X1-028 (2005/01/07)

تانسر ِ انرژی- تکانه I

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

سیستم ی شامل ِ میدان و ذره بررسی میشود. نشان داده میشود تانسر ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک ِ متناظر با میدان معادله یِ پیوستِگی را بر نمیئاورَد، اما مجموع ِ این تانسر و تانسر ِ انرژی-تکانه یِ ذرات معادله یِ پیوستِگی را بر میئاورَد.

0 درامد

در تئُری یِ میدانها یِ کلاسیک (مکانیک ِ محیطها یِ پیوسته) دیده میشود اگر برهمکنشها یِ سیستم به یک ی از مختصِها یِ فضا و زمان بستِگی نداشته باشند یک رابطه یِ پیوستِگی بین ِ یک چگالی و یک چگالی-یِ-جریان هست. اگر چگالی-یِ-جریان در مرز ِ فضایی صفر شود (یا فضا مرز نداشته باشد)، انتگرال ِ این چگالی ثابت ِ حرکت میشود. این چگالی و این چگالی-یِ-جریان را از تانسر ی میسازند که به آن تانسر ِ انرژی-تکانه میگویند. این که پیوستِگی یِ این چگالیها و چگالی-یِ-جریانها ناشی از تقارن ِ سیستم تحت ِ انتقالها یِ فضایی یا زمانی ست، اسم-گذاری یِ تانسُر ِ انرژی-تکانه را تُجیه میکند. اما یک کار ِ دیگر هم میشود کرد و آن این است که برهمکنش ِ تعداد ی ذره و میدان در نظر گرفته شود و نشان داده شود در این حالت رابطه-یِ-پیوستِگیها یی هستند که ناشی از تقارن ِ سیستم

تحتِ انتقالِ فضا و زمان ‌َند؛ و در این رابطِها چیز ی که اسم ‌َش را چگالی یِ (یا چگالی-یِ-جریانِ) انرژی یا تکانه یِ میدان میگذارند با چگالی یِ (یا چگالی-یِ-جریانِ) انرژی یا تکانه یِ ذرات جمع میشود. به این ترتیب، انرژی یا تکانه یِ میدان چیز ی ست که اگر به انرژی یا تکانه یِ ذرات اضافه شود، مجموع پایسته میمانَد.

1 سیستمها یِ از مرتبه یِ اول

سیستم ی را بررسی میکنم که متغیر-ِ-دینامیکی یَش یک (یا چند) میدان باشد. میگویم این سیستم از مرتبه یِ اول است (یا تحولِ این سیستم از یک کنشِ مرتبه-یِ-یک میئاید) اگر این شرایط برقرار باشد.

1 یک تابعی یِ کنش (S) از میدان هست، که تحولِ میدان از آن به دست میئاید. معادله یِ حرکت بینِ زمانها یِ t_1 و t_2

$$[\forall\ (t,\boldsymbol{r})\mid t_1<t<t_2]\ :\ \mathcal{E}(t,\boldsymbol{r};\phi)=0, \tag{1}$$

است که

$$\mathcal{E}(t,\boldsymbol{r};\phi):=\frac{\delta\,S}{\delta\,\phi(t,\boldsymbol{r})}, \tag{2}$$

و $\boldsymbol{r}$ مکان است.

2 کنش انتگرالِ یک چگالی-یِ-لَگرانژی ($\mathcal{L}$) بر فضا-زمان است، که این چگالی-یِ-لَگرانژی تابعِ فقط میدان و مشتقها یِ اولِ آن نسبت به فضا و زمان (و احیانَن خُدِ فضا و زمان) است. دقیقتر،

$$[\forall\ (t,\boldsymbol{r})\mid (t,\boldsymbol{r})\in\Omega]\ :\ \frac{\delta\,S}{\delta\,\phi(t,\boldsymbol{r})}=\frac{\delta\,S_\Omega}{\delta\,\phi(t,\boldsymbol{r})}, \tag{3}$$

که

$$S_\Omega(\phi)=\int_\Omega \mathrm{d}^{D+1}r\,\mathcal{L}[r,\phi(r),\partial\phi(r)]. \tag{4}$$

r مکان و زمان، D بُعدِ فضا، و Ω یک ناحیه یِ باز در فضا-زمان است.

