X1-024 (2004/06/12)

کیهان‌شناسی یِ نیوتنی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تحول ِ کیهان بر اساس ِ معادلات ِ نیوتُن [a] بررسی، و نتیجه با کیهان‌شناسی یِ استاندارد مقایسه می‌شود.

1 فضا یِ هم‌گن و هم‌سان‌گرد

فضا یِ $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. منظور از هم‌سان‌گردی یِ فضا این است که میدان‌ها یِ متناظر با مشاهده‌پذیرها، تحت ِ چرخش حول ِ نقطه یِ خاص ی (مبدأ) ثابت می‌مانند:

$$\mathcal{O}(R)\,T(R^{-1}\,\mathbf{r})=T(\mathbf{r}), \tag{1}$$

که T یک میدان ِ تانسوری، $\mathbf{r}$ بردار ِ مکان نسبت به مبدأ، R یک چرخش ِ دل‌بخواه، و $\mathcal{O}(R)$ نمایش ِ این چرخش متناظر با تانسور ِ T است. برا یِ میدان ِ اسکالر ی مثل ِ f، رابطه یِ (1) می‌شود

$$f(R^{-1}\,\mathbf{r})=f(\mathbf{r}), \tag{2}$$

که نتیجه می‌دهد f تابع ِ فقط اندازه یِ $\mathbf{r}$ است:

$$f = f(r). \tag{3}$$

برا یِ میدان ـِ برداری یی مثل ـِ $\mathbf{F}$، رابطه یِ (1) می‌شود

$$R\,\mathbf{F}(R^{-1}\,\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{4}$$

متناظر با هر بردار ـِ غیرِصفر ـِ $\mathbf{r}_0$، چرخش ـِ R_0 را چرخش ی نابدیهی بگیرید که

$$R_0\,\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0. \tag{5}$$

از (4) نتیجه می‌شود

$$R_0\,\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0), \tag{6}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) \propto \mathbf{r}_0, \tag{7}$$

(چون هر چرخش ـِ نابدیهی فقط یک راستا را دست‌نخورده می‌گذارد). این برا یِ هر $\mathbf{r}_0$ ی درست است. پس،

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r})\,\mathbf{r}, \tag{8}$$

که $\phi(\mathbf{r})$ اسکالر است. با استفاده از (4)، معلوم می‌شود

$$\phi(R^{-1}\,\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}), \tag{9}$$

و از آن‌جا،

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi(r)\,\mathbf{r}. \tag{10}$$

منظور از هم‌گنی یِ جهان این است که میدان‌ها یِ متناظر با مشاهده‌پذیرها، تحت ـِ انتقال ثابت می‌مانند:

$$T(\mathbf{r} - \mathbf{b}) = T(\mathbf{r}), \tag{11}$$

که $\mathbf{b}$ یک بردار ِ ثابت ِ دل‌بخواه است. این یعنی میدان ِ تانسوری یِ T مستقل از مکان است. برا یِ میدان ِ اسکالر ِ f، این شرط (3) را در بر دارد (چون از (11) نتیجه می‌شود میدان ِ اسکالر مستقل از مکان است). برا یِ میدان ِ برداری یِ $\mathbf{F}$، افزودن ِ این شرط به (10) نتیجه می‌دهد $\mathbf{F}$ صفر است. اما بعض ی مشاهده‌پذیرها هستند که خود ِ میدان ِ برداری نیستند، بل که تفاضل ِ میدان ِ برداری در دو نقطه اند. مثلاً سرعت ِ مطلق ِ یک شاره در یک نقطه مشاهده‌پذیر نیست، اما اختلاف ِ سرعت‌ها یِ یک شاره در دو نقطه مشاهده‌پذیر است. فرض کنید تفاضل ِ میدان ِ برداری یِ $\mathbf{F}$ در دو نقطه مشاهده‌پذیر است. شرط ِ هم‌گنی برا یِ چنین‌مشاهده‌پذیر ی می‌شود

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2-\mathbf{b})-\mathbf{F}(\mathbf{r}_1-\mathbf{b})=\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)-\mathbf{F}(\mathbf{r}_1), \tag{12}$$

یا

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=\mathbf{F}(\mathbf{0})+\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)-\mathbf{F}(\mathbf{r}_1). \tag{13}$$

