X1-027 (2004/10/23)

چگالی يِ مساحت ـِ یک زیرخمینه

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

چگالی يِ مساحت ـِ یک زیرخمینه توزیع ی است که انتگرال ـِ آن رو يِ هر ناحیه يِ خمینه برابر است با مساحت ـِ اشتراک ـِ زیرخمینه با آن ناحیه. این توزیع بر حسب ـِ تابع‌ها يِ مشخص‌کننده يِ زیرخمینه به دست می‌آید.

1 نمایش ـِ یک زیرخمینه

زیرخمینه يِ m بُعدی يِ $\mathcal{M}$ از خمینه يِ n بُعدی يِ $\mathcal{N}$ را در نظر بگیرید. این زیرخمینه را می‌شود با $(n-m)$ تابع ـِ q^1 تا q^{n-m} از $\mathcal{N}$ به $\mathbb{R}$ مشخص کرد:

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{N} \mid \forall i : q^i(x) = 0\}. \tag{1}$$

رو يِ $\mathcal{M}$ می‌شود موضعاً m مختصه يِ p^1 تا p^m تعریف کرد. مجموعه يِ q^i ها و p^a ها مختصات ی موضعی برا يِ خمینه يِ $\mathcal{N}$ اند. در سراسر ـِ این متن، شاخص‌ها یی که با حرف‌ها يِ ابتدایی يِ لاتین نشان داده می‌شوند مقدارها يِ از 1 تا $(n-m)$، شاخص‌ها یی که با حرف‌ها يِ میانی يِ لاتین نشان داده می‌شوند مقدارها يِ از 1 تا m، و شاخص‌ها یی که با حرف‌ها يِ یونانی نشان داده می‌شوند مقدارها يِ از 1 تا n را می‌گیرند.

2 عنصر ـِ مساحت ـِ زیرخمینه

متریک ـِ زیرخمینه یِ $\mathcal{M}$ را با G نمایش می‌دهیم:

$$G = G_{a\,b}\,\mathrm{d}p^a \otimes \mathrm{d}p^b. \tag{2}$$

در این صورت عنصر ـِ مساحت در این خمینه می‌شود

$$\mathrm{d}S = \sqrt{|\mathfrak{D}_p(G)|}\,\mathrm{d}p^1 \cdots \mathrm{d}p^m \tag{3}$$

(مثلاً [1])، که در آن

$$\mathfrak{D}_p(G) := \sum_{\{b_a\ |\ a\}} [b_1, \dots, b_m]\, G_{1\,b_1} \cdots G_{m\,b_m}, \tag{4}$$

و $[a, \dots, b]$ نسبت به همه یِ شاخص‌ها یَش پادمتقارن است و

$$[1, 2, \dots] := 1. \tag{5}$$

دیده می‌شود $\mathfrak{D}_p(G)$ برابر است با دترمینان ـِ ماتریس ی که مئلفه‌ها یَش همان مئلفه‌ها یِ G اند. ضمناً روشن است که $\mathfrak{D}_p(G)$ تابع ـِ فقط G نیست و به پایه ای که مئلفه‌ها یِ G در آن حساب شده اند هم بسته‌گی دارد.

چون بُعد ـِ خمینه یِ $\mathcal{M}$ لزوماً 2 و بُعد ـِ خمینه یِ $\mathcal{N}$ لزوماً 3 نیست، مساحت در خمینه یِ $\mathcal{M}$ و حجم در خمینه یِ $\mathcal{N}$ لزوماً تابع‌ها یی از مجموعه‌ها یِ 2 بُعدی یا 3 بُعدی نیستند. این اسم‌گذاری‌ها فقط برا یِ ساده‌گی به کار رفته اند.

وقت ی خمینه یِ $\mathcal{M}$ را به عنوان ـِ زیرخمینه ای از $\mathcal{N}$ در نظر می‌گیریم، منظور از متریک ـِ $\mathcal{M}$ متریک ی است که از $\mathcal{N}$ بر آن القا شده است. متریک ـِ $\mathcal{N}$ را با g نشان می‌دهیم:

$$g = g_{\alpha\,\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha \otimes \mathrm{d}x^\beta, \tag{6}$$

که x^α ها مختصات ـِ $\mathcal{N}$ اند. (یک دسته از این مختصات، q^i ها و p^a ها یند.) داریم

$$G_{a\,b} = g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial p^a}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial p^b}. \tag{7}$$

3 چگالی یِ مساحت

چگالی یِ (حجمی یِ) مساحت (ـِ زیرخمینه یِ $\mathcal{M}$) توزیع ی است که انتگرال ـِ (حجمی یِ) آن (در خمینه یِ $\mathcal{N}$) مساحت (در زیرخمینه یِ $\mathcal{M}$) می‌شود. این چگالی را با ρ نشان می‌دهیم. از

