**X1-029 (2005/02/20)**

# تانسر ِ انرژی-تکانه II

**محمد خرمی** mamwad@mailaps.org

رابطه یِ تانسر ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک با تانسر ِ انرژی-تکانه یِ متقارن بررسی میشود. نشان داده میشود که هر تقارن ِ فضازمان (هر ایزُمتری) به یک جریان مینجامد که معادله یِ پیوستِگی را بر میئاورَد.

## 0 درامد

اگر چگالی-یِ-لَگرانژی یِ یک سیستم ِ مرتبه-یِ-یک صریحَن به یک ی از مئلفِها یِ فضا-زمان وابسته نباشد، یک جریان ِ پیوسته (رو یِ لاک) هست که از تانسر ِ انرژی-تکانه ساخته میشود [1]. اگر فضا-زمان در یک راستا تقارن ِ انتقالی داشته باشد، انتظار میرود چگالی-یِ-لَگرانژی به مختصه یِ متناظر با آن راستا وابسته نباشد و در نتیجه یک جریان ِ پیوسته وجود داشته باشد. سئال این است که جریان ِ پیوسته یِ متناظر با تقارنها یِ احتمالی یِ دیگر ِ فضا-زمان چیست. برا یِ بررسی یِ این مُضوع در حالت ِ کلی، اول باید دید چه مشخصات ی از فضا-زمان در کنش وارد میشوند. کنشها یی را بررسی میکنم که فقط ویژِگیها یِ هندسی یِ فضا-زمان در آنها وارد میشود. میگویم این کنشها هموردایی یِ عام دارند. معلوم میشود شرط ِ هموردایی یِ نتیجه میدهد یک تانسر ِ متقارن (تانسر- ِ-انرژی-تکانه یِ

متقارن) هست، که دیورژانسِ هموردا یَش رو یِ لاک صفر میشود. همچنین معلوم میشود به ازا یِ هر مولدِ تقارنِ فضا-زمانی (هر بردارِ کیلینگ [2]) یک جریانِ پیوسته (رو یِ لاک) به دست میئاید.

به این ترتیب، به نظر میرسد متناظر با تقارنِ انتقالِ یک ی از مئلفِها یِ فضا-زمان دُ نُع جریانِ پیوسته وجود دارد: یک ی ناشی از تانسرِ-انرژی-تکانه یِ کانُنیک (که در [1] تعریف شد) و دیگری ناشی از تانسرِ-انرژی-تکانه یِ متقارن. از بررسی یِ رابطه یِ این دُ-تانسر با هم معلوم مشود جریانها یِ پیوسته یِ ناشی از تقارنِ انتقالی همئرز َند و کمیتها یِ پایسترِ متناظر هم یکسان َند.

این مقاله ادامه یِ [1] است و نمادگذاریها یِ آنجا در این مقاله هم به کار میرود.

## 1 تانسرِ-انرژی-تکانه یِ کانُنیک و تقارنِ فضا-زمانی

مشتقِ لی [3] نسبت به میدانِ برداری یِ $\xi$ را با $L_\xi$ نشان میدهم. اگر $g$ تانسرِ متریک باشد،

$$\begin{aligned}[L_\xi(g)]_{\mu\,\nu} &= \xi^\alpha\,\partial_\alpha\,g_{\mu\,\nu} + (\partial_\mu\,\xi^\alpha)\,g_{\alpha\,\nu} + (\partial_\nu\,\xi^\alpha)\,g_{\mu\,\alpha},\\ &= \xi_{\mu\,;\nu} + \xi_{\nu\,;\mu}.\end{aligned} \tag{1}$$

مشتقِ هموردا در این رابطه با هموسترِ-لِوی-چیویتا [4] یِ متناظر با متریکِ $g$ تعریف شده است:

$$\begin{aligned}\xi_{\mu\,;\nu} &= \partial_\nu\xi_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\,\mu}\,\xi_\alpha,\\ \Gamma^\alpha{}_{\nu\,\mu} &= \frac{1}{2}\,g^{\alpha\,\beta}\,(\partial_\nu\,g_{\beta\,\mu} + \partial_\mu\,g_{\beta\,\nu} - \partial_\alpha\,g_{\nu\,\mu}).\end{aligned} \tag{2}$$

مولدِ یک ایزُمتری (تقارنِ فضا-زمانی) یک میدانِ برداری ($\xi$) است که مشتقِ لی [3] یِ تانسرِ متریک ($g$) نسبت به آن صفر است:

$$L_\xi(g) = 0, \tag{3}$$

به میدانِ برداری یی که (3) را بر میئاورَد یک میدانِ برداری یِ کیلینگ [2] میگویند. اینها (و بعض ی چیزها یِ دیگر در مُرِدِ هندسه که در این مقاله به کار میرود) را میشود در مثلَن [5] یافت.

