X1-023 (2004/04/01)

پراکنش در یک بُعد I

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

کوانتم-مکانیک ِ پراکنش ِ یک ذره یِ مقید به یک بُعد بررسی، و تصویر ِ حالتها یِ مانا با تصویر ِ بسته‌ها یِ مُج مقایسه میشود.

0 مقدمه

در بررسی یِ پراکنش ِ یک-بُعدی در کوانتم-مکانیک، نُعَن ویژه‌حالتها یِ نامقید ِ همیلتنی یِ سیستم را به دست میآورند و با استفاده از آنها معلوم میکنند اگر جریان ی از ذرات با انرژی یِ مشخص بر مرکز ِ پراکنش فرود آید، چه کسر ی از این جریان باز میتابد و چه کسر ی از آن به راه َش ادامه میدهد (مثلَن [1]). در آزمایشها یِ عملیتر ِ پراکنش، نَ جریانها یِ با انرژی یِ مشخص بل که بسته‌ها یی از ذرات وارد میشوند که پهنا یِ کم ی در مکان و تکانه دارند. این بسته‌ها یِ ذرات پراکنده میشوند، چنان که از هر بسته بخش ی باز میتابد و بخش ی به راه َش ادامه میدهد. در چنین-فرایند ی دیگر حالت ِ سیستم مانا نیست: در گذشته یِ دور بسته ای هست که به طرف ِ مرکز ِ پراکنش میرود، و در آینده یِ دور دُ بسته هستند که از مرکز ِ پراکنش دور میشوند؛ یک ی در هم ان جهت ِ قبلی حرکت میکند و دیگر ی باز تابیده است. در چنین-تجربه ای، ضمنَن میشود پرسید چه قدر طول میکشد تا بسته از نقطه ای پیش

از مرکز ِ پراکنش به نقطه ای پس از مرکز ِ پراکنش برسد. این سئال برا یِ حالت‌ها یِ مانا بیمعنی است، چون در حالتها یِ مانا جا یِ ذره بیمعنی است.

اینجا می‌خاهم تُصیف ِ بسته-یِ-مُجی یِ پراکنش در یک بُعد را بررسی کنم. حالت ِ خاص ی از این بحث (پراکنش از پله یِ پتانسیل) به‌اجمال در [1] بررسی شده است.

1 معادله یِ پیوسته‌گی

معادله یِ شْرُدینگر [2] برا یِ ذره ای به جرم ِ m که تحت ِ انرژی-یِ-پتانسیل ِ V حرکت میکند

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\nabla^2+V()\right]\,\psi(t,\boldsymbol{r})=i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

است، که ψ تابع- ِ-مُج ِ ذره، $\boldsymbol{r}$ مکان، و $\hbar$ ثابت ِ پْلانک [3] تقسیم بر $(2\,\pi)$ است.

ψ و ϕ را دُ تابع- ِ-مُج میگیرم که هردُ معادله یِ (1) را بر میآورند. (1) را در ϕ^* ضرب میکنم؛ مزدوج- ِ-مختلط ِ مانسته یِ (1) برا یِ ϕ را هم در ψ ضرب میکنم؛ سپس دُ معادله یِ حاصل را از هم کم میکنم. نتیجه میشود

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\phi^*\,\nabla^2\,\psi+\frac{\hbar^2}{2\,m}\,(\nabla^2\,\phi^*)\,\psi=\mathrm{i}\,\hbar\,\phi^*\,\frac{\partial\psi}{\partial t}+\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\,\psi, \tag{2}$$

یا

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{3}$$

که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}&:=-\frac{\mathrm{i}\,\hbar}{2\,m}\,[\phi^*\,\nabla\psi-(\nabla\phi^*)\,\psi],\\ \rho&:=\phi^*\,\psi.\end{aligned} \tag{4}$$

این، تعمیم ِ معادله یِ پیوسته‌گی برا یِ یک تابع- ِ-مُج $(\phi=\psi)$ است [1]. اگر ψ و ϕ ویژه‌بردارها یِ همیلتنی متناظر با ویژه‌مقدارها یِ به ترتیب E و E' باشند، (3) میشود

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{E-E'}{\mathrm{i}\,\hbar}\,\rho=0. \tag{5}$$

2 حالتها یِ مانا یِ نامقید در یک بُعد

ذره ای به جرمِ m را در نظر میگیرم که مقید است در یک بُعد تحتِ انرژی-یِ-پتانسیلِ V حرکت کند. فرض میکنم $V(x)$ دور از مرکزِ پراکنش ثابت میشود، یعنی مرکزِ پراکنش جایگزیده است:

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x < M \\ \tilde{V}_0, & x > N \end{cases}. \tag{6}$$

در این صورت همه یِ عددها یِ E با $E > V_0, \tilde{V}_0$ ویژه‌مقدارِ همیلتنی یِ متناظر با چنین-سیستم ی اند، و به ازا یِ هر یک از چنین E ها یی، این همیلتنی دُ ویژه‌بردارِ متمایز دارد. رفتارِ تابع-ِ-مُجِ متناظر با این ویژه‌بردارها دور از مرکزِ پراکنش را میشود چنین گرفت.

