X1-025 (2004/07/23)

قانون‌ها یِ نیوتُن

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

یک نگرش ِ آکسیُمی از قانون‌ها یِ نیوتُن [a] ارائه می‌شود.

0 مقدمه

قانون‌ها یِ سه‌گانه یِ نیوتُن [a] اساس ِ دینامیک ِ غیرِنسبیتی یِ دست‌گاه‌ها یِ متشکل از ذره‌ها یِ با جرم ِ ثابت اند. اما این قانون‌ها، علاوه بر این که گزاره‌ها یی در باره یِ حرکت ِ ذره‌ها یند، تعریف‌ها یی را هم در بر دارند، از جمله تعریف ِ چارچوب ِ لخت، جرم، و نیرو. این قانون‌ها بر اساس ِ فرض ِ خاص ی در باره یِ هم‌زمانی بیان شده اند. ضمناً بعض ی از بیان‌ها یِ این قانون‌ها، شامل ِ گزاره‌ها یی در باره یِ تقارن‌ها یِ خاص ی از فضا هم هستند. هدف این است که گزاره‌ها، تعریف‌ها، و پیش‌فرض‌ها یِ مختلف از هم جدا و به‌طور ِ صریح بیان شوند.

1 قانون ـِ صفر: هم‌زمانی یِ جهانی (مطلق)

وجود ـِ زمان ـِ جهانی (مطلق) یک ی از پیش‌فرض‌ها یِ قانون‌ها یِ نیوتُن [a] است. زمان ـِ مطلق، به‌طور ـِ ساده یعنی کمیت ی (از جنس ـِ زمان، که با وسیله ای مثل ـِ ساعت سنجیده می‌شود) که مقدار ی که آدم‌ها یِ مختلف برا یِ آن به دست می‌آورند یک‌سان است. در دید ـِ اول، وجود ـِ چنین‌کمیت ی بدیهی است. اما توجه کنید که ما زمان را با ساعت می‌سنجیم. ساعت ی که پیش ـِ خود ـِمان است. فرض کنید یک ستاره منفجر شود. زمان ـِ انفجار ـِ این ستاره را A (که نزدیک ـِ آن ستاره نیست) چه‌گونه تعیین می‌کند؟ یک جواب این است که این زمان را زمان ی می‌گیرد که انفجار را می‌بیند، یعنی وقت ی انفجار را دید به ساعت َ‌ش نگاه می‌کند و زمان را یادداشت می‌کند. اما این زمان ـِ رسیدن ـِ نور ـِ انفجار به A است نَه زمان ـِ خود ـِ انفجار. یک راه ـِ دیگر آن است که A از کس ی (B) که در نزدیک ی آن ستاره است زمان ـِ انفجار را بپرسد. اما این هم زمان ی است که ساعت ـِ B نشان می‌دهد نَه زمان ی که ساعت ـِ A نشان می‌دهد. واضح نیست که اگر آن B پیش ـِ A برود و ساعت َ‌ش را با ساعت ـِ A هم‌زمان کند، بعد از A دور شود و دوباره پیش ـِ A برگردد، ساعت َ‌ش هنوز هم با ساعت ـِ A هم‌زمان باشد. فرض ـِ هم‌زمانی یِ مطلق این است که ساعت‌ها یِ خاص ی هستند که اگر یک بار با هم هم‌زمان شوند، هم‌واره هم‌زمان می‌مانند. یعنی اگر B پیش ـِ A بیاید و ساعت َ‌ش را با ساعت ـِ A هم‌زمان کند، بعد از او دور شود و دوباره پیش َ‌ش بر گردد، ساعت َ‌ش با ساعت ـِ A هم‌زمان مانده.

تعریف ـِ Oa: می‌گوییم دو ساعت ـِ A و B هم‌زمان اند، اگر این دوساعت هر گاه کنار ـِ باشند زمان ـِ یک‌سان ی را نشان دهند.