هر میدانِ برداری ($\xi$) متناظر با یک خانواده یِ یک-پارامتری یِ تابعها از فضا-زمان به فضا-زمان است (شارشِ آن میدانِ برداری). به ازا یِ مقدارها یِ کوچکِ $s$ (پارامتر)، این تابع چنین است.

$$r^\mu \to r^\mu + s\,\xi^\mu, \tag{4}$$

که $r^\mu$ ها مختصها یِ فضا-زمان َند. گیرم متناظر با این تابع، میدان ِ $\phi$ (متغیر ِ دینامیکی یِ یک سیستم) را چنین تغییر دهم.

$$\phi \to \phi + \delta\phi,$$
$$\delta\phi^A(r) = -s\,\xi^\mu\,\partial_\mu\phi^A, \tag{5}$$

که $\phi^A$ ها مئلفها یِ میدان ِ $\phi$ اند. اگر $\phi$ اسکالر باشد، ضریب ِ $(-s)$ در رابطه یِ بالا مشتق ِ لی یِ $\phi$ نسبت به $\xi$ است. سئال این است که تبدیل ِ (5) تقارن ِ نُتری یِ سیستم هست یا نَ، یعنی تغییر ِ چگالی-یِ-لَگرانژی به خاطر ِ آن دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری هست یا نَ. سیستم ی که بررسی یَش میکنم را مرتبه-یِ-یک میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\,\delta\mathcal{L} &= -(\xi^\mu\,\partial_\mu\,\phi^A)\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A} - [\partial_\nu(\xi^\mu\,\partial_\mu\phi^A)]\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A_{,\nu}},\\
&= -\xi^\mu\left[(\partial_\mu\,\phi^A)\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A} + (\partial_\mu\,\partial_\nu\,\phi^A)\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A_{,\nu}} + \partial^\phi_\mu\,\mathcal{L}\right]\\
&\quad - (\partial_\nu\,\xi^\mu)\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A_{,\nu}}\,\partial_\mu\,\phi^A + \xi^\mu\,\partial^\phi_\mu\,\mathcal{L},\\
&= -\xi^\mu\,\partial_\mu\,\mathcal{L} - (\partial_\mu\,\xi^\mu)\mathcal{L}\\
&\quad + (\partial_\mu\,\xi^\mu)\mathcal{L} - (\partial_\nu\,\xi^\mu)\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A_{,\nu}}\,\partial_\mu\,\phi^A + \xi^\mu\,\partial^\phi_\mu\,\mathcal{L},\\
&= \partial_\mu(-\xi^\mu\,\mathcal{L}) - (\partial_\nu\,\xi^\mu)\Theta^\nu{}_\mu + \xi^\mu\,\partial^\phi_\mu\,\mathcal{L},
\end{aligned} \tag{6}$$

که $\Theta$ تانسر-ِ-انرژی-تکانه یِ کانُنیک است:

$$\Theta^\nu{}_\mu = \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^A_{,\nu}}\,\phi^A_{,\mu} - \delta^\nu{}_\mu\,\mathcal{L}. \tag{7}$$

برا یِ انتقالها، مشتق ِ $\xi$ صفر است و اگر مشتق ِ صریح ِ چگالی-یِ-لَگرانژی در راستا یِ $\xi$ صفر باشد، طرف ِ راست ِ (6) دیورژانس ِ کامل است و تقارن وجود دارد. در این حالت جریان ِ $J$ با

$$J^\nu = -\xi^\mu\,\Theta^\nu{}_\mu \tag{8}$$

رو یِ لاک پیوسته است. اما در حالت ِ کلی،

$$\partial_\nu\,J^\nu = -(\partial_\nu\,\xi^\mu)\Theta^\nu{}_\mu - \xi^\nu\,\partial_\nu\,\Theta^\nu{}_\mu, \tag{9}$$