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \exp(\mathrm{i}\, k\, x) + R(k)\ \exp(-\mathrm{i}\, k\, x), & x < M \\ \tilde{T}(k)\ \exp(\mathrm{i}\, \tilde{k}\, x), & x > N \end{cases}, \tag{7}$$

و

$$\tilde{\psi}_k(x) = \begin{cases} T(k)\ \exp(-\mathrm{i}\, k\, x), & x < M \\ \exp(-\mathrm{i}\, \tilde{k}\, x) + \tilde{R}(k)\ \exp(\, \tilde{k}\, x), & x > N \end{cases}. \tag{8}$$

k و $\tilde{k}$ مثبت ند و

$$\begin{aligned} E &= \frac{\hbar^2\, k^2}{2\, m} + V_0, \\ &= \frac{\hbar^2\, \tilde{k}^2}{2\, m} + \tilde{V}_0. \end{aligned} \tag{9}$$

تابع-ِ مُجِ (7) متناظر با جریان ی از ذرات است که از چپ به مرکزِ پراکنش فرود میآید، و تابع-ِ-مُجِ (8) متناظر با جریان ی از ذرات که از راست به مرکزِ پراکنش فرود میآید.

E ها یی که بینِ V_0 و $\tilde{V}_0$ ند هم ویژه‌مقدارِ همیلتنی یند. اما به ازا یِ این E ها همیلتنی فقط یک ویژه‌بردار دارد. مثلَن اگر $V_0 < E < \tilde{V}_0$، آنگاه

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \exp(\mathrm{i}\, k\, x) + R(k)\ \exp(-\mathrm{i}\, k\, x), & x < M \\ \tilde{\mathcal{T}}(k)\ \exp(-\tilde{\kappa} k\, x), & x > N \end{cases}, \tag{10}$$

که $\tilde{\kappa}$ مثبت است و

$$E = \frac{\hbar^2\, k^2}{2\, m} + V_0, \\ = -\frac{\hbar^2\, \tilde{\kappa}^2}{2\, m} + \tilde{V}_0. \tag{11}$$

از مانسته یِ یک-بُعدی یِ (5) انتگرال می‌گیرم:

$$(E - E')\int_A^B \mathrm{d}x\, \phi^*\, \psi = -\frac{\hbar^2}{2\, m}\left(\phi^*\, \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\phi^*}{\mathrm{d}x}\, \psi\right)_A^B. \tag{12}$$

برا یِ حالت ی که $E > V_0, \tilde{V}_0$، عبارتها یِ

$$\psi = \psi_k + \alpha\, \tilde{\psi}_k, \\ \phi = \psi_k + \beta\, \tilde{\psi}_k \tag{13}$$

(با α و β یِ ثابت) را در (12) میگذارم، و می‌گیرم $A < M$ و $B > N$. نتیجه میشود

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathrm{i}\,\tilde{k}\,[\beta^*\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B) + (\tilde{T}^* + \beta^*\,\tilde{R}^*)\,\exp(-\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B)] \\ & [-\alpha\,\exp(-\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B) + (\tilde{T} + \alpha\,\tilde{R})\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B)] \\ & + \mathrm{i}\,\tilde{k}\,[-\beta^*\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B) + (\tilde{T}^* + \beta^*\,\tilde{R}^*)\,\exp(-\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B)] \\ & [\alpha\,\exp(-\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B) + (\tilde{T} + \alpha\,\tilde{R})\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,B)] \\ & - \mathrm{i}\,k\,[\exp(-\mathrm{i}\,k\,A) + (R^* + \beta^*\,T^*)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,A)] \\ & [\exp(\mathrm{i}\,k\,A) - (R + \alpha\,T)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,A)] \\ & - \mathrm{i}\,k\,[\exp(-\mathrm{i}\,k\,A) - (R^* + \beta^*\,T^*)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,A)] \\ & [\exp(\mathrm{i}\,k\,A) + (R + \alpha\,T)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,A)], \end{aligned} \tag{14}$$

یا

$$\tilde{k}\,[-\beta^*\,\alpha + (\tilde{T}^* + \beta^*\,\tilde{R}^*)\,(\tilde{T} + \alpha\,\tilde{R})] + k\,[-1 + (R^* + \beta^*\,T^*)\,(R + \alpha\,T)] = 0. \tag{15}$$

این معادله به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ α و β درست است. از اینجا،

$$\tilde{k}\,\tilde{T}^*\,\tilde{T}+k\,R^*\,R=k, \tag{16}$$

$$\tilde{k}\,\tilde{R}^*\,\tilde{R}+k\,T^*\,T=\tilde{k}, \tag{17}$$

$$\tilde{k}\,\tilde{R}^*\,\tilde{T}+k\,T^*\,R=0, \tag{18}$$

که میشود آن را نوشت

$$\begin{bmatrix} R^* & \tilde{T}^* \\ T^* & \tilde{R}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \tilde{k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & T \\ \tilde{T} & \tilde{R} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \tilde{k} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

