X1-030 (2005/04/12)

ماتریس ِ چگالی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

نمایش ِ سیستم‌ها یِ کوانتمی با ماتریس ِ چگالی بررسی می‌شود. حالت‌ها یِ خالص و مخلوط، و درجه یِ اختلاط تعریف می‌شود. نشان داده می‌شود تحول ِ زمانی یِ سیستم‌ها یِ کوانتمی درجه یِ اختلاط را تغییر نمی‌دهد، اما با سنجش ِ هر مشاهده‌پذیر درجه یِ اختلاط زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند.

0 مقدمه

در بسیار ی از کتاب‌ها یِ درسی یِ کوانتم‌مکانیک، حالت ِ یک سیستم را با یک بردار (یا به‌طور ِ دقیق‌تر با یک زیرفضا یِ یک‌بُعدی) در فضا یِ هیلبِرت [a] مشخص می‌کنند. گاه ی ماتریس ِ چگالی (که مشخص‌کننده یِ حالت ِ سیستم به طور ِ کلی است) معرفی می‌شود، اما در خیل ی از موارد (از جمله در فصل ِ 3 از [1]) این معرفی کوتاه و بر اساس ِ فرمول‌بندی یی است که حالت ِ سیستم را با یک بردار مشخص می‌کند. البته موارد یِ هم هست که مستقیماً ماتریس ِ چگالی معرفی شده، مثل ِ [2]. در این‌جا مستقیماً فرمول‌بندی یِ کوانتم‌مکانیک بر اساس ِ ماتریس ِ چگالی، از رو یِ چند فرض ِ ساده به دست می‌آید. برا یِ ساده‌گی، به‌طور ِ ضمنی فرض شده فضا یِ هیلبِرت [a]ِ سیستم باپایان‌بُعدی است. هر چند خیل ی از نتیجه‌ها یِ حاصل با تصحیح‌ها یا شرط‌ها یی برا یِ

فضاها یِ بی‌پایان‌بُعدی هم درست اند.

1 حالت ِ یک سیستم ِ کوانتمی

می‌گویند حالت ِ یک سیستم ِ کوانتمی مشخص است، اگر مقدار ِ چشم‌داشتی یِ همه یِ مشاهده‌پذیرها یِ فضا یِ هیلبِرت [a]ِ متناظر با آن سیستم ِ کوانتمی مشخص باشد. از این فرض که مقدار ِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها نسبت به مشاهده‌پذیرها خطی است (با ضریب‌ها یِ حقیقی) شروع می‌کنیم و نشان می‌دهیم حالت ِ هر سیستم ِ کوانتمی با یک عمل‌گر ِ اِرمیتی در فضا یِ هیلبِرت [a]ِ متناظر با آن سیستم مشخص می‌شود.

فرض کنید O یک نگاشت ِ خطی است. تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Re}(O) := \frac{1}{2}\,(O^\dagger + O),$$

$$\mathrm{Im}(O) := \frac{i}{2}\,(O^\dagger - O). \tag{1}$$

روشن است که $\mathrm{Re}(O)$ و $\mathrm{Im}(O)$ اِرمیتی اند و

$$O = \mathrm{Re}(O) + i\,\mathrm{Im}(O). \tag{2}$$

مقدار ِ چشم‌داشتی یِ O را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\langle O\rangle := \langle \mathrm{Re}(O)\rangle + i\,\langle \mathrm{Im}(O)\rangle. \tag{3}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود با این تعریف، اگر O_1 و O_2 دو نگاشت ِ خطی باشند، آن‌گاه

$$\langle O_1 + O_2\rangle = \langle O_1\rangle + \langle O_2\rangle, \tag{4}$$

و اگر O یک نگاشت ِ خطی و α یک عدد ِ مختلط باشد، آن‌گاه

$$\langle \alpha\, O\rangle = \alpha\,\langle O\rangle. \tag{5}$$

فرض کنید $\{e_i \mid i\}$ یک پایه یِ راست‌هنجار ِ فضا یِ هیلبِرت [a] است. تعریف می‌کنیم

$$\rho_{k\,j} := \langle e_j\, e_k^\dagger \rangle, \tag{6}$$

و از آن‌جا نگاشت ِ خطی یِ ρ را با

$$\rho := \rho_{j\,k}\, e^{j\,\dagger}\, e^k \tag{7}$$

تعریف می‌کنیم، که $\{e^i \mid i\}$ پایه یِ دوگان ِ $\{e_i \mid i\}$ است:

$$e^k\, e_j = \delta^k_j. \tag{8}$$

عنصرها یِ ماتریسی یِ نگاشت ِ خطی یِ O با

$$O =: O^{j\,k}\, e_j\, e_k^\dagger \tag{9}$$

تعریف می‌شوند. از این رابطه و (6) نتیجه می‌شود

$$\langle O \rangle = O^{j\,k}\, \rho_{k\,j}. \tag{10}$$

اما داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(O\,\rho) &= O^{j\,k}\, \rho_{l\,m}\, \mathrm{tr}(e_j\, e_k^\dagger\, e^{l\,\dagger}\, e^m), \\ &= O^{j\,k}\, \rho_{k\,j}. \end{aligned} \tag{11}$$

از مقایسه یِ این رابطه با (10) معلوم می‌شود

$$\langle O \rangle = \mathrm{tr}(O\,\rho). \tag{12}$$

پس با مشخص‌بودن ِ ρ، مقدار ِ چشم‌داشتی یِ هر مشاهده‌پذیر ی مشخص است، در واقع از (10) یا (12) به دست می‌آید. به این ترتیب، حالت ِ هر سیستم ِ کوانتمی با یک نگاشت ِ خطی در فضا یِ هیلبِرت [a]ِ متناظر با آن سیستم مشخص می‌شود. به این نگاشت ماتریس ِ چگالی می‌گویند. از (12) روشن است که حالت ِ دو سیستم (با یک فضا یِ هیلبِرت [a]) یک‌سان است (مقدار ِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها پشان نظیر به نظیر برابر است)، اگر و تنها اگر ماتریسِ چگالی یِ متناظر با این دوسیستم یک‌سان باشد.

مقدار ِ چشم‌داشتی یِ یک نگاشت ِ اِرمیتی (یک مشاهده‌پذیر) حقیقی است. از این‌جا و از (3) نتیجه می‌شود

$$\langle O^\dagger \rangle = \overline{\langle O \rangle}, \tag{13}$$

و با استفاده از (6)،

$$\rho_{k\,j} = \overline{\rho_{j\,k}}, \tag{14}$$

که نشان می‌دهد ماتریس ِ چگالی اِرمیتی است.

مقدار ِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها یِ مجذوری (یعنی مشاهده‌پذیرها یی به شکل ِ O^2، که O یک مشاهدپذیر است) نامنفی است. اگر v یک بردار ِ ناصفر در فضا یِ هیلبِرت باشد، نگاشت ِ Pr_v با تعریف ِ

$$\mathrm{Pr}_v := \frac{1}{\langle v, v\rangle}\, v\, v^\dagger \tag{15}$$

از این نوع است. در واقع به‌ساده‌گی دیده می‌شود که

$$\mathrm{Pr}_v\, \mathrm{Pr}_v = \mathrm{Pr}_v, \tag{16}$$

یعنی Pr_v افکنش است، و

$$\mathrm{Pr}_v^\dagger = \mathrm{Pr}_v. \tag{17}$$

چون Pr_v مشاهده‌پذیر ی مجذوری است،

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_v\, \rho) \geq 0. \tag{18}$$

اما داریم

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_v\, \rho) = \frac{\langle v, \rho\, v\rangle}{\langle v, v\rangle}. \tag{19}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود به ازا یِ هر بردار ِ v،

$$\langle v, \rho\, v\rangle \geq 0. \tag{20}$$

یعنی ماتریس ِ چگالی مثبت ِ شبهِ‌معین است.

سرانجام، مقدار ِ چشم‌داشتی یِ نگاشت ِ همانی یک است. پس،

$$\mathrm{tr}(\rho) = 1. \tag{21}$$

خلاصه کنیم. با فرض ِ این که

1 مقدار ِ چشم‌داشتی نسبت به مشاهده‌پذیرها خطی است (با ضریب‌ها یِ حقیقی)،

2 مقدار ِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها حقیقی است،

3 مقدار ِ چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیرها یِ مجذوری نامنفی است،

4 مقدار ِ چشم‌داشتی یِ همانی یک است،

نتیجه می‌شود حالت ِ هر سیستم با یک ماتریس ِ چگالی مشخص می‌شود؛ و ماتریس ِ چگالی یک نگاشت ِ اِرمیتی یِ مثبت ِ شبهِ‌معین با رد ِ یک است.