و با توجه به

$$\partial_\nu\, \Theta^\nu{}_\mu \overset{\text{ns}}{=} -\partial^\phi_\mu\, \mathcal{L}, \tag{10}$$

([1]) نتیجه میشود

$$\partial_\nu\, J^\nu \overset{\text{ns}}{=} -(\partial_\nu\, \xi^\mu)\Theta^\nu{}_\mu + \xi^\mu\, \partial^\phi_\mu\, \mathcal{L}. \tag{11}$$

دیده میشود طرف ِ راست ِ این رابطه هم ان جمله ی ِ اضافه بر دیورژانس ِ کامل در طرف ِ راست ِ (6) است. نتیجه این که در حالت ِ کلی (حتا اگر $\xi$ یک میدان ِ برداری ِ کیلینگ [2] باشد) تبدیل ِ (5) تقارن ِ سیستم نیست و به جریان ِ پیوسته نمینجامد.

## 2 هموردایی ی ِ عام

چگالی-ی ِ-لَگرانژی ی ِ یک سیستم $\mathcal{L}$ است. میگویم این سیستم هموردایی ی ِ عام دارد، اگر به ازا ی ِ هر ناحیه ی ِ $\Omega$ در فضا-زمان و هر وابرریختی ی ِ $f$ از فضا-زمان به فضا-زمان این رابطه برقرار باشد.

$$\int_{f(\Omega)} \tilde{\mathcal{L}}[f_*(\phi), f_*(g), f_*(\varepsilon), r]\, f_*(\varepsilon) = \int_\Omega \tilde{\mathcal{L}}(\phi, g, \varepsilon, r)\, \varepsilon. \tag{12}$$

وابرریختی یعنی تابع ی وارونپذیر که خُد َش و وارون َش مشتقپذیر َند. $f_*$ اثر ِ تابع ِ $f$ بر میدانها ست (پیشران ِ تابع ِ $f$ است). $g$ تانسر ِ متریک و $\varepsilon$ تانسر ِ حجم (لِوی-چیویتا [4]) است:

$$\varepsilon = \frac{1}{(D+1)!}\, \varepsilon_{\mu_0\cdots\mu_D}\, \mathrm{d}r^{\mu_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r^{\mu_D}, \tag{13}$$

که

$$\varepsilon_{\mu_0\cdots\mu_D} = \begin{cases} +\sqrt{|\mathfrak{D}|}, & (r^{\mu_0}, \ldots, r^{\mu_D}) \text{ راستگرد است} \\ -\sqrt{|\mathfrak{D}|}, & (r^{\mu_0}, \ldots, r^{\mu_D}) \text{ چپگرد است} \\ 0, & \text{دُ شاخص یکسان َند} \end{cases}. \tag{14}$$

$\mathfrak{D}$ دترمینان ِ ماتریس ِ متریک است. از (12) معلوم میشود

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}}, \tag{15}$$

یک نتیجه ی ِ (12) آن است که

$$\tilde{\mathcal{L}}[f_*(\phi), f_*(g), f_*(\varepsilon), r]\Big|_{r=f(x)} = \tilde{\mathcal{L}}(\phi, g, \varepsilon, r)\Big|_{r=x}. \tag{16}$$

یعنی اگر میدانها (و هندسه) با وابریختی یِ $f$ منتقل شوند و $\tilde{\mathcal{L}}$ با آنها در نقطه یِ $f(x)$ (نقطه یِ جدید) حساب شود، هم ان $\tilde{\mathcal{L}}$ با میدانها و هندسه یِ قدیم در نقطه یِ $x$ (نقطه یِ قدیم) به دست میئاید. این را در این عبارت خلاصه میکنند که $\tilde{\mathcal{L}}$ اسکالر است.