این (هم‌راه با این فرض که $\mathbf{F}$ تابع ی پی‌وسته است) نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}):=\mathbf{F}(\mathbf{r})-\mathbf{F}(\mathbf{0}) \tag{14}$$

یک تابع ِ خطی از $\mathbf{r}$ است. با استدلال ی مشابه ِ آن چه در رسیدن به (10) به کار رفت، از هم‌سان‌گردی نتیجه می‌شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\alpha(r)\,\mathbf{r}, \tag{15}$$

که $\alpha(r)$ اسکالر است. خطی‌بودن ِ $\mathbf{A}$ می‌گوید به ازا یِ هر اسکالر ِ ثابت ِ β،

$$\mathbf{A}(\beta\,\mathbf{r})=\beta\,\mathbf{A}(\mathbf{r}), \tag{16}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\alpha\,\mathbf{r}. \tag{17}$$

α مستقل از مکان است. از این‌جا،

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\alpha\,\mathbf{r}+\mathbf{F}(\mathbf{0}). \tag{18}$$

به این ترتیب، در یک فضا یِ هم‌گن و هم‌سان‌گرد میدان‌ها یِ اسکالر ِ مشاهده‌پذیر مستقل از مکان اند، و میدان‌ها یِ برداری یی که تفاضل ِشان در دو نقطه مشاهده‌پذیر است برابر اند با یک بردار ِ ثابت به اضافه یِ یک عدد ِ ثابت ضرب در بردار ِ مکان.

2 سرعت ِ شاره و شتاب ِ گرانشی در فضا یِ هم‌گن و هم‌سان‌گرد

اگر در مقیاس ِ خیل ی بزرگ‌تر از فاصله‌ها یِ بینِ‌کَه‌کشانی به جهان نگاه کنیم، ماده یِ درون ِ جهان مثل ِ شاره ای به نظر می‌رسد که مثلاً بعض ی از ذره‌ها یَش کَه‌کشان‌ها هستند. (شاره به این خاطر که فاصله یِ این ذره‌ها از هم متغیر است و چیز ی شبیه ِ شبکه یِ بلوری در جهان دیده نمی‌شود.) به این شاره شاره یِ کیهانی می‌گویند. به هر تکه یِ بزرگ‌مقیاس ِ جهان می‌شود یک سرعت ِ متوسط نسبت داد، که در واقع ِ سرعت ِ مرکزِجرم ِ آن تکه است. از این‌جا یک میدان ِ سرعت به دست می آید که سرعت ِ نقاط ِ مادی یِ جهان در مقیاس ِ بزرگ را توصیف می‌کند.

جهان ی هم‌گن و هم‌سان‌گرد را در نظر بگیرید. سرعت ِ نسبی یِ دو نقطه مشاهده‌پذیر است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = H\,\mathbf{r}, \tag{19}$$

که $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ سرعت ِ نقطه یِ $\mathbf{r}$ نسبت به یک مبدئ ِ دل‌بخواه در کیهان، و H مستقل از مکان است. این قانون ِ هابِل [b] است: سرعت ِ نسبی یِ دو نقطه یِ شاره یِ کیهانی، با فاصله یِ این دونقطه از هم متناسب است. به علاوه، این سرعت در راستا یِ خط ِ واصل ِ این دونقطه است:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) = H\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{20}$$

به H پارامتر ِ هابل [b] می‌گوییم. فرض کنید فاصله یِ دو نقطه از شاره یِ کیهانی R است. (در حالت ِ کلی R تابع ِ زمان است.) (19) را می‌شود بر حسب ِ R چنین نوشت.

$$\frac{\dot R}{R} = H. \tag{21}$$

شتاب ِ گرانشی یِ نسبی یِ دو نقطه یِ شاره (تفاضل ِ شدت ِ میدان ِ گرانشی در این دونقطه) مشاهده‌پذیر است. به این ترتیب،

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \gamma\, \mathbf{r}, \tag{22}$$

که $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ شتاب ِ گرانشی یِ نقطه یِ $\mathbf{r}$ نسبت به مبدأ، و γ مستقل از مکان است. دیده می‌شود شتاب ِ نسبی یِ دو نقطه برابر است با یک عدد ِ مستقل از مکان ضرب در مکان ِ نسبی یِ آن دونقطه:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{g}(\mathbf{r}_1) = \gamma\, (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{23}$$

