infty} C\, W_p\, r^{s+p} - \sum_{p=0}^{\infty} C_p\, W_p\, r^{s+p-1} = 0, \tag{101}$$

که،

$$C = \begin{pmatrix} \mu - E & v \\ -v & -\mu - E \end{pmatrix}. \tag{102}$$

$$C_p = \begin{pmatrix} k & -s-p-1+\kappa \\ s+p+1+\kappa & k \end{pmatrix}. \tag{103}$$

معادله یِ (101) همئرز است با

$$C_0\, W_0 = 0, \tag{104}$$

$$C\, W_{p-1} - C_p\, W_p = 0, \qquad p > 0. \tag{105}$$

از (104) نتیجه میشود

$$k^2 - \kappa^2 + (s+1)^2 = 0. \tag{106}$$

شرط ِ این که تابع- ِ-مُج در $r \to 0$ خُش-رفتار باشد آن است که

$$\mathrm{Re}(s) > -1. \tag{107}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$s = -1 + \sqrt{\kappa^2 - k^2}, \tag{108}$$

$$|\kappa| > k. \tag{109}$$

(شرط ِ اخیر میگوید اگر $k > 1$، آنگاه تکانه یِ زاویه‌ای یِ حالتها یِ مقید باید از حد ِ معین ی بیشتر باشد.)

ماتریس ِ C دُ ویژه- بردار ِ چپ دارد:

$$\xi\, C = 0,$$

$$\eta\, C = -2\, E\, \eta, \tag{110}$$

که

$$\xi = \begin{pmatrix} v & \mu - E \end{pmatrix},$$
$$\eta = \begin{pmatrix} v & \mu + E \end{pmatrix}. \tag{111}$$

ξ را از چپ در (105) ضرب میکنم. نتیجه میشود

$$\xi\, C_p\, W_p = 0, \tag{112}$$

یا

$$W_p = w_p\, \zeta_p, \tag{113}$$

که w_p عدد است و ζ_p چنان است که

$$\xi\, C_p\, \zeta_p = 0. \tag{114}$$

از اینجا، با انتخاب ِ یک ضریب ِ بهنجارش،

$$\zeta_p = \begin{pmatrix} (s+p+1-\kappa)v - k(\mu - E) \\ k\, v + (s+p+1+\kappa)(\mu - E) \end{pmatrix}. \tag{115}$$

η را از چپ در (105) ضرب میکنم. نتیجه میشود

$$-2E\, \eta\, \zeta_{p-1}\, w_{p-1} = \eta\, C_p\, \zeta_p\, w_p, \tag{116}$$

یا

$$w_p = \frac{2[k\, E + (s+p)v]}{\kappa^2 - k^2 - (s+p+1)^2}\, w_{p-1}. \tag{117}$$

اگر w_p ها از جا یی به بعد صفر نشوند، آنگاه

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p\, w_p}{w_{p-1}} = -2\, v, \tag{118}$$

که نتیجه میدهد

$$F(r), G(r) \sim \exp(-2v\, r), \qquad r \to \infty, \tag{119}$$

یا

$$f(r), g(r) \sim \exp(-v\,r), \qquad r \to \infty, \tag{120}$$

که پذیرفتنی نیست، چون v منفی ست. پس w_p ها باید از جا یی به بعد صفر شوند. گیرم n' عدد ِ صحیح ِ نامنفی یی ست که

$$w_{n'} \neq 0.$$
$$w_{n'+1} = 0. \tag{121}$$

در این صورت از (117) نتیجه میشود

$$k\,E + (s + n' + 1)v = 0. \tag{122}$$

از این رابطه نتیجه میشود E مثبت است. با جاگذاری یِ v و s از (98) و (108)،

$$E = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \dfrac{k^2}{(n' + \sqrt{\kappa^2 - k^2})^2}}}. \tag{123}$$

این رابطه را برا یِ یک یُن ِ هیدروژن-گونه با عدد- ِ-اتمی یِ Z مینویسم و $\hbar$ و c را هم وارد میکنم:

$$E_{n\,j} = \mu\,c^2 \left\{ 1 + (Z\,\alpha)^2 \left[n + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\,\alpha)^2} - \left(j + \frac{1}{2}\right) \right]^{-2} \right\}^{-1/2}. \tag{124}$$

α ثابت ِ ساختار- ِ-ریز، و n یک عدد ِ صحیح ِ مثبت (عدد ِ کوانتمی یِ اصلی) است:

$$n := n' + j + \frac{1}{2}. \tag{125}$$

رابطه یِ (124) را میشود در مثلَن [1] یافت.