با معلوم-بودن ِ مئلفِها یِ متریک، مئلفِها یِ تانسر ِ لِوی-چیویتا [4] تا حد ِ یک علامت معین َند. اگر مختصات ِ انتخاب-شده راستگرد باشد، مئلفِها یِ تانسر ِ لِوی-چیویتا [4] کاملَن معین َند. به این ترتیب، بستگی یِ چگالی-یِ-لگرانژی به تانسر ِ لِوی-چیویتا [4] را میشود از طریق ِ متریک وارد کرد:

$$\begin{aligned} S_\Omega &= \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, g, r)\,\mathrm{d}r^0 \cdots \mathrm{d}r^D \\ &=: \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, g, r)\,\mathrm{d}^{D+1}r. \end{aligned} \tag{17}$$

$f$ را یک وابریختی یِ نزدیک به همانی میگیرم:

$$[f(x)]^\mu = x^\mu + s\,\xi^u. \tag{18}$$

اثر ِ $f$ بر $\phi$ و $g$ چنین میشود.

$$\begin{aligned} f_*(\phi) &= \phi - s\,L_\xi(\phi), \\ &=: \phi + \delta\phi. \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} f_*(g) &= g - s\,L_\xi(g), \\ &=: g + \delta g. \end{aligned} \tag{20}$$

که $L_\xi$ مشتق ِ لی [3] با $\xi$ است. از (12) نتیجه میشود

$$\delta_\Omega S + \delta_\phi S + \delta_g S = 0, \tag{21}$$

که $\delta_B C$ یعنی تغییر ِ $C$ به خاطر ِ تغییر ِ $B$. دیده میشود

$$\delta_\Omega S = s \oint_{\partial\Omega} \mathcal{L}\,\xi^\mu\,\mathrm{d}\Sigma_\mu, \tag{22}$$

$$\delta_\phi S = \int_\Omega \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu \delta\phi^A + \cdots \right) \mathrm{d}^{D+1}r, \tag{23}$$

$$\delta_g S = \int_\Omega \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}}\,\delta g_{\alpha\,\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu \delta g_{\alpha\,\beta} + \cdots \right) \mathrm{d}^{D+1}r, \tag{24}$$

که $\mathrm{d}\Sigma$ عنصر ِ فُق- ِ-سطح رو یِ مرز ِ $\Omega$ است. اگر $\xi$ رو یِ مرز ِ $\Omega$ صفر شود، $\Omega$ و $f(\Omega)$ یکسان َند. در این صورت جمله یِ اول ِ طرف ِ چپ ِ (21) صفر میشود. با فرض ِ این که تعداد ِ باپایان ی از مشتقها یِ $\phi$ و $g$ در چگالی-یِ-لَگرانژی ظاهر شده باشند، اگر تعداد ِ کافی از مشتقها یِ $\xi$ هم رو یِ مرز ِ $\Omega$ صفر باشند، طرف ِ راست ِ برابریها یِ (23) و (24) را میشود بر حسب ِ خُد ِ $\delta\phi$ و $\delta g$ (و نَه مشتقها یِشان) نوشت. برا یِ این کار، با استفاده از انتگرالگیری یِ جزئ-به-جزئ مشتق را از $\delta\phi$ و $\delta g$ به ضریب ِ آن منتقل میکنم. جملِها یِ مرزی شامل ِ مشتقها یِ $\delta\phi$ و $\delta g$ اند. $\delta\phi$ و $\delta g$، هر یک ترکیب ی خطی از $\xi$ و مشتق ِ اول ِ آن َند. پس اگر $\xi$ و مشتقها یِ تا مرتبه یِ $(k+1)$ ِ آن رو یِ مرز ِ $\Omega$ صفر باشند، $\delta\phi$ و $\delta g$ و مشتقها یِ تا مرتبه یِ $k$ ِ آنها هم رو یِ مرز ِ $\Omega$ صفر َند. به این ترتیب، اگر تعداد ِ کافی از مشتقها یِ $\xi$ رو یِ مرز ِ $\Omega$ صفر باشند (این تعداد ِ کافی باپایان است)، جملِها یِ مرزی یِ ناشی از این انتگرالها یِ جزئ-به-جزئ صفر َند. در این حالت،

$$\delta_\phi S = \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta\phi^A}\right)_{\mathrm{in}} \delta\phi^A \, \mathrm{d}^{D+1}r, \tag{25}$$

$$\delta_g S = \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\,\beta}}\right)_{\mathrm{in}} \delta g_{\alpha\,\beta} \, \mathrm{d}^{D+1}r, \tag{26}$$