فرض کنید چگالی یِ شاره ای که جهان را پر کرده $\tilde{\rho}$ است. $\tilde{\rho}$ آن چگالی یی است که چشمه یِ میدان ِ گرانشی است. (هم‌گنی نتیجه می‌دهد $\tilde{\rho}$ مستقل از مکان است.) معادلات ِ (نیوتنی یِ) میدان ِ گرانش عبارت اند از

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g} &= -4\pi\, G\, \tilde{\rho}, \\ \nabla \times \mathbf{g} &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

که G ثابت ِ گرانش است. (22) را در (24) می‌گذاریم. معادله یِ دوم ِ (24) اتحاد می‌شود و معادله یِ اول نتیجه می‌دهد

$$\gamma = -\frac{4\pi\, G\, \tilde{\rho}}{3}. \tag{25}$$

توجه کنید که چون چشمه جای‌گزیده نیست، شدت ِ میدان ِ گرانشی را نمی‌شود با رابطه یِ انتگرالی حساب کرد: طرف ِ راست ِ

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \int \mathrm{d}V'\, \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')\, (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{26}$$

خوش‌تعریف نیست.

دوباره دو نقطه در شاره یِ کیهانی را در نظر بگیرید که فاصله یِشان از هم R است. از (21) نتیجه می‌شود

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \dot{H} + H^2. \qquad (27)$$

هم‌چنین، (25) را می‌شود چنین نوشت.

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi\, G\, \tilde{\rho}}{3}. \qquad (28)$$

این معادله را در $(R\,\dot{R})$ ضرب می‌کنیم و از آن انتگرال می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}\,\dot{R}^2 + \frac{4\pi\, G}{3}\int^{R} \mathrm{d}R'\, R'\, \tilde{\rho}(R') = E. \qquad (29)$$

برا ی ِ به‌دست‌آوردن ِ تحول ِ R، باید بسته‌گی ِ $\tilde{\rho}$ به R را بدانیم.

3 معادله ی ِ پی‌وسته‌گی و تحول ِ چگالی

فرض کنید شاره ی ِ کیهانی غیرِنسبیتی است. در این صورت چشمه ی ِ میدان ِ گرانشی چگالی ی ِ جرم است و جرم ِ کل هم پایسته است. کره ای به شعاع ِ R از شاره ی ِ کیهانی را در نظر بگیرید، که هم‌راه ِ شاره ی ِ کیهانی حرکت می‌کند. با گذشت ِ زمان شعاع ِ این کره عوض می‌شود اما کل ِ جرم ِ موجود در آن تغییر نمی‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R^3\,\tilde{\rho}) = 0. \qquad (30)$$

این را در (29) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}\,\dot{R}^2 - \frac{4\pi\, G\, R^2\, \tilde{\rho}}{3} = E. \qquad (31)$$

معادله‌ها ی ِ (29) تا (31) همان معادله‌ها یی اند که با تحلیل ِ نسبیتِ‌عامی ی ِ جهان ی پر از ماده ی ِ غیرِنسبیتی به دست می‌آیند (مثلاً [1]). قاعدتاً هم انتظار می‌رود توصیف ِ نیوتنی ی ِ جهان فقط در حالت ی شبیه ِ توصیف ِ نسبیتِ‌عامی باشد که جهان غیرِنسبیتی است. اما با افزودن ِ چیزها یی به این توصیف ِ نیوتنی، می‌شود معادله ای برا ی ِ تحول ِ جهان در حالت‌ها ی ِ کلی‌تر هم به دست آورد. در حالت ِ کلی که ماده ی ِ سازنده ی ِ جهان لزوماً غیرِنسبیتی نیست، یک چگالی ی ِ دیگر (ρ) به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\,(R^2\,\rho) := -R\,\tilde{\rho}. \qquad (32)$$