در کلِ این متن، سیستمها یی که بررسی میشوند از مرتبه یِ یک ‌َند.

دیده میشود برا یِ سیستم ی که با چگالی-یِ-لَگرانژی یِ $\mathcal{L}$ تُصیف میشود،

$$\mathcal{E}(r;\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right), \tag{5}$$

که در آن r^0 هم ان t است. در کل ِ این متن، شاخصها یِ یونانی مقدارها یِ 0 تا D و شاخصها یِ لاتین مقدارها یِ 1 تا D را میگیرند. ∂_μ مشتق نسبت به r^μ با در-نظر-گرفتن ِ بستِگی یِ ϕ و مشتقها یِ آن به r^μ است:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \left\{ F[r, \phi(r), \phi_{,\nu}(r)] \right\} := &\, \partial_\mu^\phi \left\{ F[r, \phi(r), \phi_{,\nu}(r)] \right\} \\ &+ \frac{\partial F}{\partial \phi(r)}\, \partial_\mu \phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_{,\nu}(r)}\, \partial_\mu(\phi_{,\nu}),\end{aligned} \tag{6}$$

و

$$\begin{aligned}F[r+a, \phi(r), \phi_{,\nu}(r)] - F[r, \phi(r), \phi_{,\nu}(r)] =: &\, a^\mu\, \partial_\mu^\phi \{F[r, \phi(r), \phi_{,\nu}(r)]\} \\ &+ o(a).\end{aligned} \tag{7}$$

همچنین،

$$\phi_{,\nu} := \partial_\nu \phi. \tag{8}$$

Θ (تانسر-ِ-انرژی-تکانه-یِ کانُنیک) را چنین تعریف میکنم.

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\, \phi_{,\nu} - \delta^\mu{}_\nu\, \mathcal{L}. \tag{9}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\partial_\mu\, \Theta^\mu{}_\nu &= \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \right] \phi_{,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\, \partial_\mu(\phi_{,\nu}) - \partial_\nu \mathcal{L}, \\ &= -[\mathcal{E}(r;\phi)]\phi_{,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\, \phi_{,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\, \partial_\mu(\phi_{,\nu}) - \partial_\nu \mathcal{L}, \\ &= -[\mathcal{E}(r;\phi)]\phi_{,\nu} - \partial_\nu^\phi \mathcal{L}.\end{aligned} \tag{10}$$

از اینجا دیده میشود اگر چگالی-یِ-لَگرانژی صریحَن به r^ν وابسته نباشد، رو یِ لاک (یعنی اگر معادله یِ حرکت برقرار باشد) طرف ِ چپ صفر است:

$$\partial_\nu^\phi \mathcal{L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_\mu\, \Theta^\mu{}_\nu \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{11}$$

اینها را میشود در مثلَن فصل ِ 13 از [1] یافت. دیده میشود تقارن تحت ِ انتقال در یک ی از راستاها یِ فضا-زمان به یک معادله یِ پیوستِگی مینجامد. این است که اسم ِ تانسُر ِ انرژی-تکانه را تُجیه میکند.

2 انرژی و تکانه یِ ذرات

سیستم ی متشکل از یک مجموعه ذره را در نظر میگیرم که با لَگرانژی یِ L تُصیف میشود، که تابع ِ مکانها و سرعتها یِ ذرِها (و احیانَن زمان) است. معادله یِ حرکت برا یِ این سیستم

$$\mathcal{E}_{a\,i}(t,\boldsymbol{q})=0 \tag{12}$$

است، که

$$\mathcal{E}_{a\,i}(t,\boldsymbol{q}):=\frac{\delta S_{(t_1,t_2)}}{\delta q_a^i(t)}, \tag{13}$$

و

$$S_{(t_1,t_2)}=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\;L[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]. \tag{14}$$