قانون ـِ Ob: نوع ی ساعت هست که هر دوتا از این نوع ساعت را می‌شود هم‌زمان کرد.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود رابطه یِ هم‌زمانی یِ ساعت‌ها یک رابطه یِ هم‌ارزی است. روشن است که هر ساعت با خود َ‌ش هم‌زمان است، اگر A با B هم‌زمان باشد، B هم با A هم‌زمان است. فقط اثبات ـِ این می‌ماند که اگر A با B هم‌زمان باشد و B هم با C

هم‌زمان باشد، آن‌گاه A هم با C هم‌زمان است. برا یِ دیدن ـِ این، فرض کنید C را پیش ـِ A بیاوریم. B را پیش ـِ A و C می‌بریم. چون B با A و C هم‌زمان است، ساعت‌ها یِ A و B زمان ـِ یک‌سان و ساعت‌ها یِ B و C هم زمان ـِ یک‌سان ی نشان می‌دهند. پس ساعت‌ها یِ A و C هم زمان ـِ یک‌سان ی نشان می‌دهند.

چه‌گونه می‌شود چنین‌ساعت ی ساخت؟ اگر علامت ی بود که آناً منتشر می‌شد، ساختن ـِ چنین‌ساعت ی آسان می‌بود. یک ساعت در یک جا یِ دل‌بخواه می‌گذاشتیم (ساعت ـِ مرجع)، و هر کس زمان را چنین می‌سنجید که به آن ساعت ـِ مرجع یک علامت ـِ آنی می‌فرستاد و زمان را می‌پرسید و ساعت با یک علامت ـِ آنی به او پاسخ می‌داد. علامت ی که آناً منتشر می‌شود علامت ی است که اگر A چنین‌چیز ی به B بفرستد و B با همان چیز به او پاسخ دهد، ساعت ـِ A هنگام ـِ دریافت ـِ علامت همان مقدار ی را نشان دهد که هنگام ـِ ارسال نشان می‌داده.

ظاهراً علامت ی نداریم که آناً منتشر شود. پس روش ـِ بالا برا یِ ساختن ـِ ساعت‌ها یِ هم‌زمان کار نمی‌کند. اما اگر از ساعت‌ها یی حرف می‌زنیم که زمان ـِ رفت‌وبرگشت ـِ نور (یا حتا یک علامت ـِ کندتر) بین ـِشان خیل ی کوچک‌تر از دقت ـِ زمان‌سنجی ‌یمان است، آن‌گاه می‌شود این ساعت‌ها را تقریباً هم‌زمان کرد. این همان کار ی است که مثلاً با میزان‌کردن ـِ ساعت ـِمان با ساعت ـِ رادیو می‌کنیم.

فرض کنید همه یِ ساعت‌ها یِ جهان هم‌زمان باشند. در این صورت این که دو روی‌داد (که زمان ـِشان را دو ساعت ـِ احیاناً مختلف می‌سنجند) هم‌زمان اند یا نَه، به ساعت‌ها یی که زمان ـِ این روی‌دادها را می‌سنجند بسته‌گی ندارد. به این ترتیب قانون ـِ Ob را می‌شود به این شکل نوشت.

قانون ـِ $\mathbf{Ob'}$: هم‌زمانی یِ بین ـِ دو روی‌داد مطلق است.

توجه کنید که هم‌زمانی یِ مطلق با زمان ـِ مطلق فرق دارد. فرض کنید همه یِ ساعت‌ها یِ جهان هم‌زمان شده باشند. حالا متناظر با هر ساعت ـِ A ساعت ی مثل ـِ A' در نظر بگیرید که اگر زمان یِ که A نشان می‌دهد t باشد، A' زمان ـِ $f(t)$ را نشان دهد. واضح است که ساعت‌ها یِ پریم‌دار هم با هم هم‌زمان اند، اگر و تنها اگر f برا یِ همه ‌یشان یک‌سان باشد. اگر علاوه بر این f اکیداًصعودی هم باشد، آن‌گاه نَه تنها هم‌زمانی از

دید ـِ ساعت‌ها یِ بی‌پریم و ساعت‌ها یِ پریم‌دار یک‌سان است، بل که تقدم ـِ روی‌دادها هم از دید ـِ ساعت‌ها یِ بی‌پریم و پریم‌دار یک‌سان است. برا یِ منظورها یِ فنی، این را هم می‌افزاییم که f تابع ی هم‌وار است. دیده می‌شود برا یِ تعیین ـِ زمان ـِ یک روی‌داد، بی آن که هم‌زمانی یا تقدم ـِ روی‌دادها به هم بخورد، راه ـِ یک‌تا یی نیست: هر تابع ـِ اکیداً‌صعودی یِ هم‌وار ی به یک زمان می‌انجامد.