دیده می‌شود اگر (30) برقرار باشد، ρ را می‌شود خود ِ $\tilde{\rho}$ گرفت. در حالت ِ کلی، به جا یِ (31) به

$$\frac{1}{2}\,\dot{R}^2 - \frac{4\pi\, G\, R^2\,\rho}{3} = E \tag{33}$$

می‌رسیم. از (32) نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\left(\frac{4\pi}{3}\,R^3\,\rho\right) = -4\pi\,R^2\,\dot{R}\,\left(\frac{\tilde{\rho}-\rho}{3}\right), \tag{34}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(V\,c^2\,\rho) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,p, \tag{35}$$

که V حجم ِ کره ای به شعاع ِ R و c سرعت ِ نور است، و

$$p := \frac{c^2}{3}\,(\tilde{\rho}-\rho). \tag{36}$$

واردکردن ِ c در این‌جا کاملاً دستی می‌نماید. اما با یک تعبیر می‌شود این کار را طبیعی جلوه داد. اگر ρ را چگالی یِ انرژی تقسیم بر c^2 بگیریم، آن وقت (35) چیز ی نیست جز این که تغییر ِ انرژی یِ کره ای به شعاع ِ R به خاطر ِ کار ی است که این کره رو یِ فضا یِ بیرون انجام می‌دهد. اما چرا $(c^2\,\rho)$ چگالی یِ انرژی است؟ هم ρ و هم $\tilde{\rho}$، برا یِ ماده یِ غیرِنسبیتی چگالی یِ جرم اند. در معادله هایِ (25) و (28) که شدت ِ میدان ِ گرانشی را می‌دهند، $\tilde{\rho}$ ظاهر می‌شود؛ در معادله یِ (33) که نوع ی پایسته‌گی یِ انرژی است، ρ ظاهر می‌شود. اما ضمناً اگر (28) را بر حسب ِ ρ و p بنویسیم، می‌رسیم به

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi\,G}{3}\,\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \tag{37}$$

تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{R} := \begin{cases} \sqrt{|2E|}, & E \neq 0 \\ \text{یک مقدار ِ مثبت ِ دل‌بخواه}, & E = 0 \end{cases} \tag{38}$$

و

$$a := \frac{R}{\mathcal{R}}. \tag{39}$$

از این‌جا (33) و (37) می‌شوند

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2-\frac{8\pi\,G\,\rho}{3}+\frac{k}{a^2}=0, \tag{40}$$

$$\frac{\ddot a}{a}+\frac{4\pi\,G}{3}\,\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)=0. \tag{41}$$

این‌ها دقیقاً معادلات ِ نسبیتِ‌عامی یِ تحول ِ کیهان اند، که مثلاً در [1] به دست آمده اند. در این‌جا،

$$k:=-\frac{2\,E}{\mathcal{R}^2}. \tag{42}$$

از این رابطه هم‌راه با (38)، معلوم می‌شود مقدارها یِ ممکن ِ k عبارت اند از اعضا یِ $\{0,1,-1\}$. پارامتر ِ هابِل [b] را هم می‌شود بر حسب ِ a نوشت:

$$H=\frac{\dot a}{a}. \tag{43}$$

با مشاهده یِ جهان در یک لحظه، علی‌الاصول می‌شود H و ρ در آن لحظه را به دست آورد، و از این‌جا و با استفاده از (40) مقدار ِ a در آن لحظه و ثابت ِ k به دست می‌آیند.

4 تحول ِ کیهان

معادله یِ (40)، هم‌راه با رابطه ای بین ِ ρ و p (معادله یِ حالت) برا یِ توصیف ِ دینامیک ِ a کافی است. مشاهده یِ فعلی یِ کیهان نشان می‌دهد فعلاً $\dot a$ مثبت است (یا H مثبت است)، یعنی نقطه‌ها یِ شاره یِ کیهانی دارند از هم دور می‌شوند. از (40) دیده می‌شود اگر ρ مثبت و k نامثبت باشد، آن‌گاه $\dot a$ صفر نمی‌شود (یا H صفر نمی‌شود). در این صورت اگر در یک زمان $\dot a$ مثبت باشد (یعنی نقطه‌ها یِ شاره یِ کیهانی در حال ِ دورشدن از هم باشند) آن‌گاه این وضع هم‌واره ادامه خواهد داشت، یعنی جهان هم‌واره در حال ِ انبساط می‌ماند. شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که k نامثبت باشد، این است که

$$\rho(t)\le\rho_{\rm c}(t), \tag{44}$$

که

$$\rho_{\rm c}(t) := \frac{3}{8\pi\, G}\, H^2(t). \tag{45}$$

(چون k ثابت است، برقراری یِ (44) در یک زمان برا یِ برقراری یِ آن در همه یِ زمان‌ها کافی است.) به $\rho_{\rm c}$ چگالی یِ بحرانی می‌گویند. اگر چگالی یِ شاره یِ کیهانی مثبت و کوچک‌تر از چگالی یِ بحرانی باشد، انبساط ِ کیهان هرگز متوقف نخواهد شد.