که

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\phi^A}\right)_{\mathrm{in}} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\right) + \cdots, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\,\beta}}\right)_{\mathrm{in}} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\right) + \cdots. \tag{28}$$

به این ترتیب، برا یِ $\xi$ ها یی که تعداد ِ کافی از مشتقها یِشان در مرز ِ $\Omega$ صفر است، (21) میشود

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta\phi^A}\right)_{\mathrm{in}} \delta\phi^A \, \mathrm{d}^{D+1}r + \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\,\beta}}\right)_{\mathrm{in}} \delta g_{\alpha\,\beta} \, \mathrm{d}^{D+1}r = 0. \tag{29}$$

با استفاده از (1) و (20) و (26)،

$$\begin{aligned}
\delta_g S &= -2\,s \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\mathrm{in}} \xi_{\mu\,;\nu} \, \mathrm{d}^{D+1}r, \\
&= -s \int_\Omega \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\mathrm{in}} \xi_{\mu\,;\nu} \sqrt{|\mathfrak{D}|} \, \mathrm{d}^{D+1}r, \\
&= -s \int_\Omega \left[\frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\mathrm{in}} \xi_\mu\right]_{;\nu} \sqrt{|\mathfrak{D}|} \, \mathrm{d}^{D+1}r \\
&\quad + s \int_\Omega \left[\frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\mathrm{in}}\right]_{;\nu} \xi_\mu \sqrt{|\mathfrak{D}|} \, \mathrm{d}^{D+1}r,
\end{aligned}$$

$$= -s \int_\Omega \partial_\nu \left[ 2 \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}} \right)_{\text{in}} \xi_\mu \right] \mathrm{d}^{D+1} r$$
$$+ s \int_\Omega \left[ \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}} \right)_{\text{in}} \right]_{;\nu} \xi_\mu \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, \mathrm{d}^{D+1} r,$$
$$= -2\, s \oint_{\partial\Omega} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}} \right)_{\text{in}} \xi_\mu\, \mathrm{d}\Sigma_\nu$$
$$+ s \int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\, \xi_\mu \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, \mathrm{d}^{D+1} r, \tag{30}$$

که

$$T^{\nu\,\mu} := \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left( \frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}} \right)_{\text{in}}. \tag{31}$$

در برابری یِ اول ِ (30) این به کار رفته که وردش ِ کنش نسبت به متریک متقارن است (چون خُد ِ متریک متقارن است). در برابری یِ چهارم ِ (30) هم این به کار رفته است که

$$V^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}}\, \partial_\nu \left( V^\nu \sqrt{|\mathfrak{D}|} \right), \tag{32}$$

که $V^\nu$ ها مئلفِها یِ بردار ِ $V$ اند.

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست در آخرین برابری یِ (30) صفر است. به این ترتیب، (29) میشود

$$s \int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\, \xi_\mu \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, \mathrm{d}^{D+1} r + \int_\Omega \left( \frac{\delta S}{\delta \phi^A} \right)_{\text{in}} \delta\phi^A\, \mathrm{d}^{D+1} r = 0, \tag{33}$$

یا

$$\int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\, \xi_\mu \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, \mathrm{d}^{D+1} r + \int_\Omega \mathcal{E}_A\, \frac{\delta\phi^A}{s}\, \mathrm{d}^{D+1} r = 0, \tag{34}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\, \xi_\mu \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, \mathrm{d}^{D+1} r \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{35}$$

رابطه یِ (35) باید به ازا یِ $\xi$ ها یِ دلبخاه (فقط با این شرط که تعداد ِ کافی از مشتقها یِ $\xi$ رو یِ مرز صفر شود) برقرار باشد. از این نتیجه میشود

$$T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu} \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{36}$$

این مانسته یِ رابطه یِ (10) است.

## 3 تقارنِ فضا-زمانی و جریانها یِ پیوسته

معادله یِ (36) برا یِ هر کنش ی با هموردایی یِ عام درست است، و به تقارنها یِ فضا-زمان مربوط نمیشود. اما ضمنَن این معادله رابطه یِ پیوستگی نیست. به ویژه، از این رابطه ثابت- ِحرکت ی به دست نمیئاید. این رابطه را نمیشود به شکلِ دیورژانسِ معمولی (ناهموردا) یِ چیز ی نوشت که انتگرالِ فضایی یِ مئلفه یِ صفرُمِ آن ثابتِ حرکت شود.