2 حالت‌ها یِ خالص و حالت‌ها یِ مخلوط

ماتریس ِ چگالی نگاشت ی اِرمیتی است، پس طیف ِ کامل دارد. ویژه‌مقدارها یِ این نگاشت را با λ_i ها، و چندگانه‌گی یِ λ_i را با D_i نشان می‌دهیم. از این که ماتریس ِ چگالی مثبت ِ شبهِ‌معین و رد ِ آن یک است، نتیجه می‌شود

$$\forall\, i\ :\ 0 \le \lambda_i \le 1,$$

$$\sum_i D_i\, \lambda_i = 1. \tag{22}$$

می‌گوییم حالت ِ یک سیستم خالص است، اگر ویژه‌مقدارها یِ ماتریسِ‌چگالی یِ متناظر با آن حالت یک و صفر باشند، و ویژه‌مقدار ِ یک یگانه باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود که در این حالت

$$\rho = \mathrm{Pr}_v, \tag{23}$$

که v ویژه‌بردار ـِ ρ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک است. بر عکس، روشن است که اگر (23) برقرار باشد، تنهاویژه‌مقدار ـِ ناصفر ـِ ρ یک با چندگانه‌گی یِ یک است، و ویژه‌بردار ـِ متناظر با آن هم v است. اگر حالت ـِ یک سیستم خالص نباشد، می‌گوییم حالت ـِ آن سیستم مخلوط است. البته این تعریف ـِ حالت ـِ خالص و مخلوط، معیار ی کمی از درجه یِ اختلاط نمی‌دهد.

تابع ـِ حقیقی‌مقدار ـِ f را در نظر بگیرید که دامنه اَش یک زیرمجموعه یِ گوژ از یک فضا یِ خطی یِ حقیقی است. می‌گوییم این تابع کاو است، اگر به ازا یِ هر رشته عددها یِ حقیقی و نامنفی یِ α_i با مجموع ـِ یک، و هر رشته یِ x_i که x_i ها متمایز و عضو ـِ دامنه یِ f اند،

$$f\left(\sum_i \alpha_i\, x_i\right) \ge \sum_i \alpha_i\, f(x_i). \tag{24}$$

می‌گوییم f اکیداً کاو است، اگر شرط ـِ لازم و کافی برا یِ برقراری یِ تساوی در (24) آن باشد که یک ی از α_i ها یک باشد و بقیه صفر باشند.

فرض کنید f یک تابع ـِ اکیداًکاو با دامنه یِ $[0,1]$ است، که

$$f(0) = 0. \tag{25}$$

در این صورت روشن است که

$$(0 \le \lambda \le 1) \Rightarrow f(\lambda) \ge \lambda\, f(1), \tag{26}$$

و تساوی وقت ی و تنها وقت ی برقرار است که λ صفر یا یک باشد.

فرض کنید ρ یک ماتریس ـِ چگالی است، λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ (متمایز ـِ) آن اند، و D_i چندگانه‌گی یِ λ_i است. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[f(\rho)] &= \sum_i D_i\, f(\lambda_i),\\
&\ge \sum_i D_i\, \lambda_i\, f(1),\\
&= f(1),
\end{aligned} \tag{27}$$

و تساوی وقت ی و تنها وقت ی برقرار است که تنها ویژه‌مقدار ِ ناصفر ِ ρ یک با چندگانه‌گی یِ یک باشد. هم‌چنین، با تعریف ِ

$$D := \sum_i D_i, \tag{28}$$

(D بُعد ِ فضا یِ هیلبِرت [a] است) داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{D}\,\mathrm{tr}[f(\rho)] &= \sum_i \frac{D_i}{D}\, f(\lambda_i),\\ &\leq f\left(\sum_i \frac{D_i}{D}\,\lambda_i\right),\\ &= f\left(\frac{1}{D}\right),\end{aligned} \tag{29}$$

و تساوی زمان ی و فقط زمان ی برقرار است که ρ فقط یک ویژه‌مقدار داشته باشد (که برابر با D^{-1} است).

پس اگر f یک تابع ِ اکیداً‌کاو با دامنه یِ $[0,1]$ باشد که (25) را بر می‌آورَد، و ρ ماتریس ِ چگالی یِ متناظر با یک سیستم باشد،

$$\mathrm{tr}[f(\rho)] \geq f(1), \tag{30}$$

و تساوی وقت ی و فقط وقت ی برقرار است که حالت ِ سیستم خالص باشد. هم‌چنین،

$$\mathrm{tr}[f(\rho)] \leq D\, f\left(\frac{1}{D}\right), \tag{31}$$

و تساوی وقت ی و فقط وقت ی برقرار است که ماتریس ِ چگالی متناسب با یک باشد.