$\boldsymbol{q}_a$ مکان ِ ذره یِ a و $\boldsymbol{q}$ نماینده یِ مکان ِ همه یِ ذرِها است، و $t_1<t<t_2$. دیده میشود

$$\mathcal{E}_{a\,i}(t,\boldsymbol{q})=\frac{\partial L}{\partial q_a^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^i}\right). \tag{15}$$

از تعریف ِ معادله یِ حرکت نتیجه میشود

$$\dot{p}_{a\,i}=-\mathcal{E}_{a\,i}+\frac{\partial L}{\partial q_a^i}, \tag{16}$$

که

$$p_{a\,i}:=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^i}. \tag{17}$$

همچنین با تعریف ِ

$$p_0:=L-\sum_a p_{a\,i}\,\dot{q}_a^i, \tag{18}$$

دیده میشود

$$\dot{p}_0=\sum_a \mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}_a^i+\partial_0^q L, \tag{19}$$

که ∂^q یعنی مشتقگیری بدون ِ در-نظر-گرفتن ِ بستِگی یِ $\boldsymbol{q}$ و $\dot{\boldsymbol{q}}$ به زمان. (رُشن است که p_0 منفی یِ همیلتنی یِ سیستم است.) اینها را میشود در مثلَن فصل ِ 3 از [1] یافت.

اگر قرار باشد چیز ی مثل ِ چگالی یِ تکانه و چگالی-یِ-جریان ِ تکانه تعریف شود، طبیعی ست برا یِ هر ذره چگالی یِ تکانه برابر با تکانه ضرب در یک دلتا یِ دیرَک [2] (در محل ِ ذره) تعریف

شود، و چگالی-یِ-جریان ِ تکانه برابر با چگالی یِ تکانه ضرب در سرعت ِ ذره:

$$\rho_i = \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, p_{a\,i},$$
$$\boldsymbol{J}_i := \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, p_{a\,i}\, \dot{\boldsymbol{q}}_a(t). \tag{20}$$

این دُ-رابطه را میشود در

$$J_i^\mu = \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, p_{a\,i}\, \dot{q}_a^\mu(t), \tag{21}$$

ترکیب کرد، که در آن تعریف شده

$$J_i^0 := \rho_i,$$
$$q_a^0 := t. \tag{22}$$

با توجه به رابطه یِ

$$\partial_\mu \{\delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \dot{q}_a^\mu(t)\} = 0, \tag{23}$$

دیده میشود اگر Q_a تابع ِ فقط t باشد،

$$\partial_\mu \left\{\sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, Q_a(t)\, \dot{q}_a^\mu(t)\right\} = \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \dot{Q}_a(t). \tag{24}$$

پس

$$\partial_\mu\, J_i^\mu = \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \dot{p}_{a\,i}(t),$$
$$= \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)] \left(-\mathcal{E}_{a\,i} + \frac{\partial L}{\partial q_a^i}\right). \tag{25}$$

دیده میشود این چگالی و چگالی-یِ-جریان معادله یِ پیوستِگی را بر نمیئاورند، مگر این که مشتق ِ L نسبت به q^i ِ همه یِ ذرِها صفر باشد. البته

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a p_{a\,i}\right) \overset{\text{ns}}{=} \sum_a \frac{\partial L}{\partial q_a^i}, \tag{26}$$

که یعنی اگر طرف ِ راست صفر شود (سیستم تحت ِ انتقال ِ همزمان ِ همه یِ ذرِها در راستا یِ i تقارن داشته باشد) انتگرال ِ چگالی یِ مئلفه یِ i ِ تکانه ثابت است، هر چند J_i^μ ها رابطه یِ پیوستِگی را بر نمیئاورند.