2 قانون ـِ یک: چارچوب ـِ لخت

تعداد ی ناظر در نظر بگیرید که هر کدام یک ساعت دارند و متناظر با یک ناحیه اند. به این مجموعه یِ ناظرها یک چارچوب می‌گوییم، اگر ساعت‌ها یِ این ناظرها با هم هم‌زمان باشد، و اشتراک ـِ ناحیه‌ها یِ متناظر با هر دوتا از این ناظرها تهی باشد. در این صورت هر متحرک در هر زمان، در دستِ‌بالا یک ی از ناحیه‌ها یِ متناظر با ناظرها است. می‌گوییم این چارچوب سراسری است، اگر هر متحرک در هر زمان دقیقاً در یک ی از این ناحیه‌ها باشد. توجه کنید که تعداد ـِ ناظرها ممکن است شمارا یا حتا باپایان باشد. از این پس حالت ی را در نظر می‌گیریم که مجموعه یِ این ناظرها یک خمینه بسازد و ناحیه یِ متناظر با هر ناظر یک نقطه در آن خمینه باشد. این در واقع آرمانی‌شده یِ چیز ی است که عملاً رخ می‌دهد:

تعریف ـِ Ia: یک چارچوب ـِ سراسری عبارت است از یک مجموعه ناظر ـِ هم‌زمان، چنان که این مجموعه یک خمینه است و هر متحرک در هر زمان کنار ـِ یک و فقط یک ناظر است.

به این ترتیب، هر ناظر در هر چارچوب ـِ سراسری متناظر است با نقطه ای (مثل ـِ x) در یک خمینه. هر متحرک به این ترتیب مشخص می‌شود که در زمان ـِ t، این متحرک کنار ـِ یک و فقط یک ناظر است. $x(t)$ نقطه یِ متناظر با این ناظر است. به تابع ی که ضابطه اَش $t \mapsto x(t)$ است، خم ـِ حرکت ـِ آن متحرک می‌گوییم. سرعت ـِ متحرک در زمان ـِ t را با $v(t)$ نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

که هم‌ارز است با

$$v^i(t) = \dot{x}^i. \tag{2}$$

در این‌جا x^i ها مختصات ِ x و v^i ها مئلفه‌ها یِ سرعت در پایه یِ مختصاتی اند:

$$v = v^i\, e_i. \tag{3}$$

برا یَ تعریف ِ بردار ِ شتاب (مشتق ِ بردار ِ سرعت نسبت به زمان) باید مشتق ِ بردارها یِ پایه را بدانیم. مشتق ِ بردارها یِ پایه بر حسب ِ هم‌وستارها یِ آفین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma^k{}_{j\,i}\, e_k. \tag{4}$$

با استفاده از این و

$$a := \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

نتیجه می‌شود

$$a^k = \dot{v}^k + \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i. \tag{6}$$

در این رابطه‌ها a شتاب، و Γ هم‌وستار است. مطالب ی در این مورد را می‌شود مثلاً در مرجع ِ [1] یافت.

تعریف ِ Ib: یک چارچوب ِ صلب عبارت است از چارچوب ی که خمینه یِ متناظر با آن مجهز به یک متریک (ِ مستقل از زمان) است.

با متریک ِ یک خمینه می‌شود یک هم‌وستار ِ لِوی‌ـ چیویتا [b] (هم‌وستار ی بدون ِ پیچش و سازگار با متریک) ساخت. مشتق‌گیری از بردارها را با این هم‌وستار انجام می‌دهیم.

روشن است که فاصله یِ هر دوناظر ِ یک چارچوب ِ صلب از هم، مستقل از زمان است. هم‌چنین، با توجه به این که هم‌وستار ِ لِوی‌ـ چیویتا [b] در یک نقطه تابع ِ فقط

خود ـِ متریک و مشتق ـِ آن در آن نقطه است، دیده می‌شود اگر متریک مستقل از زمان باشد هم‌وستار هم مستقل از زمان است.