7 تعداد ِ حالتها

رابطه یِ (123) ویژه-مقدارها یِ متناظر با حالتها یِ مقید را بر حسب ِ دُ عدد ِ کوانتمی یِ κ و n' میدهد که اولی عددها یِ صحیح ِ ناصفر را میگیرد و دومی عددها یِ صحیح ِ نامنفی را، و ظاهرَن این

دُ-عدد مستقل از هم َند. اما در واقع چنین نیست. نکته این است که معادلِها یِ (104) و (105) باید جواب ِ ناصفر داشته باشند. این همئرز است با این که W_0 ناصفر باشد، یا این که ζ_0 ناصفر باشد.

با گذاشتن ِ (122) در (98) نتیجه میشود

$$v = -\frac{k\,\mu}{\sqrt{\kappa^2 + 2\,n'\,(s+1) + n'^2}},$$
$$E = \frac{(s+1+n')\,\mu}{\sqrt{\kappa^2 + 2\,n'\,(s+1) + n'^2}}. \tag{126}$$

البته خُد ِ s هم از (108) به دست میئاید. با گذاشتن ِ اینها در (115) معلوم میشود

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta_0 = k\,\mu\,\left[\frac{\kappa + n'}{\sqrt{\kappa^2 + 2\,n'\,(s+1) + n'^2}} - 1\right]. \tag{127}$$

پس شرط ِ لازم برا یِ صفر-شدن ِ ζ_0 این است که

$$n'\,\kappa = n'\,(s+1). \tag{128}$$

از (108) نتیجه میشود

$$|s+1| < |\kappa|. \tag{129}$$

پس (128) همئرز است با

$$n' = 0. \tag{130}$$

این یعنی اگر n' صفر نباشد، هیچ شرط ِ اضافی یی به دست نمیئاید. با گذاشتن ِ (126) به ازا یِ $n' = 0$ در (115) نتیجه میشود

$$\zeta_0\Big|_{n'=0} \begin{pmatrix} k\,\mu\,\dfrac{\kappa - |\kappa|}{|\kappa|} \\ (|\kappa| - s - 1)\,\mu\,\dfrac{\kappa - |\kappa|}{|\kappa|} + \dfrac{-k^2 + \kappa^2 - (s+1)^2}{\kappa}\,\mu \end{pmatrix}, \tag{131}$$

و با استفاده از (108)،

$$\zeta_0\Big|_{n'=0} = \frac{\kappa - |\kappa|}{|\kappa|}\,\begin{pmatrix} k\,\mu \\ (|\kappa| - s - 1)\,\mu \end{pmatrix}. \tag{132}$$

پس اگر n' صفر باشد، κ باید منفی باشد تا ζ_0 صفر نشود.

از اینجا حالتها یِ مقید با سه عدد ِ کوانتمی یِ n' و κ و m مشخص میشوند که n' صحیح و نامنفی است. اگر n' صفر باشد، κ صحیح و منفی است. اگر n' مثبت باشد، κ صحیح و ناصفر است. m هم

یک نصف ِ یک عدد ِ فرد است، چنان که $|m|$ کوچکتر از $|\kappa|$ است. این را بر حسب ِ عددها یِ کوانتمی یِ n و κ و m هم میشود گفت. n یک عدد ِ صحیح ِ مثبت است. κ یک عدد ِ صحیح ِ ناصفر است که از $(-n)$ ناکوچکتر و از $(n-1)$ نابزرگتر است. m هم یک نصف ِ یک عدد ِ فرد است، چنان که $|m|$ کوچکتر از $|\kappa|$ است. به این ترتیب متناظر با هر زُج ِ مجاز ِ (n,κ)، تعداد ِ مقدارها یِ مجاز ِ m برابر ِ $|2\,\kappa|$ است. پس به ازا یِ هر مقدار ِ n، تعداد ِ زُجها یِ مجاز ِ (κ, m) برابر است با N_n که

$$N_n = \sum_{\kappa=-n}^{n-1} 2\,\kappa, \tag{133}$$

که نتیجه میدهد

$$N_n = 2\,n^2. \tag{134}$$

این هم ان چندگانِگی یِ ترازها در حد ِ غیرِنسبیتی ست.

8 پانوشتها

[1] Dirac

[2] Leonard I. Schiff; “Quantum mechanics”, 3rd edition (McGraw-Hill, 1968) section 53

[3] Lorentz

[4] Planck

[5] Compton

[6] Clifford

[7] Levi-Civita

[8] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics”, (Institute of Physics Publishing, 1995) chapter 7

[9] Theodore Frankel; “The geometry of physics an introduction”, (Cambridge University Press, 1999) chapter 19

[10] Minkowski