در مُرد ِ مثلفه یِ صفر ِ تکانه، وضع از این هم بدتر است، چون راه ِ واضح ی برا یِ تجزیه یِ p_0 به شکل ِ مجموع ی از $p_{a\,0}$ ها دیده نمیشود. p_0 ممکن است جملِها یی داشته باشد که شامل ِ مکان و سرعت ِ چند ذره اند، یعنی ناشی از برهمکنش ِ ذرِها با هم َند. اگر L را بشود به شکل ِ مجموع ی از L_a ها نوشت، که به ازا یِ هر a کمیت ِ L_a شامل ِ فقط مکان و سرعت ِ ذره یِ a باشد، آن وقت میشود تعریف کرد

$$p_{a\,0} := L_a - p_{a\,i}\,\dot{q}_a^i, \tag{27}$$

و در این حالت J_0^μ هم مثل ِ (21) اما با $p_{a\,0}$ به جا یِ $p_{a\,i}$ تعریف میشود. در نتیجه،

$$J_\nu^\mu := \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,p_{a\,\nu}\,\dot{q}_a^\mu(t). \tag{28}$$

مانسته یِ (25) هم میشود

$$\partial_\mu\,J_0^\mu = \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,(\mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}_a^i + \partial_0^q L_a). \tag{29}$$

در این حالت هم چگالی یِ p_0 و چگالی-یِ-جریان ِ p_0 رابطه یِ پیوستِگی را بر نمیئاورند، مگر مشتق ِ صریح ِ همه یِ L_a ها نسبت به زمان صفر باشد. سرانجام، مانسته یِ (26) میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a p_{a\,0}\right) \overset{\mathrm{ns}}{=} \sum_a \partial_0^q L, \tag{30}$$

که یعنی اگر طرف ِ راست صفر شود (سیستم تحت ِ انتقال ِ زمان تقارن داشته باشد) انتگرال ِ چگالی یِ مثلفه یِ 0 ِ تکانه ثابت است، هر چند J_0^μ ها رابطه یِ پیوستِگی را بر نمیئاورند.

رابطه یِ پیوستِگی نشانه یِ نوع ی پایستِگی یِ مُضعی ست. دیده میشود تقارن تحت ِ انتقال ِ فضا یا زمان برا یِ برقراری یِ رابطه یِ پیوستِگی بین ِ چگالی و چگالی-یِ-جریان ِ تکانه یا انرژی کافی نیست، هر چند برا یِ پایستِگی یِ تکانه یا انرژی یِ کل کافی است. تُصیف ِ کیفی یِ این پدیده آن است که برهمکنش ِ ذرات با هم مُضعی نیست، پس پایستِگی یِ تکانه یِ کل ممکن است به این شکل برآورده شود که تکانه یِ یک ذره (در یک جا) کم شود، و تکانه یِ یک ذره یِ دیگر ی (در یک جا یِ دیگر) زیاد شود. در این حالت تکانه یِ کل پایسته مانده، اما این پایستِگی مُضعی نیست.

3 برهمکنش ِ میدان با ذره

سیستم ی شامل ِ یک (یا چند) میدان و یک (یا چند ذره) است. چگالی-یِ-لَگرانژی یِ چنین-سیستم ی به شکل ِ

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\phi,\partial\phi,r)=\mathcal{L}_{\mathrm{F}}(\phi,\partial\phi,r)+\sum_a \delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}_a(t)]\,\tilde{L}_a(\boldsymbol{q}_a,\dot{\boldsymbol{q}}_a,\phi,\partial\phi,t) \qquad (31)$$

است. در سیستم ی که چگالی-یِ-لَگرانژی یَش به شکل ِ بالا باشد، معادله-یِ-حرکت ِ میدان شامل ِ مکان ِ هر یک ذرِها ست و هر ذره به شکل ِ چشمه ای نقطِئی رفتار میکند. معادله یِ حرکت ِ هر ذره هم شامل ِ مکان و سرعت و شتاب ِ آن ذره، و نیز میدان در مکان ِ آن ذره است. ذره‌ها با هم برهمکنش ِ مستقیم ندارند. مثال ِ چنین-سیستم ی برهمکنش ِ ذرِها یِ باردار با میدان ِ الکترُمغناطیسی ست.