از (16) تا (18) ، ضمنَن نتیجه میشود

$$|\tilde{R}|=|R|, \tag{20}$$

$$\tilde{k}\,R^*\,\tilde{T}+k\,T^*\,\tilde{R}=0. \tag{21}$$

در حالت ی که $V_0<E<\tilde{V}_0$، به جا یِ (14) این به دست میآید

$$\begin{aligned} 0=&-\tilde{\kappa}\,\tilde{\mathcal{T}}^*\,\exp(-\tilde{\kappa}\,B)\,\tilde{\mathcal{T}}\,\exp(\tilde{\kappa}\,B)+\tilde{\kappa}\,\tilde{\mathcal{T}}^*\,\exp(-\tilde{\kappa}\,B)\,\tilde{\mathcal{T}}\,\exp(\tilde{\kappa}\,B)\\ &-\mathrm{i}\,k\,[\exp(-\mathrm{i}\,k\,A)+R^*\,\exp(\mathrm{i}\,k\,A)]\,[\exp(\mathrm{i}\,k\,A)-R\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,A)]\\ &-\mathrm{i}\,k\,[\exp(-\mathrm{i}\,k\,A)-R^*\,\exp(\mathrm{i}\,k\,A)]\,[\exp(\mathrm{i}\,k\,A)+R\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,A)], \end{aligned} \tag{22}$$

که برا یِ رسیدن به آن، در (13) گذاشته ام $\alpha=\beta=0$. به این ترتیب،

$$R^*\,R=1, \qquad V_0<E<\tilde{V}_0. \tag{23}$$

این بار میگیرم

$$\begin{aligned} \psi&=\psi_k,\\ \phi&=\psi_{k'}. \end{aligned} \tag{24}$$

در حالت ی که $E,E'>V_0,\tilde{V}_0$ ، معادله یِ (12) میشود

$$\int_A^B \mathrm{d}x\,\psi^*_{k'}\,\psi_k = \mathrm{pf}\left[\frac{\hbar^2}{2\,m\,(E-E')}\right]\,\Big(-\mathrm{i}\,(\tilde{k}+\tilde{k}')\,\tilde{T}'^*\,\tilde{T}\,\exp[\mathrm{i}\,(\tilde{k}-\tilde{k}')\,B]$$
$$+\,\mathrm{i}\,(k+k')\,\{\exp[\mathrm{i}\,(k-k')\,A]$$
$$-\,R'^*\,R\,\exp[\mathrm{i}\,(k'-k)\,A]\}$$
$$-\,\mathrm{i}\,(k-k')\,\{R\,\exp[-\mathrm{i}\,(k+k')\,A]$$
$$-\,R'^*\,\exp[\mathrm{i}\,(k+k')\,A]\}\Big). \tag{25}$$

با استفاده از

$$\lim_{S\to\pm\infty}\exp(\mathrm{i}\,S\,x)\,\mathrm{pf}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\mathrm{i}\,\pi\delta(x), \tag{26}$$

نتیجه میشود

$$\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\int_A^B \mathrm{d}x\,\psi^*_{k'}\,\psi_k = \pi\,[(1+|R|^2)\,\delta(k-k')+|\tilde{T}|^2\,\delta(\tilde{k}-\tilde{k}')]$$
$$+\,\pi\,(R+R'^*)\,\delta(k+k'). \tag{27}$$

با تعریفِ

$$\langle\phi|\psi\rangle := \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to+\infty}}\int_A^B \mathrm{d}x\,\phi^*\,\psi, \tag{28}$$

نتیجه میشود

$$\langle\psi_{k'}|\psi_k\rangle = 2\,\pi\,\delta(k-k'), \tag{29}$$

که در رسیدن به آن از (16)،

$$\frac{1}{\tilde{k}}\,\delta(\tilde{k}-\tilde{k}') = \frac{1}{k}\,\delta(k-k'), \tag{30}$$

و مثبت-بودنِ k و k' استفاده شده است. مثبت-بودنِ k و k' جمله یِ آخرِ طرفِ راستِ (27) را حذف میکند.