متناظر با هر f با ویژه‌گی‌ها یِ بالا می‌شود یک درجه یِ اختلاط ($\mathfrak{s}_f$) تعریف کرد:

$$\mathfrak{s}_f := \mathrm{tr}[f(\rho)] - f(1). \tag{32}$$

هر چه این عدد بزرگ‌تر باشد، حالت ِ سیستم مخلوط‌تر است. مخلوط‌ترین حالت آن است که ماتریس ِ چگالی متناسب با یک باشد. حالت ِ سیستم خالص است اگر و تنها اگر $\mathfrak{s}_f$ صفر باشد. روشن است که این معیار به f بسته‌گی دارد، اما مخلوط‌ترین حالت و حالت‌ها یِ خالص به f بسته‌گی ندارند. به‌طور ِ کلی،

$$0 \le \mathfrak{s}_f \le D\, f\left(\frac{1}{D}\right) - f(1), \tag{33}$$

که دوحد متناظر اند با حالت‌ها یِ خالص و مخلوط‌ترین حالت. یک انتخاب ِ معمول برا یِ f تابع ِ انتروپی (S) است:

$$S(x) := -x\, \ln x. \tag{34}$$

$S(0)$ و $S(1)$ صفر اند، و داریم

$$0 \le \mathfrak{s}_S \le D\, \ln D. \tag{35}$$

اگر حالت ِ سیستم ی خالص باشد، (23) به ازا یِ یک بردار ِ ناصفر ِ v برقرار است. پس نتیجه می‌شود به ازا یِ هر مشاهده‌پذیر ِ O،

$$\langle O\rangle = \frac{\langle v, O\, v\rangle}{\langle v, v\rangle}. \tag{36}$$

این یعنی حالت ِ سیستم را می‌شود با بردار ِ v هم مشخص کرد. در واقع حالت ِ چنین‌سیستم ی با یک زیرفضا یِ خطی یِ یک‌بُعدی یِ فضا یِ هیلبِرت [a] مشخص می‌شود.

اگر حالت ِ سیستم مخلوط باشد، داریم

$$\rho = \sum_i \lambda_i\, \frac{v_i\, v_i^\dagger}{\langle v, v\rangle}, \tag{37}$$

که v_i ها ویژه‌بردارها یِ (متعامد ِ) ماتریس ِ چگالی یِ سیستم (ρ)، و λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ متناظر اند. به این ترتیب،

$$\langle O\rangle = \sum_i \lambda_i\, \frac{\langle v_i, O\, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}. \tag{38}$$

این مقدارها یِ چشم‌داشتی شبیه ِ مقدارها یِ چشم‌داشتی یِ سیستم ی اند متشکل از چندین جزئ، که جزئ ِ i ُ م در حالت ِ خالص ِ متناظر با بردار ِ v_i است و کسر ِ λ_i از سیستم را تشکیل می‌دهد.

بر عکس، اگر سیستم ی از چندین جزئ ساخته شده باشد که جزئ ِ i ُ م در حالت ِ خالص ِ متناظر با بردار ِ v_i باشد و کسر ِ λ_i از سیستم را بسازد، آن‌گاه مقدار ِ

چشم‌داشتی یِ مشاهده‌پذیر ِ O از (38) به دست می‌آید. پس ماتریس ِ چگالی یِ سیستم به شکل ِ (37) است. توجه داریم که در این حالت لازم نیست v_i ها متعامد باشند. همین که λ_i ها حقیقی، نامنفی، و نابزرگ‌تر از یک باشند و مجموع ِشان یک باشد کافی است که ρ در (37) ویژه‌گی‌ها یِ ماتریس ِ چگالی را داشته باشد. البته اگر v_i ها متعامد نباشند، دیگر v_i ها ویژه‌بردارها و λ_i ها ویژه‌مقدارها یِ ρ نیستند. تعریف ِ ρ به شکل ِ (37) را می‌شد نقطه یِ شروع ِ تعریف ِ ماتریس ِ چگالی یِ یک سیستم گرفت که اجزا یَش در حالت‌ها یِ خالص اند. ضمناً اگر v_i ها متعامد نباشند، نوشتن ِ ρ به شکل ِ (37) یک‌تا نیست.