حالا گیرم $\xi$ مولدِ یک تقارنِ فضا-زمانی (مولدِ یک ایزُمتری) باشد، یعنی $\xi$ یک میدانِ برداری یِ کیلینگ [2] باشد. در این صورت از (1) و (3) نتیجه میشود

$$\xi_{\mu\,;\nu} + \xi_{\nu\,;\mu} = 0. \tag{37}$$

این را با (36) ترکیب میکنم، و از این استفاده میکنم که $T$ متقارن است. نتیجه میشود

$$(T^{\nu\,\mu}\,\xi_\mu)_{;\nu} \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{38}$$

یا

$$\tilde{J}^\nu{}_{;\nu} \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{39}$$

که

$$\tilde{J}^\nu := T^{\nu\,\mu}\,\xi_\mu. \tag{40}$$

رابطه یِ (39) را میشود نوشت

$$\partial_\nu\left(\tilde{J}^\nu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\right) \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{41}$$

که از آن نتیجه میشود $Q$ با

$$Q := \int \tilde{J}^0\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,\mathrm{d}^D r \tag{42}$$

ثابتِ حرکت است (به شرطِ آن که فضا باپایان باشد و مرز نداشته باشد یا مئلفِها یِ فضایی یِ جریان در مرز یا بینهایت با سرعتِ کافی صفر شوند).

پس هر خانواده یِ یک‌پارامتری یِ تقارنها یِ فضا-زمانی (که پیوسته به همانی و در همانی مشتق‌پذیر باشد) به یک جریانِ پیوسته مینجامد.

## 4 تانسر- ِ-انرژی- تکانه یِ کانُنیک و تانسر- ِ-انرژی-تکانه یِ متقارن

دست- ِ-کم برا یِ فضا-زمان ِ تخت، به نظر میرسد تقارن ِ انتقال ِ فضا-زمان در یک جهت به دُ جریان ِ پیوسته مینجامد: یک ی از رابطه یِ (8) و دیگری از رابطه یِ (40) . اگر قرار باشد این دُ جریان مستقل از هم نباشند، باید بین ِ $\Theta$ (تانسر- ِ-انرژی-تکانه یِ کانُنیک) و $T$ (تانسر- ِ-انرژی-تکانه یِ متقارن) رابطه ای باشد.

سیستم ی را در نظر میگیرم که هموردایی یِ عام دارد و در چگالی-یِ-لَگرانژی یِ متناظر با آن دست- ِ-بالا مشتق ِ اول ِ میدان و متریک ظاهر میشود. از ترکیب ِ (21) و (22) نتیجه میشود

$$s\,\partial_\mu(\mathcal{L}\,\xi^\mu)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\,\delta\phi^A+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu\delta\phi^A+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}}\,\delta g_{\alpha\,\beta}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu\delta g_{\alpha\,\beta}=0. \quad (43)$$

همچنین،

$$\delta\phi^A=-s\,\xi^\sigma\,\partial_\sigma\phi^A+s\,(\partial_\rho\xi^\sigma)\,G^{A\,\rho}{}_\sigma, \quad (44)$$

که $G$ به ویژگی یِ تانسری یِ $\phi$ بستِگی دارد، و

$$\delta g_{\alpha\,\beta}=-s\,\xi^\sigma\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}-s\,(\partial_\rho\xi^\sigma)\,(\delta^\rho_\alpha\,g_{\sigma\,\beta}+\delta^\rho_\beta\,g_{\alpha\,\sigma}). \quad (45)$$

اینها را در (43) میگذارم. نتیجه میشود

$$\begin{aligned}0=&+\xi^\sigma\,\left(\partial_\sigma\mathcal{L}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\,\partial_\sigma\phi^A-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu\partial_\sigma\phi^A-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}\right)\\&+(\partial_\rho\xi^\sigma)\,\left(\delta^\rho_\sigma\,\mathcal{L}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\,G^{A\,\rho}{}_\sigma+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu G^{A\,\rho}{}_\sigma-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\rho}}\,\partial_\sigma\phi^A\right.\\&\qquad\left.-2\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\rho\,\beta}}\,g_{\sigma\,\beta}-2\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\rho\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu g_{\sigma\,\beta}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}\right)\\&+(\partial_\mu\,\partial_\rho\xi^\sigma)\,\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,G^{A\,\rho}{}_\sigma-2\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\rho\,\beta\,,\mu}}\,g_{\sigma\,\beta}\right).\end{aligned} \quad (46)$$