برا یِ سیستم ی که چگالی-یِ-لَگرانژی یِ آن (31) است، معادلات ِ حرکت میشوند

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_{\mathrm{F}}+\sum_a \delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}_a(t)]\,\frac{\partial\tilde{L}_a}{\partial\phi}-\sum_a\partial_\mu\left\{\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}_a(t)]\,\frac{\partial\tilde{L}_a}{\partial\phi_{,\mu}}\right\}. \qquad (32)$$

$$\mathcal{E}_{a\,i}=\left.\left(\frac{\partial\tilde{L}_a}{\partial q_a^i}+\frac{\partial\tilde{L}_a}{\partial r^i}\right)\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}_a(t)}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left.\frac{\partial\tilde{L}_a}{\partial\dot{q}_a^i}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}_a(t)}\right]. \qquad (33)$$

$\mathcal{E}_{\mathrm{F}}$ هم ان $\mathcal{E}$ ولی با $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$ به جا یِ $\mathcal{L}$ است. (33) را میشود چنین نوشت

$$\mathcal{E}_{a\,i}=\frac{\partial L_a}{\partial q_a^i}-\dot{p}_{a\,i}, \qquad (34)$$

که

$$L_a(\boldsymbol{q}_a,\dot{\boldsymbol{q}}_a,t):=\left.\tilde{L}_a(\boldsymbol{q}_a,\dot{\boldsymbol{q}}_a,\phi,\partial\phi,t)\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}_a(t)}. \qquad (35)$$

$p_{a\,0}$ هم مثل ِ (27) تعریف میشود، و در نتیجه

$$\dot{p}_{a\,0}=\mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}_a^i+\left.\partial_0^q\tilde{L}_a\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}_a(t)}. \qquad (36)$$

4 معادلات ِ پیوستِگی

تعریف میکنم

$$A_\nu:=\partial_\mu\left[-\Theta^\mu_{\mathrm{F}\,\nu}-\sum_a\delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}_a(t)]\,\frac{\partial\tilde{L}_a}{\partial\phi_{,\mu}}\,\phi_{,\nu}\right]. \qquad (37)$$

از (10) نتیجه میشود

$$
\begin{aligned}
A_\nu &= \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \partial^\phi_\nu \mathcal{L}_\mathrm{F} + \sum_a (\partial^\phi_\nu - \partial_\nu)\{\delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,\tilde{L}_a\} \\
&= \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \partial^\phi_\nu \mathcal{L}_\mathrm{F} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,[(\partial^\phi_\nu - \partial_\nu)\tilde{L}_a],
\end{aligned}
\tag{38}
$$

که Θ_F شبیه ِ Θ، اما با $\mathcal{L}_\mathrm{F}$ به جا ی ِ $\mathcal{L}$، تعریف میشود. شاخص ِ ν را یک بار فضایی و یک بار زمانی میگیرم. دیده میشود

$$
\partial^\phi_i \tilde{L}_a = 0. \tag{39}
$$

به این ترتیب، با استفاده از (34) معادله ی ِ (38) برا ی ِ حالت ِ $\nu = i$ میشود

$$
A_i = \mathcal{E}\,\phi_{,i} + \partial^\phi_i \mathcal{L}_\mathrm{F} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i_a} - \mathcal{E}_{a\,i} - \dot{p}_{a\,i}\right). \tag{40}
$$

برا ی ِ حالت ِ $\nu = 0$،

$$
(\partial^\phi_0 - \partial_0)\tilde{L}_a = (\partial^{q\,\phi}_0 - \partial^q_0)\tilde{L}_a, \tag{41}
$$

که $\partial^{q\,\phi}$ یعنی مشتقگیری بدون ِ در-نظر-گرفتن ِ بستِگی ی ِ ϕ و $\partial\phi$ و $\boldsymbol{q}$ و $\dot{\boldsymbol{q}}$ به زمان. از اینجا (38) در حالت ِ $\nu = 0$ میشود

$$
A_0 = \mathcal{E}\,\phi_{,0} + \partial^\phi_0 \mathcal{L}_\mathrm{F} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,[\partial^{q\,\phi}_0 \tilde{L}_a + \mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}^i_a - \dot{p}_{a\,0}]. \tag{42}
$$