در خمینه ای که مجهز به هم‌وستار است، می‌شود خم‌ها یِ ژئودزیک تعریف کرد. می‌گویند یک خم ژئودزیک است، اگر در هر نقطه یِ آن خم شتاب موازی با سرعت باشد:

$$\dot{v}^k + \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i = \lambda\, v^k. \tag{7}$$

می‌گویند پارامتر ـِ یک خم ـِ ژئودزیک (زمان) یک پارامتر ـِ آفین است، اگر در هر نقطه یِ آن خم شتاب صفر باشد:

$$\dot{v}^k + \Gamma^k{}_{j\,i}\, v^j\, v^i = 0. \tag{8}$$

قانون ـِ اول ـِ نیوتُن در باره یِ وجود ـِ یک زمان ـِ مطلق و یک چارچوب ـِ صلب است، که خم ـِ متحرک‌ها یِ بی‌برهم‌کنش، نسبت به آن‌ها شکل ـِ ساده ای دارد:

قانون ـِ Ic: یک چارچوب ـِ صلب هست که در آن، خم ـِ همه یِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش ژئودزیک است.

تعریف ـِ Id: به چارچوب ـِ صلب ی که در آن خم ـِ همه یِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش ژئودزیک است، چارچوب ـِ لخت می‌گویند.

قانون ـِ Ie: تابع ی (اکیداًصعودی و هم‌وار) از زمان ـِ چارچوب ـِ لخت هست، که پارامتر ـِ آفین ـِ خم ـِ همه یِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش است.

تعریف ـِ If: به آن تابع ـِ زمان که پارامتر ـِ آفین ـِ خم ـِ همه یِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش در یک چارچوب ـِ لخت است، زمان ـِ مطلق می‌گویند.

متحرک ـِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش، آرمانی‌شده یِ متحرک ی نقطه‌ای یِ است که از همه یِ منابع ـِ مادی دور باشد (با فرض ـِ این که با دورشدن ـِ اجسام از هم، برهم‌کنش ـِ بین ـِشان کم می‌شود). از رابطه یِ (8) به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر t یک پارامتر ـِ آفین

باشد، s هم یک پارامتر ِ آفین است اگر و تنها اگر s یک تابع ِ درجه‌ی‌یک از t باشد. پس به جا یِ یک زمان ِ مطلق در واقع یک خانواده یِ زمان‌ها یِ مطلق داریم. اختلاف ِ اعضا یِ این خانواده با هم در مبدئ ِ زمان و آهنگ ِ گذر ِ زمان است. چیز ی که می‌ماند این است که آیا چارچوب ِ لخت یک‌تا است؟ یک آزادی یِ بدیهی در تغییردادن ِ برچسب ِ ناظرها هست، که البته ژئودزیک‌ها را عوض نمی‌کند. با این تغییرِبرچسب پارامتر ِ آفین ِ خم‌ها یِ ژئودزیک هم عوض نمی‌شود. پرسش ِ جالب‌تر این است که آیا می‌شود برچسب ِ ناظرها یِ یک چارچوب ِ لخت را به شکل ی وابسته‌به‌زمان عوض کرد و چارچوب ِ حاصل هم‌چنان لخت باشد؟ این یعنی یک گروه ناظر ِ دیگر در نظر بگیریم که مکان ِ هر یک (نسبت به یک چارچوب ِ لخت) به زمان بسته‌گی داشته باشد:

$$x = f(t, y), \tag{9}$$

که در آن x مکان ِ یک ناظر در زمان ِ t است، و y برچسب ی است که این ناظر را با یک ناظر ِ چارچوب ِ لخت متناظر می‌کند. مثلاً ممکن است y همان x در زمان ِ $t = 0$ باشد. در این صورت با ناظر ِ متحرک ی سروکار داریم که در $t = 0$ کنار ِ ناظر ِ y بوده. فرض کنید به ازا یِ هر t، بسته‌گی یِ x به y یک وابرریختی باشد. پرسش این است که f چه باشد تا خم‌ها یِ ژئودزیک با پارامتر ِ آفین ِ t را به خم‌ها یِ ژئودزیک با همان پارامتر ِ آفین تبدیل کند؟ در پی‌وست به این پرسش می‌پردازیم.

به‌طور ِ ساده، قانون ِ یک می‌گوید یک چارچوب و یک زمان ِ هست، که نسبت به آن‌ها سرعت ِ همه یِ متحرک‌ها یِ بی‌برهم‌کنش ثابت است. به این چارچوب چارچوب ِ لخت، و به این زمان زمان ِ مطلق می‌گویند.