ضریبها یِ $\xi$ و مشتق ِ اول ِ $\xi$، و نیز بخش ِ متقارن ِ ضریب ِ مشتق ِ دوم ِ $\xi$ باید صفر باشد. از این که ضریب ِ $\xi$ صفر باشد نتیجه میشود

$$\partial^{\phi,g}_\rho\mathcal{L}=0, \quad (47)$$

یعنی بستگی ی ِ $\mathcal{L}$ به فضا-زمان فقط از طریق ِ میدان و متریک است. از این که بخش ِ متقارن ِ ضریب ِ مشتق ِ دوم ِ $\xi$ صفر است، نتیجه میشود $\omega$ با

$$\omega^{\mu\,\rho}{}_{\sigma} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^{A}_{,\mu}}\,G^{A\,\rho}{}_{\sigma} - 2\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\rho\,\beta\,,\mu}}\,g_{\sigma\,\beta} \tag{48}$$

(نسبت به شاخصها ی ِ بالا یَش) پادمتقارن است. سرانجام، از صفر-شدن ِ ضریب ِ مشتق ِ اول ِ $\xi$ نتیجه میشود

$$\mathcal{E}_A\,G^{A\,\rho}{}_{\sigma} - \Theta^{\rho}{}_{\sigma} + \partial_\mu\omega^{\mu\,\rho}{}_{\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta} - \sqrt{|\mathfrak{D}|}\,T^{\rho}{}_{\sigma} = 0. \tag{49}$$

این، رو ی ِ لاک رابطه ای بین ِ $\Theta$ و $T$ میدهد:

$$-\Theta^{\rho}{}_{\sigma} + \partial_\mu\omega^{\mu\,\rho}{}_{\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta} \overset{\text{ns}}{=} \sqrt{|\mathfrak{D}|}\,T^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{50}$$

اگر فضا-زمان تخت باشد و مختصات را دِکَرتی بگیرم، مشتقها ی ِ مئلفِها ی ِ متریک صفر میشود و قدر-ِ-مطلق ِ دترمینان ِ متریک را هم میشود یک کرد. در این صورت عبارت ِ بالا به این شکل ِ ساده در میئاید.

$$\begin{aligned}\Theta'^{\rho}{}_{\sigma} &:= \Theta^{\rho}{}_{\sigma} - \partial_\mu\omega^{\mu\,\rho}{}_{\sigma},\\ &\overset{\text{ns}}{=} -T^{\rho}{}_{\sigma}.\end{aligned} \tag{51}$$

$\omega$ پادمتقارن است از اینجا نتیجه میشود

$$\partial_\rho\Theta'^{\rho}{}_{\sigma} = \partial_\rho\Theta^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{52}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}P'_\sigma &= -\int \Theta'^{0}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}^D r,\\ &= -\int \Theta^{0}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}^D r + \int \partial_\mu\omega^{\mu\,0}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}^D r,\\ &= P_\sigma + \int \partial_i\omega^{i\,0}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}^D r,\\ &= P_\sigma + \oint \omega^{i\,0}{}_{\sigma}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_i.\end{aligned} \tag{53}$$

$\mathrm{d}\mathcal{S}$ عنصرِ سطح در مرزِ فضا ست. در رسیدن به تساوی یِ سوم از این استفاده شده که $\omega$ پادمتقارن است و در نتیجه ${\omega^{0\,0}}_\sigma$ صفر است. جمله یِ دومِ طرفِ راستِ آخرین تساوی صفر است، اگر فضا باپایان باشد و مرز نداشته باشد، یا ${\omega^{i\,0}}_\sigma$ ها در مرز یا بینهایت با سرعتِ کافی صفر شوند.

به این ترتیب، معلوم میشود در فضا-زمانِ تخت و رو یِ لاک، تانسر-ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک اصولَن هم ان تانسر-ِ انرژی-تکانه یِ متقارن است (صرف-ِ نظر از یک علامتِ منفی که به قرارداد بستِگی دارد). این که این دُ-تانسر اصولَن یکی یَند، یعنی معادله-یِ-پیوستِگیها یِشان یکسان است و ثابت-ِ حرکتها یِ ناشی از تقارنِ انتقالی هم که از این دُ-تانسر به دست میئاید یکسان است.