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Omega_\mathcal{M}} \mathrm{d}S, \\ &= \int_{\Omega_\mathcal{M}} \sqrt{|\mathfrak{D}_p(G)|}\,\mathrm{d}p^1\cdots\mathrm{d}p^m, \\ &= \int_{\Omega_\mathcal{N}} \sqrt{|\mathfrak{D}_p(G)|}\,\delta(q^1)\cdots\delta(q^{n-m})\,\mathrm{d}p^1\cdots\mathrm{d}p^m\,\mathrm{d}q^1\cdots\mathrm{d}q^{n-m}, \end{aligned} \tag{8}$$

دیده می‌شود

$$\rho\,\mathrm{d}V = \sqrt{|\mathfrak{D}_p(G)|}\,\delta(q^1)\cdots\delta(q^{n-m})\,\mathrm{d}p^1\cdots\mathrm{d}p^m\,\mathrm{d}q^1\cdots\mathrm{d}q^{n-m}. \tag{9}$$

$\mathrm{d}V$ (عنصر ـِ حجم در خمینه یِ $\mathcal{N}$) هم مشابه با (3) به دست می‌آید:

$$\mathrm{d}V = \sqrt{|\mathfrak{D}_{(q,p)}(g)|}\,\mathrm{d}p^1\cdots\mathrm{d}p^m\,\mathrm{d}q^1\cdots\mathrm{d}q^{n-m}. \tag{10}$$

طرف ـِ چپ ـِ عبارت ـِ بالا مستقل از انتخاب ـِ مختصات است. (به همین خاطر به $\mathrm{d}V$ عنصر ـِ ناوردا یِ حجم هم می‌گویند.) به این ترتیب، طرف ـِ راست ـِ عبارت ـِ بالا را می‌شود بر حسب ـِ هر مختصات ی نوشت:

$$\mathrm{d}V = \sqrt{|\mathfrak{D}_x(g)|}\,\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n. \tag{11}$$

از (9) و (10) نتیجه می‌شود

$$\rho = \sqrt{\frac{|\mathfrak{D}_p(G)|}{|\mathfrak{D}_{(q,p)}(g)|}}\,\delta(q^1)\cdots\delta(q^{n-m}). \tag{12}$$

انتظار می‌رود تابع ـِ چگالی یِ مساحت تابع ـِ فقط خود ـِ زیرخمینه یِ $\mathcal{M}$ باشد. اما در طرف ـِ راست ـِ عبارت ـِ بالا مختصه‌ها یِ این خمینه (p^a ها) هم ظاهر شده اند. این مختصه‌ها را می‌شود تغییر داد و انتظار می‌رود با این کار طرف ـِ راست عوض نشود. پس طرف ـِ راست (و در واقع ضریب ـِ دلتاها) باید مستقل از p^a ها باشد.

4 چگالی یِ مساحت، به شکل ِ مستقل از مختصات

ماتریس ِ متناظر با g در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ِ (q,p) را با $\mathrm{mat}_{(q,p)}(g)$ نشان می‌دهیم. زیرماتریس‌ها یِ A، B، C، و D را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{mat}_{(q,p)}(g) =: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{13}$$

داریم

$$\begin{aligned} A_{i\,j} &= g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial q^j}, \\ B_{i\,b} &= g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial p^b}, \\ C_{a\,j} &= g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial p^a}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial q^j}, \\ D_{a\,b} &= g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial p^a}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial p^b}. \end{aligned} \tag{14}$$

دیده می‌شود

$$D_{a\,b} = G_{a\,b}, \tag{15}$$

و از آن‌جا،

$$\mathfrak{D}_p(G) = \det(D). \tag{16}$$

هم‌چنین،

$$\begin{aligned} [\mathfrak{D}_{(q,p)}(g)]^{-1} &= \{\det[\mathrm{mat}_{(q,p)}(g)]\}^{-1}, \\ &= \det\{[\mathrm{mat}_{(q,p)}(g)]^{-1}\}. \end{aligned} \tag{17}$$

زیرماتریس‌ها یِ $\tilde{A}$، $\tilde{B}$، $\tilde{C}$، و $\tilde{D}$ را بر حسب ِ وارون ِ $\mathrm{mat}_{(q,p)}(g)$ تعریف می‌کنیم:

$$[\mathrm{mat}_{(q,p)}(g)]^{-1} =: \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

داریم

$$\tilde{A}^{i\,j} = g^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial q^j}{\partial x^\beta},$$

$$\tilde{B}^{i\,b} = g^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial p^b}{\partial x^\beta},$$

$$\tilde{C}^{a\,j} = g^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial p^a}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial q^j}{\partial x^\beta},$$

$$\tilde{D}^{a\,b} = g^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial p^a}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial p^b}{\partial x^\beta}, \tag{19}$$

که

$$g^{\alpha\,\gamma}\,g_{\beta\,\gamma} = \delta^\alpha_\beta. \tag{20}$$

از تعریف‌ها یِ (13) و (18) نتیجه می‌شود

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

و از آن‌جا،

$$\begin{aligned} C\,\tilde{A} + D\,\tilde{C} &= 0,\\ C\,\tilde{B} + D\,\tilde{D} &= 1. \end{aligned} \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