3 قانون ِ دو: جرم و نیرو

قانون ِ یک بسته‌گی یِ مکان ِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش به زمان را (نسبت به یک چارچوب ِ لخت و یک زمان ِ مطلق) مشخص می‌کند. قانون ِ دو در باره یِ بسته‌گی یِ مکان ِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ (احیاناً برهم‌کنش‌دار) به زمان است:

قانون ِ IIa: شتاب ِ هر متحرک ِ نقطه‌ای در هر زمان تابع ِ مکان و

سرعت ِ آن متحرک در آن زمان، و محیط است.

منظور از محیط برهم‌کنش ی است که به متحرک اثر می‌کند. معنی یِ قانون ِ IIa این است که معادله یِ حرکت ِ یک متحرک ِ نقطه‌ای یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه‌یِ‌دو است.

قانون ِ IIb: فرض کنید دو متحرک ِ نقطه‌ای با مکان و سرعت ِ یک‌سان، در یک زمان در یک محیط هستند. در این صورت شتاب‌ها یِ این دومتحرک نسبت به یک چارچوب ِ لخت و زمان ِ مطلق با هم متناسب اند، و ضریب ِ این تناسب به محیط، زمان، مکان، و سرعت، هیچ‌کدام بسته‌گی ندارد.

یعنی اگر جسم‌ها یِ i و j در زمان ِ t در یک محیط در مکان ِ x با سرعت ِ v باشند، بین ِ شتاب‌ها یشان (به‌ترتیب a_i و a_j) این رابطه برقرار است.

$$a_i = \alpha_{j\,i}\, a_j, \tag{10}$$

که $\alpha_{j\,i}$ عدد ی ثابت است که فقط به خود ِ متحرک‌ها یِ i و j بسته‌گی دارد (و نَه به زمان، مکان، سرعت، یا محیط). به $\alpha_{j\,i}$ در (10) نسبت ِ جرمی یِ متحرک ِ نقطه‌ای یِ 2 به متحرک ِ نقطه‌ای یِ 1 می‌گوییم.

تعریف ِ IIc: یک متحرک ِ نقطه‌ای یِ خاص را متحرک ِ 0 می‌نامیم. m_i (جرم ِ متحرک ِ نقطه‌ای یِ i) را

$$m_i := \alpha_{i\,0} \tag{11}$$

تعریف می‌کنیم.

از تعریف ِ (11) دیده می‌شود جرم ِ متحرک ِ نقطه‌ای یِ 0 برابر ِ واحد است. در واقع جرم ِ این متحرک واحد ِ جرم است. از (10) و (11) دیده می‌شود

$$m_i\, a_i = a_0, \tag{12}$$

که در آن a_i و a_0 (به‌ترتیب) شتاب‌ها یِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ i و 0 در زمان، مکان، سرعت، و محیط ـِ یک‌سان (نسبت به یک چارچوب ـِ لخت و زمان ـِ مطلق) اند. دیده می‌شود طرف ـِ چپ به شاخص ـِ i بسته‌گی ندارد و تابع ـِ فقط زمان، مکان، سرعت، و محیط است.

تعریف ـِ IId: به حاصل‌ضرب ـِ جرم ـِ یک متغیر ـِ نقطه‌ای در شتاب ـِ آن (نسبت به یک چارچوب ـِ لخت و زمان ـِ مطلق) نیرو یِ وارد بر آن متحرک ـِ نقطه‌ای می‌گوییم.

دیده می‌شود نیرو یِ وارد بر یک متغیر ـِ نقطه‌ای تابع ـِ فقط محیط، زمان، مکان، و سرعت است.

از ترکیب ـِ قانون‌ها و تعریف‌ها یِ IIa تا IId، معلوم می‌شود برا یِ تعیین ـِ معادله یِ حرکت ـِ یک متحرک ـِ نقطه‌ای نسبت به یک چارچوب ـِ لخت و زمان ـِ مطلق، باید جرم ـِ آن متحرک و نیرو یِ وارد بر آن را بدانیم. به این ترتیب یک معادله یِ دیفرانسیل ـِ مرتبه‌یِ‌دو به دست می‌آید که با معلوم‌بودن مکان و سرعت ـِ اولیه جواب ی یک‌تا دارد (به شرط ـِ آن که نیرو فرض‌ها یِ قضیه یِ وجودی‌یک‌تایی یِ جواب ـِ معادلات ـِ دیفرانسیل را بر آورَد). هر متحرک ـِ نقطه‌ای را می‌شود در زمان ـِ دل‌بخواه در مکان ی دل‌بخواه و با سرعت ی دل‌بخواه در محیط ی دل‌بخواه گذاشت، اما به آن متحرک نمی‌شود شتاب ـِ دل‌بخواه ی هم داد: شتاب از رو یِ جرم، زمان، مکان، سرعت، و محیط تعین می‌شود. این تعین ـِ نیوتُنی است. متحرک ـِ نقطه‌ای یِ بی‌برهم‌کنش هم حالت ـِ خاص ی از متحرک‌ها یِ نقطه‌ای است، که نیرو یِ وارد بر آن صفر است.