این که تانسر-ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک هم ان تانسر-ِ انرژی-تکانه یِ متقارن است، رو یِ لاک درست است و بر اساسِ این فرضها است که در چگالل-یِ-لَگرانژی بستِگی به فضا-زمان از طریقِ فقط میدانها و متریک است، و فضا-زمان تخت است. در موارد ی بعض ی از این فرضها را میشود حذف کرد. گیرم چگالی-یِ-لَگرانژی علاوه بر میدانها (یِ دینامیکی) و متریک شاملِ میدانها یِ اسکالرِ بیرونی یی هم باشد که مشتقِ شان در چگالی-یِ-لَگرانژی وارد نشده است. منظور از میدانِ بیرونی این است که این میدان داده-شده است و برا یِ آن معادله یِ حرکت نمینویسند. با استدلال ی شبیهِ آن چه به (49) انجامید (و به این ترتیب که با میدانها یِ بیرونی هم مثلِ میدانها یِ دینامیکی رفتار شود)، معلوم میشود

$$\mathcal{E}_A\, {G^{A\,\rho}}_\sigma - {\Theta^\rho}_\sigma + \partial_\mu {\omega^{\mu\,\rho}}_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\, \partial_\sigma g_{\alpha\,\beta} - \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, {T^\rho}_\sigma = \Delta, \qquad (54)$$

که

$$\Delta := -\mathcal{E}_X\, {G^{X\,\rho}}_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^X_{,\rho}}\, \phi^X_{,\sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^X_{;\mu}}\, {G^{X\,\rho}}_\sigma \right). \qquad (55)$$

شاخصها یِ بزرگِ از حرفها یِ ابتدایی یِ لاتین متناظر با میدانها یِ دینامیکی و شاخصها یِ بزرگِ از حرفها یِ انتهایی یِ لاتین متناظر با میدانها یِ بیرونی یَند. تانسر-ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک هم با (فقط) میدانها یِ دینامیکی تعریف شده. اگر $\phi^X$ اسکالر باشد، $G^X$ صفر است. اگر $G^X$ ها صفر باشند و مشتقِ $\phi^X$ ها هم در چگالی-یِ-لَگرانژی وارد نشده باشد، $\Delta$ صفر میشود. پس اگر میدانها یِ بیرونی اسکالر باشند و مشتقِ شان هم در چگالی-یِ-لَگرانژی وارد نشده باشد، $\Delta$ صفر است و (49) و در نتیجه (50) برقرار است.

اگر $\phi^A$ اسکالر باشد $G^A$ صفر است. اگر $G^A$ ها صفر باشند و مشتقِ متریک هم در چگالی یِ

لَگرانژی وارد نشده باشد، $\omega$ صفر است. اگر $G^A$ ها صفر باشند، مشتقِ متریک در چگالی-یِ-لَگرانژی وارد نشده باشد، و $\omega$ هم صفر باشد، آنگاه همه یِ جملِها یِ طرفِ چپِ (49) جز مضربها یِ تانسرِ-انرژی-تکانه یِ کانُنیک و متقارن صفر َند. به این ترتیب، اگر همه یِ میدانها (جز متریک) اسکالر باشند، مشتقِ میدانها یِ بیرونی در چگالی-یِ-لَگرانژی نباشد، و مشتقِ متریک هم در چگالی یِ لَگرانژی نباشد، رابطه یِ تانسرِ-انرژی-تکانه یِ کانُنیک با تانسرِ-انرژی-تکانه یِ متقارن بیرونِ لاک هم برقرار و به این شکلِ ساده خاهد بود.

$$-\Theta^{\rho}{}_{\sigma} = \sqrt{|\mathfrak{D}|}\, T^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{56}$$

## 5 پانوشتها


محمد خرمی؛ «تانسرِ انرژی-تکانه I»؛ (2005/01/07) X1-028

[2] Killing

[3] Lie

[4] Levi-Civita

[5] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics” (Institute of Physics Publishing, 1995) chapters 5–7