سرانجام، میگیرم

$$\psi = \psi_k,$$
$$\phi = \tilde{\psi}_{k'}. \tag{31}$$

معادله یِ (12) میشود

$$\int_A^B \mathrm{d}x\,\tilde{\psi}_{k'}^*\,\psi_k = \mathrm{pf}\left[\frac{\hbar^2}{2\,m\,(E-E')}\right]\ \{-\mathrm{i}\,(\tilde{k}+\tilde{k}')\,\tilde{R}'^*\,\tilde{T}\ \exp[\mathrm{i}\,(\tilde{k}-\tilde{k}')\,B]$$
$$-\,\mathrm{i}\,(k+k')\,T'^*\,R\ \exp[\mathrm{i}\,(k'-k)\,A]$$
$$+\,\mathrm{i}\,(\tilde{k}'-\tilde{k})\,\tilde{T}\ \exp[\mathrm{i}\,(\tilde{k}+\tilde{k}')\,B]$$
$$+\,\mathrm{i}\,(k-k')\,T'^*\ \exp[\mathrm{i}\,(k+k')\,A]\}, \qquad (32)$$

و از آنجا،

$$\langle\tilde{\psi}_{k'}|\psi_k\rangle = \pi\,[\tilde{R}^*\,\tilde{T}\,\delta(\tilde{k}-\tilde{k}') + T^*\,R\,\delta(k-k')]$$
$$+\,\pi\,[\tilde{T}\,\delta(\tilde{k}+\tilde{k}') + T'^*\,\delta(k+k')]. \qquad (33)$$

با استفاده از (30)، (18)، و این که k، k'، $\tilde{k}$، و $\tilde{k}'$ مثبت ند، نتیجه میشود

$$\langle\tilde{\psi}_{k'}|\psi_k\rangle = 0. \qquad (34)$$

سرانجام (با محاسبه ای کاملَن مشابه با آن چه برا یِ رسیدن به (29) به کار رفت)

$$\langle\tilde{\psi}_{k'}|\tilde{\psi}_k\rangle = 2\,\pi\,\delta(\tilde{k}-\tilde{k}'). \qquad (35)$$

معادلهها یِ (29)، (34)، و (35)، رابطهها یِ طول و تعامد ِ ویژهبردارها یِ نامقید ِ انرژی یند. بهسادهگی میشود نشان داد مثلَن (29) در حالت ِ $V_0 < E < \tilde{V}_0$ یا $V_0 < E' < \tilde{V}_0$ هم درست است. در این حالت (25) تبدیل میشود به

$$\int_A^\infty \mathrm{d}x\,\psi_{k'}^*\,\psi_k = \mathrm{pf}\left[\frac{\hbar^2}{2\,m\,(E-E')}\right]\ \Big(+\,i\,(k+k')\,\{\exp[\mathrm{i}\,(k-k')\,A]$$
$$-\,R'^*\,R\ \exp[\mathrm{i}\,(k'-k)\,A]\}$$
$$-\,\mathrm{i}\,(k-k')\,\{R\ \exp[-\mathrm{i}\,(k+k')\,A]$$
$$-\,R'^*\ \exp[\mathrm{i}\,(k+k')\,A]\}\Big) \qquad (36)$$

و با استفاده از (23)، باز هم (29) نتیجه میشود.

3 پراکنش ِ بسته‌ها ی ِ مُج در یک بُعد

بسته- ی‌ی- مُج ی متناظر با ذره ای به جرم ِ m را در نظر میگیرم که مقید است در یک بُعد حرکت کند و در زمان ِ t_0 در طرف ِ چپ ِ یک مرکز ِ پراکننده (متناظر با انرژی- بی- پتانسیل ِ V) و دور از آن است (یعنی مقدار ِ تابع- ِ- مُج ِ متناظر با آن، فقط به ازا ی ِ $M \ll x$ با V به شکل ِ (6) قابلِل- ِ- ملاحظه است). برا ی ِ بررسی ی ِ تحول ِ این بسته- ی ِ- مُج (ψ)، آن را بر حسب ِ ویژه‌بردارها ی ِ همیلتنی بسط می‌دهم. در این بسط حالتها ی ِ مقید ظاهر نمیشوند، چون تابع- ِ- مُج ِ متناظر با آنها جایگزیده است و جاها یی که ψ (در زمان ِ t_0) قابل- ِ- ملاحظه است صفر میشود، پس ψ بر این حالتها عمود است. به این ترتیب،

$$\psi(t_0,x)=\int\frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\,C(k)\,\psi_k(x)+\int\frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{2\,\pi}\,\tilde{C}(k)\,\tilde{\psi}_k(x), \tag{37}$$

که

$$\begin{aligned}C(k)&=\int\mathrm{d}x\,\psi_k^*(x)\,\psi(t_0,x),\\&=\int\mathrm{d}x\,[\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)+R^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x)]\,\psi(t_0,x),\end{aligned} \tag{38}$$

و

$$\begin{aligned}\tilde{C}(k)&=\int\mathrm{d}x\,\tilde{\psi}_k^*(x)\,\psi(t_0,x),\\&=\begin{cases}\displaystyle\int\mathrm{d}x\,T^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x)\,\psi(t_0,x), & E>V_0,\tilde{V}_0\\ 0, & V_0>E>\tilde{V}_0\end{cases}.\end{aligned} \tag{39}$$

(در رابطه ی ِ (39)، اگر $V_0 > E > \tilde{V}_0$، آنگاه $\tilde{\psi}_k$ در x ها ی ِ طرف ِ چپ ِ مرکز ِ پراکنش و دور از آن صفر است. پس $\tilde{C}(k)$ صفر میشود.)