قانون ـِ IIe: مجموعه یِ دو متحرک ـِ نقطه‌ای که مقید اند هم‌واره کنار ـِ هم باشند، یک متحرک ـِ نقطه‌ای یِ دیگر است که جرم ـَ ش برابر است با مجموع ـِ جرم‌ها یِ متحرک‌ها یِ نقطه‌ای یِ اولیه.

قانون ـِ IIf: فرض کنید نیرو یِ وارد بر یک متحرک ـِ نقطه‌ای ناشی از محیط ـِ 1 برابر ـِ F_1، و نیرو یِ وارد بر آن متحرک ـِ نقطه‌ای ناشی از محیط ـِ 2 برابر ـِ F_2

است. در این صورت اگر آن متحرک ِ نقطه‌ای هم‌زمان تحت ِ تئثیر ِ محیط‌ها یِ 1 و 2 باشد، F (نیرو یِ وارد بر آن) برابر با جمع ِ برداری یِ F_1 و F_2 است.

تئثیردادن ِ هم‌زمان ِ دو محیط بر یک متحرک ِ نقطه‌ای به توضیح نیاز دارد. این تئثیر باید چنان باشد که دومحیط به هم اثر نکنند. در این صورت ممکن است این قانون همان‌گویی بنماید: هر وقت F با مجموع ِ F_1 و F_2 برابر نبود، می‌گوییم دومحیط رو یِ هم اثر گذاشته اند. آن چه این قانون را مفید می‌کند این است که اولاً موارد ِ زیاد ی هست که تساوی یِ F با مجموع ِ F_1 و F_2 با تقریب ِ خوب ی برقرار است؛ و موارد ِ زیاد ِ دیگر ی هم هست که هر چند این تساوی برقرار نیست، می‌شود اثر ِ دومحیط بر یک‌دیگر را در نظر گرفت: محیط‌ها یِ 1 و 2 به $1'$ و $2'$ تبدیل می‌شوند، و F برابر است با مجموع ِ F_1' و F_2' (به‌ترتیب نیروها یِ حاصل از محیط‌ها یِ $1'$ و $2'$).

4 قانون ِ سه: عمل و عکس‌العمل

قانون ِ سه‌وم ِ نیوتُن [a] در باره یِ رابطه یِ نیروها یی است که دو متحرک ِ نقطه‌ای به هم وارد می‌کنند.

قانون ِ IIIa: دو متحرک ِ نقطه‌ای یِ 1 و 2 را در یک زمان در نظر بگیرید. اگر بردار ِ نیرو یِ وارد بر 1 ناشی از 2 را، رو یِ ژئودزیک ی که 1 را به 2 وصل می‌کند به‌طور ِ موازی به نقطه یِ 2 منتقل کنیم، بردار ِ حاصل قرینه یِ نیرو یی است که 1 به 2 وارد می‌کند.

به این گزاره شکل ِ ضعیف ِ قانون ِ سه‌وم ِ نیوتُن می‌گویند.

قانون ِ IIIb: دو متحرک ِ نقطه‌ای یِ 1 و 2 را در یک زمان در نظر بگیرید. بردار ِ نیرو یِ وارد بر 1 ناشی از 2، بر ژئودزیک ی که 1 را به 2 وصل می‌کند مماس است.

به ترکیب ِ قانون‌ها یِ IIIa و IIIb شکل ِ قوی یِ قانون ِ سه‌وم ِ نیوتُن [a]

می‌گویند.

به‌طور ِ ساده، شکل ِ ضعیف ِ قانون ِ سه می‌گوید نیروها یی که دو متحرک ِ نقطه‌ای به هم وارد می‌کنند قرینه یِ یک‌دیگر اند، و شکل ِ قوی یِ قانون ِ سه‌وم می‌گوید علاوه بر این این نیروها در راستا یِ خط ِ راست ی (ژئودزیک ی) اند که این دومتحرک را به هم وصل می‌کند.