و از آن‌جا،

$$\det(D)\,\det\{[\mathrm{mat}_{(q,p)}(g)]^{-1}\} = \det(\tilde{A}). \tag{24}$$

به این ترتیب،

$$\frac{|\mathfrak{D}_p(G)|}{|\mathfrak{D}_{(q,p)}(g)|} = \det(\tilde{A}). \tag{25}$$

دیده می‌شود طرف ِ راست صریحاً به p^a ها بسته‌گی ندارد. در واقع برا یِ به‌دست‌آوردن ِ $\tilde{A}$ کافی است متریک ِ خمینه یِ $\mathcal{N}$، و بسته‌گی یِ q^i ها به مختصات را بدانیم. رابطه یِ (12) می‌شود

$$\rho = \sqrt{\det(\tilde{A})}\,\delta(q^1)\cdots\delta(q^{n-m}), \tag{26}$$

که عنصرها یِ ماتریس ِ $\tilde{A}$ از (19) به دست می‌آیند.

5 چند مثال

5.1 چگالی یِ مساحت ِ کره

یک کره یِ دوبعدی به شعاع ِ R در یک فضا یِ سه‌بُعدی، با معادله یِ $q = 0$ مشخص می‌شود، که

$$q := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R. \tag{27}$$

(x, y, z) مختصات ِ دِکَرتی اند. با این مختصات،

$$g_{\alpha\,\beta} = \delta_{\alpha\,\beta}, \tag{28}$$

و از آن‌جا،

$$g^{\alpha\,\beta} = \delta^{\alpha\,\beta}. \tag{29}$$

پس،

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{R}\right)^2,\\ &= 1.\end{aligned} \tag{30}$$

از این‌جا،

$$\rho = \delta(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R). \tag{31}$$

5.2 چگالی یِ مساحت ـِ مخروط ـِ دوار

یک مخروط ـِ دوار با نصفِ‌زاویه‌یِ‌رئس ـِ ξ را می‌شود با معادله یِ $\theta - \xi = 0$ نمایش داد، که (r, θ, φ) مختصات ـِ کروی اند. با این مختصات،

$$\mathrm{mat}_x(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r\,\sin\theta)^2 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

و از آن‌جا،

$$\mathrm{mat}_x(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (r\,\sin\theta)^{-2} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

پس،

$$\tilde{A} = \frac{1}{r^2}. \tag{34}$$

از این‌جا،

$$\rho = \frac{1}{r}\,\delta(\theta - \xi). \tag{35}$$

5.3 چگالی یِ مساحت ـِ مخروط ـِ دل‌بخواه

یک مخروط ـِ دل‌بخواه (که رئس ـِ آن در مبدئ ـِ مختصات است)، با معادله یِ $q = 0$ مشخص می‌شود که مثلاً

$$q := \theta - f(\varphi). \tag{36}$$

از این‌جا،

$$\tilde{A} = \frac{1}{r^2} + \frac{[f'(\varphi)]^2}{r^2\,\sin^2\theta}, \tag{37}$$

(که f' مشتق ـِ f است) و

$$\rho = \frac{1}{r}\sqrt{1 + \frac{[f'(\varphi)]^2}{\sin^2\theta}}\,\delta[\theta - f(\varphi)]. \tag{38}$$

5.4 چگالی یِ طول ـِ یک دایره

یک دایره به شعاع ـِ R در نظر بگیرید که محور ـِ z بر آن عمود است و از مرکز ـِ آن می‌گذرد، و صفحه یِ دایره در $z=\zeta$ است. این دایره با $q^1=q^2=0$ مشخص می‌شود، که

$$q^1 := r - \sqrt{R^2+\zeta^2},$$

$$q^2 := \theta - \cos^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}}\right). \tag{39}$$

از این‌جا،

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

و به این ترتیب،

$$\rho = \frac{1}{r}\,\delta(r-\sqrt{R^2+\zeta^2})\,\delta\left[\theta - \cos^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{R^2+\zeta^2}}\right)\right]. \tag{41}$$

می‌شد همین چگالی را بر حسب ـِ مختصات ـِ استوانه‌ای یِ (ϱ,φ,z) هم به دست آورد. در این مختصات،

$$\mathrm{mat}_x(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{42}$$

و

$$\mathrm{mat}_x(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

هم‌چنین، این دایره را می‌شود در مختصات ـِ استوانه‌ای با $Q^1=Q^2=0$ نمایش داد، که

$$Q^1 := \varrho - R,$$

$$Q^2 := z - \zeta. \tag{44}$$

از این‌جا،

$$\rho = \delta(\varrho - R)\,\delta(z-\zeta). \tag{45}$$

6 مرجع

[1] Mikio Nakahara; "Geometry, topology and physics", (Institute of Physics Publishing, 1995) chapter 7