دو حالت در نظر میگیرم:

i بسته ی ِ مُج در زمان ِ t_0 تکانه ی ِ تقریبَن- مشخص ی دارد و به طرف ِ مرکز ِ پراکننده میرود. این متناظر است با آن که در زمان ِ t_0، طیف ِ تکانه ی ِ بسته- ی ِ- مُج حُل ِ $\hbar\,k_0$ (با $k_0 > 0$) جایگزیده است. در این صورت بسته- ی ِ- مُج در زمان ِ t_0 بر مُجها ی ِ تخت ِ با تکانه ی ِ منفی عمود است، و (38) و

(39) میشوند

$$C(k) = \int \mathrm{d}x\ \exp(-\mathrm{i}\,k\,x)\,\psi(t_0, x),$$
$$\tilde{C}(k) = 0. \tag{40}$$

شکلِ این بسته-یِ-مُج در زمانِ t میشود

$$\psi(t, x) = \int \frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,\psi_k(x)\ \exp(-\mathrm{i}\,k\,y)\ \exp[\,E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0, y). \tag{41}$$

ناحیه یِ انتگرالگیری رو یِ k، فقط شاملِ k ها یِ مثبت است. اما چون $C(k)$ جز در ناحیه یِ باریک یِ حُلِ k_0 صفر است، میشود ناحیه یِ انتگرالگیری رو یِ k را همه یِ k ها گرفت. از اینجا، در حالت ی که $E_0 > V_0, \tilde{V}_0$

$$\psi(t, x) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,[\exp(\mathrm{i}\,k\,x) + R(k)\ \exp(-\mathrm{i}\,k\,x)] \\ \quad \exp(-\mathrm{i}\,k\,y)\ \exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0, y), \quad x < M, \\ \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,\tilde{T}(k)\ \exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,x) \\ \quad \exp(-\mathrm{i}\,k\,y)\ \exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0, y), \quad x > N \end{cases}. \tag{42}$$

تعریف میکنم

$$G_0(t, x; t_0, y) := \int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\ \exp[\mathrm{i}\,k\,(x-y)]\ \exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]. \tag{43}$$

G_0 انتشارگرِ ذره یِ آزاد است [1]. با استفاده از این که ناحیه یِ انتگرال-گیری رو یِ k، عملَن ناحیه ای باریک حُلِ k_0 است، انتگرال-گیری رو یِ k در (42) به ساده‌گی انجام میشود. برا یِ محاسبه یِ انتگرالِ اول در (42)، فازِ R را حُلِ $k = k_0$ بسط می‌دهم:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\,R(k)\ \exp[\mathrm{i}\,k\,(-x-y)]\ \exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)] \\ &= R(k_0)\ \exp(-\mathrm{i}\,a\,k_0) \int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\ \exp[\mathrm{i}\,k\,(a-x-y)]\ \exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)], \\ &= R(k_0)\ \exp(-\mathrm{i}\,a\,k_0)\,G_0(t, a-x; t_0, y), \end{aligned} \tag{44}$$

که a مشتق ِ فاز ِ R نسبت به k است:

$$a := \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}(\ln R)}{\mathrm{d}k}\right]. \tag{45}$$

به هم ین ترتیب، برا یِ محاسبه یِ انتگرال ِ دوم در (42)، مقدار ِ $\tilde{k}$ و فاز ِ $\tilde{T}$ را حُل ِ $k = k_0$ بسط می‌دهم:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\,\tilde{T}(k)\,\exp[\mathrm{i}\,(\tilde{k}\,x - k\,y)]\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\\
&= \tilde{T}(k_0)\,\exp\{\mathrm{i}\,[\tilde{k}_0\,x - k_0\,(\tilde{b}+c\,x)]\}\int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\,\exp[\mathrm{i}\,k\,(\tilde{b}+c\,x-y)]\\
&\quad \exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)],\\
&= \tilde{T}(k_0)\,\exp\{\,[\tilde{k}_0\,x - k_0\,(\tilde{b}+c\,x)]\}\,G_0(t,\tilde{b}+c\,x;t_0,y),
\end{aligned} \tag{46}$$

که

$$\begin{aligned}
\tilde{b} :=& \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}(\ln\tilde{T})}{\mathrm{d}\,k}\right],\\
c :=& \frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{\mathrm{d}k},\\
=& \frac{k}{\tilde{k}}.
\end{aligned} \tag{47}$$

به این ترتیب،

$$\psi(t,x) = \begin{cases} \psi_0(t,x) + R(k_0)\,\exp(-\mathrm{i}\,a\,k_0)\,\psi_0(t,a-x), & x < M\\ \tilde{T}(k_0)\,\exp\{\mathrm{i}\,[\tilde{k}_0\,x - k_0\,(\tilde{b}+c\,x)]\}\,\psi_0(t,\tilde{b}+c\,x), & x > N\end{cases}, \tag{48}$$