5 پی‌وست: در باره یِ یک‌تایی یِ چارچوب ِ لخت

قانون ِ اول ِ نیوتُن [a] می‌گوید دستِ‌کم یک چارچوب ِ لخت هست. آیا چارچوب ِ لخت یک‌تا است؟ یک چارچوب ِ دیگر یعنی یک مجموعه ناظر ِ دیگر، که هر کدام در هر لحظه کنار ِ یک و فقط یک ناظر از چارچوب ِ اول اند، و در هر لحظه هر ناظر ِ چارچوب ِ اول هم کنار ِ یک و فقط یک ناظر ِ چارچوب ِ دوم است. این را می‌شود با تابع ِ f به این شکل نشان داد.

$$f : M \times \mathbb{R} \to M. \tag{13}$$

M خمینه یِ فضا و $\mathbb{R}$ مجموعه یِ عددها یِ حقیقی (زمان) است. عبارت ِ

$$x = f(y, t) \tag{14}$$

می‌گوید ناظر ِ y از چارچوب ِ دوم، در زمان ِ t کنار ِ ناظر ِ x از چارچوب ِ اول است. شرایط ی که رو یِ f گذاشتیم، یعنی تحدید ِ f به هر مقدار ِ t وارون‌پذیر است. این شرط را هم اضافه می‌کنیم که f و وارون ِ‌ش هم‌وار باشند. (خود ِ f وارون‌پذیر نیست. منظور از وارون ِ f تابع یِ است از $\mathbb{R} \times M$ به M، چنان که تحدید ِ آن به هر t وارون ِ تحدید ِ f به همان t باشد.) بی‌کاستن از کلیت ِ مسئله، می‌شود فرض کرد

$$\forall y \in M \ : \ f(y, 0) = y. \tag{15}$$

این یعنی برچسب ِ یک ناظر از چارچوب ِ دوم را جا یِ این ناظر (نسبت به چارچوب ِ اول) در زمان ِ 0 می‌گیریم.

سئال این است. f چه باشد تا به اگر γ ژئودزیک ی با پارامتر ِ آفین ِ t باشد، λ با تعریف ِ

$$\lambda(t) := f[\gamma(t), t] \tag{16}$$

هم ژئودزیک ی با پارامتر ـِ آفین ـِ t باشد. البته می‌خواهیم چارچوب ـِ جدید صلب هم باشد، یعنی فاصله یِ دو ناظر ـِ آن از هم تغییر نکند.

شاید مراجعه به مثلاً مرجع ـِ [1]، برا یِ دنبال‌کردن ـِ بحث ی که در ادامه می‌آید مفید باشد. تعریف می‌کنیم

$$\xi(x, t) := \frac{\partial}{\partial t} f(y, t), \tag{17}$$

که در آن x از (14) به دست می‌آید. هم‌چنین، متناظر با هر ژئودزیک ـِ γ با پارامتر ـِ آفین ـِ t تعریف می‌کنیم

$$h(s, t) := f[\gamma(s), t]. \tag{18}$$

از این‌جا داریم

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\lambda(t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right) h(s, t)\right]_{s=t}. \tag{19}$$

اگر λ ژئودزیک ی با پارامتر ـِ آفین ـِ t باشد، طرف ـِ چپ ـِ رابطه یِ بالا صفر می‌شود. پس دنبال ـِ f ها یی می‌گردیم که اگر γ ژئودزیک ی با پارامتر ـِ آفین ـِ t باشد، طرف ـِ راست ـِ رابطه یِ بالا صفر شود. اگر γ ژئودزیک ی با پارامتر ـِ آفین ـِ t باشد، آن‌گاه به ازا یِ هر μ و ν خم ـِ γ' با

$$\gamma'(t) := \gamma(\mu^{-1}\, t - \nu) \tag{20}$$

هم یک ژئودزیک با پارامتر ـِ آفین ـِ t است. پس طرف ـِ راست ـِ (19) باید به ازا یِ h' هم صفر باشد، که h' همان h است، اما با γ' به جا یِ γ. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\forall\mu\ :\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu^{-1}\frac{\partial}{\partial s}\right) h(s, t) = 0, \tag{21}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h(s, t) = 0, \tag{22}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\right)h(s,t)=0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}h(s,t)=0. \tag{24}$$