3 تحول

برا یِ بررسی یِ تحول ِ حالت ِ سیستم، یک راه این است که از (37) (با v_i ها یِ دل‌بخواه) شروع و توجه کنیم که اگر حالت ِ سیستم ی خالص باشد، بردار ِ مشخص‌کننده یِ حالت ِ آن با معادله یِ شْرُدینگِر [b] تحول می‌یابد:

$$v(t_0) \to v(t) = U(t, t_0)\, v(t_0), \tag{39}$$

که $v(t)$ حالت ِ سیستم در زمان ِ t و $U(t, t_0)$ عمل‌گر ِ یکانی یِ تحول از زمان ِ t_0 تا زمان ِ t است. رابطه یِ بالا را می‌شود به شکل ِ دیفرانسیلی نوشت:

$$i\,\hbar\, \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = H(t)\, v(t), \tag{40}$$

که H همیلتنی یِ سیستم است:

$$i\,\hbar\, \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H(t)\, U(t, t_0). \tag{41}$$

از (37) و (39) نتیجه می‌شود

$$\rho(t) = U(t, t_0)\, \rho(t_0)\, U^{\dagger}(t, t_0), \tag{42}$$

یا به شکل ِ دیفرانسیلی،

$$i\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}=[H(t),\rho(t)]. \tag{43}$$

می‌شود هم از این‌جا شروع کرد که در مکانیک ِ کلاسیک، مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ چگالی یِ حالت‌ها در فضا یِ فاز صفر است. ترجمه یِ این عبارت در کوانتم‌مکانیک آن است که ماتریس ِ چگالی در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [c] ثابت است:

$$\rho^{\mathrm{H}}(t)=\rho^{\mathrm{H}}(t_0). \tag{44}$$

اما داریم

$$\rho^{\mathrm{H}}(t):=U^{\dagger}(t,t_0)\,\rho(t)\,U(t,t_0). \tag{45}$$

از ترکیب ِ (44) و (45) رابطه یِ (42) نتیجه می‌شود.

به ساده‌گی دیده می‌شود تحول ِ سیستم درجه یِ اختلاط را عوض نمی‌کند:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{f[\rho(t)]\}&=\mathrm{tr}\{f[U(t,t_0)\,\rho(t_0)\,U^{\dagger}(t,t_0)]\},\\&=\mathrm{tr}\{U(t,t_0)\,f[\rho(t_0)]\,U^{\dagger}(t,t_0)\},\\&=\mathrm{tr}\{f[\rho(t_0]\}.\end{aligned} \tag{46}$$

4 سنجش

باز هم از شکل ِ (37) (با v_i ها یِ دل‌بخواه) برا یِ ρ شروع می‌کنیم. در سنجش ِ مشاهده‌پذیر ِ O، بخش ی از سیستم که با بردار ِ v_i مشخص می‌شود با احتمال ِ

$$P_{a\,i}:=\frac{\langle v_i,\mathrm{Pr}_a\,v_i\rangle}{\langle v_i,v_i\rangle} \tag{47}$$

به حالت ِ

$$v_{a\,i}:=\mathrm{Pr}_a\,v_i \tag{48}$$

می‌رود. در این‌جا

$$O = \sum_a o_a \, \mathrm{Pr}_a, \tag{49}$$

که o_a ها ویژه‌مقدارها یِ متمایز ـِ O اند، و Pr_a افکنش بر ویژه‌فضا یِ O متناظر با ویژه‌مقدار ـِ o_a است. داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}_a^\dagger &= \mathrm{Pr}_a, \\ \mathrm{Pr}_a \, \mathrm{Pr}_b &= \delta_{a\,b} \, \mathrm{Pr}_a, \\ \sum_a \mathrm{Pr}_a &= 1. \end{aligned} \tag{50}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود پس از سنجش، کسر ـِ $P_{a\,i}\,\lambda_i$ از سیستم در حالت ـِ $v_{a\,i}$ است. ماتریس ـِ چگالی پس از سنجش را با ρ' نشان می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \rho' &= \sum_{a\,i} P_{a\,i}\,\lambda_i \, \frac{v_{a\,i}\, v_{a\,i}^\dagger}{\langle v_{a,i}, v_{a\,i}\rangle}, \\ &= \sum_{a,i} \lambda_i \, \frac{\mathrm{Pr}_a\, v_i\, v_i^\dagger\, \mathrm{Pr}_a}{\langle v_i, v_i\rangle}, \end{aligned} \tag{51}$$