که ψ_0 تابع- ِ-مُج ِ متناظر با ذره ای به جرم ِ m است که در انرژی-یِ-پتانسیل ِ ثابت ِ V_0 حرکت میکند و حالت َش در زمان ِ t_0 با ψ تُصیف میشود:

$$\psi_0(t,x) := \int \mathrm{d}y\,G_0(t,x;t_0,y)\,\psi(t_0,y). \tag{49}$$

برا یِ ذره یِ آزاد، تحول ِ مقدار ِ چشمداشتی یِ مکان با زمان به این شکل است.

$$\begin{aligned}
X_0(t) :=& \int \mathrm{d}x\,x\,|\psi_0(t,x)|^2,\\
=& X_0(t_0) + \frac{\hbar\,k_0}{m}\,(t-t_0).
\end{aligned} \tag{50}$$

ψ_0 را بهنجار گرفته ام.) حالا سه-بسته-یِ-مُج ِ آزاد ی که در (48) ظاهر شده اند را در نظر میگیرم. مقدار ِ چشمداشتی یِ مکان ِ متناظر با هر یک از این بسته‌ها، از رابطه ای مشابه با (50) به دست میآید. پهنا یِ هر یک هم برا یِ t ها یِ بزرگ با $\sqrt{t}$ متناسب است. پس برا یِ t ها یِ به حد- ِ-کافی-بزرگ، فاصله یِ مقدار ِ چشمداشتی یِ مکان ِ متناظر با هر یک از این بسته‌ها از ناحیه یِ $[M, N]$ متناسب با t، و پهنا یِ هر یک از این بسته‌ها متناسب با $\sqrt{t}$ است. بنابراین هر یک از این بسته‌ها کاملَن در یک ی از ناحیه‌ها یِ $x < M$ یا $x > N$ است، و این که بسته یِ خاص ی در کدام ناحیه است، از مقدار ِ چشمداشتی یِ مکان ِ متناظر با آن تعیین میشود. با استفاده از (50)،

$$\int \mathrm{d}x\, x\, |\psi_0(t, a - x)|^2 = a - X_0(t_0) - \frac{\hbar\, k_0}{m}\,(t - t_0), \tag{51}$$

$$\int \mathrm{d}x\, x\, |\psi_0(t, \tilde{b} + c\, x)|^2 = \frac{1}{c}\,\left[\frac{\tilde{k}_0\, X_0(t_0)}{k_0} + \frac{\hbar\, \tilde{k}_0}{m}\,(t - t_0) - \frac{\tilde{k}_0\, \tilde{b}}{k_0}\right]. \tag{52}$$

از (50) دیده میشود مقدار ِ چشمداشتی یِ مکان ِ متناظر با جمله یِ اول ِ $\psi(t, x)$ در $x < M$، برا یِ t ها یِ بزرگ در ناحیه یِ $x > N$ است. پس این جمله در t ها یِ بزرگ نقش ی ندارد. به این ترتیب، در t ها یِ بزرگ تابع- ِ-مُج دُ بخش دارد:

$$\psi(t, x) = \begin{cases} \psi_R(t, x) := R(k_0)\, \exp(-\mathrm{i}\, a\, k_0)\, \psi_0(t, a - x), & x < M \\ \psi_T(t, x) := \tilde{T}(k_0)\, \exp\{\mathrm{i}\,[\tilde{k}_0\, x - k_0\,(\tilde{b} + c\, x)]\}\, \psi_0(t, \tilde{b} + c\, x), & x > N \end{cases}, \tag{53}$$

و

$$\int \mathrm{d}x\, |\psi_R(t, x)|^2 = |R(k_0)|^2, \tag{54}$$

$$\int \mathrm{d}x\, |\psi_T(t, x)|^2 = \frac{\tilde{k}_0}{k_0}\, |\tilde{T}(k_0)|^2. \tag{55}$$

اینها احتمال ِ به ترتیب بازتابش ِ ذره یا عبور ِ ذره از مرکز ِ پراکننده اند، که همان ضریبها یِ بازگشت و عبور ند که از تحلیل ِ مستقیم ِ حالتها یِ مانا یِ نامقید به دست میآیند [1]. مقدار ِ چشمداشتی یِ مکان ِ متناظر با هر یک از این دُ-بسته-یِ-مُج ِ تشکیل‌دهنده یِ ψ میشود

$$X_R(t) = a - X_0(t_0) - \frac{\hbar\, k_0}{m}\,(t - t_0), \tag{56}$$

$$X_T(t) = \frac{\tilde{k}_0\, X_0(t_0)}{k_0} + \frac{\hbar\, \tilde{k}_0}{m}\,(t - t_0) - \frac{\tilde{k}_0\, \tilde{b}}{k_0}. \tag{57}$$