با تعریف ِ

$$w(s,t):=\frac{\partial}{\partial s}h(s,t), \tag{25}$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}h(s,t)=\partial_w\xi,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\right)h(s,t)=T(\xi,w),$$

$$==0, \tag{26}$$

که T تانسور ِ پیچش ِ متناظر با هم‌وستار است، که صفر است چون هم‌وستار لِوی‌چیویتا [b] است. به این ترتیب، (23) می‌شود

$$\partial_w\xi=0. \tag{27}$$

با فرض ِ این که به ازا یِ هر نقطه یِ خمینه یِ فضا و به ازا یِ هر بردار ی، ژئودزیک ی هست که از آن نقطه می‌گذرد و بردار ِ مماس بر آن در آن نقطه همان بردار است، نتیجه می‌شود (27) به ازا یِ هر بردار ی برقرار است. از جمله،

$$\partial_\xi\xi=0. \tag{28}$$

رابطه یِ (22) می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi+\partial_\xi\xi=0, \tag{29}$$

و با استفاده از (28)،

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi=0. \tag{30}$$

به این ترتیب، (17) می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t} f(y,t) = \xi[f(y,t)], \tag{31}$$

که هم‌راه با شرط ِ

$$f(y,0) = y \tag{32}$$

نتیجه می‌دهد

$$f(y,t) = e^{t\,\xi}(y), \tag{33}$$

که در آن ξ یک میدان ِ برداری رو یِ خمینه یِ فضا است. پس متناظر با f یک میدان ِ برداری (ξ) هست که f شارش ِ آن میدان ِ برداری است.

معادله یِ (27) یعنی مشتق ِ هم‌وردا یِ ξ صفر است، که نتیجه می‌دهد ξ یک میدان ِ برداری یِ کیلینگ [c] است. این نشان می‌دهد تابع ِ $e^{t\,\xi}$ (شارش ِ میدان ِ ξ) ایزومتری است. پس فاصله یِ دو ناظر در چارچوب ِ دوم ثابت است، یعنی چارچوب ِ دوم هم صلب است. به علاوه، ایزومتری یک ژئودزیک با یک پارامتر ِ آفین را به یک ژئودزیک ِ دیگر با همان پارامتر ِ آفین تبدیل می‌کند. این نتیجه می‌دهد (24)، اگر به ازا یِ $t = 0$ برقرار باشد به ازا یِ هر t یِ دیگر ی هم برقرار است.

به‌طور ِ خلاصه، چارچوب ِ جدید ی که با تابع ِ f از رو یِ یک چارچوب ِ لخت تعریف می‌شود لخت (با همان زمان ِ مطلق ِ متناظر با چارچوب ِ قبلی) است، اگر و تنها اگر f شارش ِ (نسبت به پارامتر ِ زمانِ‌مطلق ِ) یک میدان ِ برداری باشد که مشتق ِ هم‌وردا یَش صفر است.

توجه کنید که شرط ِ صفربودن ِ مشتق ِ هم‌وردا یِ یک میدان ِ برداری قوی‌تر از شرط ِ کیلینگ‌بودن ِ آن است. مثلاً اگر خمینه یِ فضا $\mathbb{R}^n$ باشد، بردارها یِ کیلینگ عبارت اند از مولدها یِ انتقال و چرخش. مشتق ِ هم‌وردا یِ مولدها یِ انتقال صفر است، اما مشتق ِ هم‌وردا یِ مولدها یِ چرخش نَه. به همین خاطر چارچوب‌ها یِ چرخان نسبت به یک چارچوب ِ لخت، هر چند صلب اند لخت نیستند. اما چارچوب‌ها یی که با سرعت ِ ثابت نسبت به یک چارچوب ِ لخت حرکت می‌کنند لخت اند. اگر فضا یک کره می‌بود، مشتق ِ هم‌وردا یِ هیچ یک از میدان‌ها یِ برداری یِ کیلینگ [c] (مولدها یِ چرخش) صفر نمی‌شد، و در این صورت چارچوب ِ لخت یک‌تا می‌شد.

6 مرجع

[1] Mikio Nakahara; "Geometry, topology and physics", (Institute of Physics Publishing, 1995) chapters 5 and 7

7 اسم‌ها یِ خاص

[a] Newton

[b] Levi-Civita

[c] Killing