اگر چگالی یِ شاره یِ کیهانی بیش از چگالی یِ بحرانی باشد، از (40) به‌تنهایی معلوم نیست انبساط ِ کیهان تا ابد ادامه خواهد یافت یا نَه. نتیجه به این بسته‌گی دارد که $(a^2\rho)$ از حد ِ معین ی بیش‌تر می‌شود یا نَه:

$$\dot a^2 = -k + \frac{8\pi\, G}{3}\,(\rho\, a^2). \tag{46}$$

اگر شاره یِ کیهانی غیرِنسبیتی باشد، آن وقت ρ متناسب با a^{-3} تغییر می‌کند. از این نتیجه می‌شود طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا یک تابع ِ نزولی از a است و حتماً صفر می‌شود. پس انبساط ِ کیهان جا یی متوقف می‌شود. اگر شاره یِ کیهانی نسبیتی باشد (یعنی فشار بر مجذور ِ سرعت ِ نور، با چگالی قابلِ‌مقایسه باشد)، آن‌گاه ρ با a^{-3} متناسب نمی‌شود. یک معادله‌یِ‌حالت ِ ساده برا یِ شاره یِ کیهانی می‌گیریم، که در آن فشار با چگالی متناسب است:

$$\frac{p}{c^2} = \nu\,\rho, \tag{47}$$

که ν ثابت است. از (35) نتیجه می‌شود

$$\rho\, a^{3(1+\nu)} = \text{const.}, \tag{48}$$

و از آن‌جا،

$$\dot a^2 = -k + B\, a^{-1-3\nu}, \tag{49}$$

که B ثابت است. دیده می‌شود اگر $\nu > (-1/3)$، آن‌گاه انبساط ِ کیهان متوقف خواهد شد. در غیر ِ این صورت، جهان تا ابد منبسط می‌شود. ماده ای که فشار َش منفی باشد چیز ِ عجیب ی است، چیز ی که اطراف ِمان نمی‌بینیم، اما واضح نیست که بخش ِ قابلِ‌ملاحظه ای از چگالی یِ شاره یِ کیهانی از چنین‌چیز ی ساخته نشده باشد.

معادله یِ حالت ـِ شاره یِ کیهانی پیچیده‌تر از (47) است. اما به هر حال، با داشتن ـِ معادله یِ حالت تحول ـِ کیهان علی‌الاصول معلوم است، و چیز ی که با این توصیف ـِ نیوتنی به دست می‌آید، همان چیز ی است که با توصیف ـِ نسبیتِ‌عامی به دست می‌آید، هر چند در توصیف ـِ نیوتنی جاها یی لازم است چیزها یی را با دست وارد کنیم، و تعبیر ـِ کمیت‌ها در توصیف ـِ نیوتنی هم ممکن است با تعبیرها یِ نسبیتِ‌عامی فرق کند. مثلاً در توصیف ـِ نسبیتِ‌عامی، $k = 1$ یعنی بخش ـِ فضایی یِ فضازمان خمش ـِ ثابت ـِ مثبت دارد، $k = 0$ یعنی بخش ـِ فضایی یِ فضازمان تخت است، و $k = -1$ یعنی بخش ـِ فضایی یِ فضازمان خمش ـِ ثابت ـِ منفی دارد [1]. چنین‌تعبیرها یی در توصیف ـِ نیوتنی دیده نمی‌شوند. در توصیف ـِ نیوتنی فضا تخت است و مقدار ـِ k علامت ـِ ثابتِ‌حرکت ـِ E را نشان می‌دهد.

5 مرجع

[1] Steven Weinberg; "Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity", (John Wiley & Sons, 1972) chapter 15

6 اسم ـِ خاص

[a] Newton

[b] Hubble