رابطه یِ (56) ذره ای را تُصیف میکند که در طرف ِ چپ ِ مرکز ِ پراکننده، با سرعت ِ $(\hbar\, k_0/m)$ به طرف ِ چپ حرکت میکند. (57) هم ذره ای را تُصیف میکند که در طرف ِ راست ِ مرکز ِ پراکننده، با سرعت ِ $(\hbar\, \tilde{k}_0/m)$ به طرف ِ راست حرکت میکند. به این ترتیب، ذره ای که به طرف ِ مرکز ِ پراکننده میرود با احتمال ِ معین ی از آن میگذرد و در این صورت سرعت َش به همان اندازه ای تغییر میکند که از مکانیک ِ کلاسیک انتظار میرود، و با احتمال ِ معین ی از مرکز ِ پراکننده باز میتابد و در این صورت سرعت َش منفی میشود.

در حالت ِ خاص ی که $\tilde{V}_0$ و V_0 برابر باشند، $\tilde{k}_0$ هم با k_0 برابر میشود و (57) میشود

$$\begin{aligned} X_T(t) &= X_0(t) - \tilde{b} \\ &= X_0\left(t - \frac{m\,\tilde{b}}{\hbar\, k_0}\right). \end{aligned} \tag{58}$$

این یعنی ذره ای که از مرکز ِ پراکننده گذشته، به فاصله یِ $\tilde{b}$ یا به اندازه یِ زمان ِ $m\,\tilde{b}/(\hbar\, k_0)$ عقب افتاده.

در حالت ی که $V_0 < E_0 < \tilde{V}_0$،

$$\psi(t,x) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,[\exp(\mathrm{i}\,k\,x) + R(k)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)] \\ \quad \exp(-\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y), \quad x < M, \\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,\tilde{\mathcal{T}}(k)\,\exp(-\tilde{\kappa}\,x) \\ \quad \exp(-\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y), \quad x > N \end{cases}. \tag{59}$$

در این حالت انتگرال ِ اول عوض نمیشود. برا یِ محاسبه یِ انتگرال ِ دوم،

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\,\tilde{\mathcal{T}}(k)\,\exp(-\tilde{\kappa}\,x - \mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)], \\ &= \tilde{\mathcal{T}}(k_0)\,\exp(-\tilde{\kappa}_0\,x - \mathrm{i}\,k_0\,\tilde{b}')\int \frac{\mathrm{d}k}{2\,\pi}\,\exp[\mathrm{i}\,k\,(\tilde{b}'-y)]\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)], \\ &= \tilde{\mathcal{T}}(k_0)\,\exp(-\tilde{\kappa}_0\,x - \mathrm{i}\,k_0\,\tilde{b}')\,G_0(t,\tilde{b}';t_0,y), \end{aligned} \tag{60}$$

که در آن

$$\tilde{b}' := \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{d}(\ln\tilde{\mathcal{T}})}{\mathrm{d}k}\right]. \tag{61}$$

به این ترتیب، مانسته یِ (48) میشود

$$\psi(t,x)=\begin{cases}\psi_0(t,x)+R(k_0)\,\exp(-\mathrm{i}\,a\,k_0)\,\psi_0(t,a-x), & x<M\\ \tilde{\mathcal{T}}(k_0)\,\exp(-\tilde{\kappa}_0\,x-\mathrm{i}\,k_0\,\tilde{b}')\,\psi_0(t,\tilde{b}'), & x>N\end{cases}. \tag{62}$$

مقدار ِ $\psi_0(t,\tilde{b}')$ در t ها یِ بزرگ صفر است. پس در این حالت هم $\psi(t,x)$ به هم ان شکل ِ (53) است، اما با $\psi_T=0$. یعنی مُج ِ عبوری در کار نیست. مُج ِ بازتابیده به هم ان شکل ِ قبل است، و البته همه یِ مُج باز میتابد. این از (23) و (54) نتیجه میشود.

ii بسته-یِ-مُج در زمان ِ t_0 تکانه یِ تقریبَن-مشخص ی دارد و از مرکز ِ پراکننده دور میشود. این متناظر است با آن که در زمان ِ t_0، طیف ِ تکانه یِ بسته-یِ-مُج حُل ِ $(-\hbar\,k_0)$ (با $k_0>0$) جایگزیده است. در این صورت بسته-یِ-مُج در زمان ِ t_0 بر مُجها یِ تخت ِ با تکانه یِ مثبت عمود است، و (38) و (39) میشوند

$$\begin{aligned}C(k)&=\int \mathrm{d}x\,R^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x)\,\psi(t_0,x),\\ \tilde{C}(k)&=\int \mathrm{d}x\,T^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x)\,\psi(t_0,x).\end{aligned} \tag{63}$$

شکل ِ این بسته-یِ-مُج در زمان ِ t میشود

$$\begin{aligned}\psi(t,x)=&\int\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,\psi_k(x)\,R^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y)\\ &+\int\frac{\mathrm{d}\tilde{k}\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,\tilde{\psi}_k(x)\,T^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y).\end{aligned} \tag{64}$$