معادلِها ی ِ (40) و (42) را میشود در یک معادله ترکیب کرد:

$$
\begin{aligned}
A_\nu + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,\dot{p}_{a\,\nu} &= \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,\mathcal{E}_{a\,i}\,c^i_\nu \\
&\quad + \partial^\phi_\nu \mathcal{L}_\mathrm{F} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\,\partial^\mathrm{exp}_\nu \tilde{L}_a,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

که

$$
c^i_\nu := \begin{cases} \dot{q}^i, & \nu = 0 \\ -\delta^i_\nu, & \nu \neq 0 \end{cases}, \tag{44}
$$

و

$$
\partial^\mathrm{exp}_\nu \tilde{L}_a := \begin{cases} \partial^{q\,\phi}_0 \tilde{L}_a, & \nu = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{L}_a}{\partial q^\nu_a}, & \nu \neq 0 \end{cases}. \tag{45}
$$

ضمنَن (44) را میشود به شکل ِ بستِر ِ

$$c^i_\nu = \partial_\nu [q^i(t) - r^i] \tag{46}$$

نوشت.

از (24) نتیجه میشود

$$\sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \dot{p}_{a\,\nu} = \partial_\mu \left\{ \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, p_{a\,\nu}(t)\, \dot{q}^\mu_a(t) \right\}, \tag{47}$$

و از آنجا (43) میشود

$$\partial_\mu\, \tau^\mu{}_\nu = \mathcal{E}\, \phi_{,\nu} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \mathcal{E}_{a\,i}\, c^i_\nu + \partial^\phi_\nu \mathcal{L}_{\rm F} + \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \partial^{\rm exp}_\nu \tilde{L}_a, \tag{48}$$

که

$$\tau^\mu{}_\nu := \tau^\mu_{{\rm F}\,\nu} + \tau^\mu_{{\rm I}\,\nu} + \tau^\mu_{{\rm M}\nu}, \tag{49}$$

و

$$\begin{aligned} \tau^\mu_{{\rm F}\,\nu} &:= -\Theta^\mu_{{\rm F}\nu}, \\ \tau^\mu_{{\rm I}\,\nu} &:= -\sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, \frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \phi_{,\mu}}\, \phi_{,\nu}, \\ \tau^\mu_{{\rm M}\nu} &:= \sum_a \delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}_a(t)]\, p_{a\,\nu}\, \dot{q}^\mu_a(t). \end{aligned} \tag{50}$$

معادلِها یِ (48) تا (50) میگویند اگر سیستم تحت ِ انتقال ِ یک ی از مئلفِها یِ فضا-زمان تقارن داشته باشد، یک چگالی و چگالی-یِ-جریان هست که رو یِ لاک رابطه یِ پیوستِگی را بر میئاورَد. این چگالی و چگالی-یِ-جریان شامل ِ یک بخش است که از میدان میئاید، یک بخش که از برهمکنش ِ ذرات با میدان میئاید، و یک بخش که از ذرات میئاید. تقارن نسبت به انتقال- ِ-زمان یعنی زمان در $\mathcal{L}_{\rm F}$ و $\tilde{L}_a$ ها فقط از طریق ِ میدان و مکان ِ ذرات ظاهر شود. تقارن نسبت به انتقال- ِ-فضا یعنی فضا در $\mathcal{L}_{\rm F}$، و نیز مکان ِ هر ذره در لَگرانژی یَش، فقط از طریق ِ میدان ظاهر شود.

البته این پیوستِگی زمان ی برقرار است که برهمکنش ِ ذرات با هم فقط از طریق ِ میدان باشد. در این حالت تکانه ای که از یک ذره گرفته میشود مستقیمَن به یک ذره یِ دیگر نمیرسد بل که به میدان منتقل میشود، و به هم ین خاطر است که پایستِگی مُضعَن برقرار میشود.

5 پانوشتها

[1] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “Classical mechanics”, 3rd edition (Addison Wesley, 2002)

[2] Dirac