در حالت ی که $E_0>V_0,\tilde{V}_0$،

$$\begin{aligned}\psi(t,x)=\int\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}&\Big\{[\exp(\mathrm{i}\,k\,x)+R(k)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)]\,R^*(k)\\ &+\frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{\mathrm{d}k}\,T(k)\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)\,T^*(k)\Big\}\\ &\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y),\qquad x<M,\end{aligned} \tag{65}$$

و

$$\psi(t,x)=\int\frac{\mathrm{d}\tilde{k}\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\left\{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\tilde{k}}\,\tilde{T}(k)\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,x)\,R^*(k)\right.$$
$$\left.+\left[\exp(-\mathrm{i}\,\tilde{k}\,x)+\tilde{R}(k)\,\exp(\mathrm{i}\,\tilde{k}\,x)\right]T^*(k)\right\}$$
$$\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y),\qquad x>N. \tag{66}$$

با استفاده از (20) و (17)،

$$|R|^2+\frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{\mathrm{d}k}\,|T|^2=|\tilde{R}|^2+\frac{k}{\tilde{k}}\,|T|^2,$$
$$=1. \tag{67}$$

همچنین، با استفاده از (21)،

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\tilde{k}}\,R^*\,\tilde{T}+T^*\,\tilde{R}=\frac{\tilde{k}}{k}\,R^*\,\tilde{T}+T^*\,\tilde{R},$$
$$=0. \tag{68}$$

با استفاده از (67) و (68)، رابطه‌ها یِ (65) و (66) میشوند

$$\psi(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\left[R^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x)+\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)\right] & \\ \quad\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y), & x<M \\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\tilde{k}\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,T^*(k)\,\exp(-\mathrm{i}\,\tilde{k}\,x) & \\ \quad\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y), & x>N\end{cases}. \tag{69}$$

با استدلال ی مشابه ِ آن چه برا یِ رسیدن به (53) به کار رفت، دیده میشود جمله یِ متناسب با R^* بسته-یِ-مُج یِ را تُصیف میکند که در طرف ِ راست ِ مرکز ِ پراکننده است و به طرف ِ راست میرود، و جمله یِ متناسب با T^* بسته-یِ-مُج ی را که در طرف ِ چپ ِ مرکز ِ پراکننده است و به طرف ِ چپ میرود. پس در $t>t_0$، این دُ-جمله اثر ی در ψ ندارند. از اینجا نتیجه میشود

$$\psi(t,x)=\psi_0(t,x),\qquad t>t_0. \tag{70}$$

در حالت ی که $V_0<E_0<\tilde{V}_0$، انتگرال ِ دوم در طرف ِ راست ِ (64) صفر میشود، چون ناحیه یِ انتگرالگیری $k=k_0$ را در بر ندارد و انتگرالده فقط در ناحیه یِ باریک ی حُل ِ $k=k_0$

غیر-ِ-صفر است. به این ترتیب (64) میشود

$$\psi(t,x)=\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,[R^*(k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x)+\exp(-\mathrm{i}\,k\,x)]\\ \qquad\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y),\quad x<M\\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}k\,\mathrm{d}y}{2\,\pi}\,R^*(k)\,\tilde{\mathcal{T}}(k)\,\exp(-\tilde{\kappa}\,x)\\ \qquad\exp(\mathrm{i}\,k\,y)\,\exp[E\,(t-t_0)/(\mathrm{i}\,\hbar)]\,\psi(t_0,y),\quad x>N\end{cases},\qquad(71)$$

که در آن (23) به کار رفته، و این که انتگرالده جز در ناحیه یِ باریک ی حَل ِ $k=k_0$ صفر است. دیده میشود جمله یِ متناسب با $\mathcal{T}$ یک نمایی یِ کاهنده از x ضرب در $\psi_0(t,\tilde{b}'')$ است، که $\tilde{b}''$ مشتق ِ فاز ِ $\tilde{\mathcal{T}}\,R^*$ نسبت به k است. ψ_0 تابع-ِ-مُج ِ ذره ای را تُصیف میکند که به چپ میرود. پس بخش ی از ψ که متناسب با $\tilde{\mathcal{T}}$ است، در $t>t_0$ صفر است. بخش ِ باقیمانده هم شبیه ِ حالت ِ $E_0>V_0,\tilde{V}_0$ است. پس در حالت ِ $V_0<E_0<\tilde{V}_0$ هم (70) برقرار است.

چنان که انتظار میرفت، در این حالت بسته یِ مُج مثل ِ یک بسته-ی-ِمُج ِ آزاد به حرکت ادامه میدهد و از مرکز ِ پراکننده دور میشود.

4 پانوشتها

[1] Ramamurti Shankar; "Principles of quantum mechanics", 2nd edition (Plenum press, 1994) chapter 5

[2] Scgrödinger

[3] Planck