یا

$$\rho' = \sum_a \mathrm{Pr}_a \, \rho \, \mathrm{Pr}_a. \tag{52}$$

اثر ـِ سنجش بر درجه یِ اختلاط ـِ سیستم را بررسی می‌کنیم. فرض کنید λ_j ها ویژه‌مقدارها یِ متمایز ـِ ρ اند، و بُعد ـِ ویژه‌فضا یِ ρ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_j برابر ـِ D_j است. داریم

$$\mathrm{tr}[f(\rho)] = \sum_j D_j \, f(\lambda_j). \tag{53}$$

روشن است که

$$\rho = \sum_j \lambda_j \, \mathrm{Pr}_j, \tag{54}$$

که Pr_j افکنش بر ویژه‌فضا یِ ρ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ λ_j است. این افکنش‌ها این ویژه‌گی‌ها را دارند.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}_j^\dagger &= \mathrm{Pr}_j, \\
\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_k &= \delta_{j\,k}\,\mathrm{Pr}_j, \\
\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_j) &= D_j \\
\sum_j \mathrm{Pr}_j &= 1.
\end{aligned} \tag{55}$$

$\{e'_k \mid k\}$ را یک پایه یِ راست‌هنجار می‌گیریم که اعضا یِ آن ویژه‌بردار ِ ρ' اند. فرض کنید f یک تابع ِ اکیداً کاو است که در $[0,1]$ تعریف شده است. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}[f(\rho')] &= \sum_k f\left(\langle e'_k, \rho'\, e'_k\rangle\right), \\
&= \sum_k f\left(\sum_{a,j}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle\,\lambda_j\right), \\
&\geq \sum_{k,a,j}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle\, f(\lambda_j), \\
&= \sum_{a,j}\mathrm{tr}(\mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a)\, f(\lambda_j), \\
&= \sum_j D_j\, f(\lambda_j),
\end{aligned} \tag{56}$$

و از آن‌جا،

$$\mathrm{tr}[f(\rho')] \geq \mathrm{tr}[f(\rho)]. \tag{57}$$

در (56) از این استفاده شده که

$$\begin{aligned}
\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle &= \langle \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k, \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle, \\
&\geq 0,
\end{aligned} \tag{58}$$

و

$$\sum_{a,j}\langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\, e'_k\rangle = 1. \tag{59}$$

در رابطه ي (57)، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\forall\ (j,k)\ :\ \sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 0 \vee 1. \tag{60}$$

داریم

$$\begin{aligned}\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle &= \sum_a \langle \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k, \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle,\\ &\le \sum_a \langle \mathrm{Pr}_a\,e'_k, \mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle,\\ &= \sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle,\\ &= \langle e'_k, e'_k\rangle,\\ &= 1,\end{aligned} \tag{61}$$

و تساوی زمان ی و فقط زمان ی برقرار است که

$$\forall\ a\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k = \mathrm{Pr}_a\,e'_k. \tag{62}$$

از سو ي ديگر،

$$\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle \ge 0, \tag{63}$$

و تساوی زمان ی و فقط زمان ی برقرار است که

$$\forall\ a\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k = 0. \tag{64}$$

این یعنی

$$\begin{aligned}\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\ a\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k = \mathrm{Pr}_a\,e'_k),\\ \sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\ a\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k = 0).\end{aligned} \tag{65}$$

با جمع‌زدن عبارت‌ها یِ طرف ِ راست رو یِ a،

$$\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Pr}_j\,e'_k = e'_k,$$

$$\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Pr}_j\,e'_k = 0. \tag{66}$$

از (65) و (66) نتیجه می‌شود

$$\sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 0 \vee 1 \quad\Rightarrow\quad (\forall\ a\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k = \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,e'_k). \tag{67}$$

پس،

$$\left(\forall\ k\ :\ \sum_a \langle e'_k, \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a\,e'_k\rangle = 0 \vee 1\right) \quad\Rightarrow\quad (\forall\ a\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a = \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j). \tag{68}$$

به این ترتیب، در (57) تساوی برقرار است اگر

$$\forall\ (a,j)\ :\ \mathrm{Pr}_j\,\mathrm{Pr}_a = \mathrm{Pr}_a\,\mathrm{Pr}_j. \tag{69}$$

روشن است که اگر (69) درست باشد، ρ' و ρ برابر اند و در (57) تساوی برقرار است. ضمناً اگر (69) درست باشد، O و ρ با هم جابه‌جا می‌شوند و بر عکس، اگر O و ρ با هم جابه‌جا شوند، (69) درست است (چون Pr_a تابع ِ O و Pr_j تابع ِ ρ است). نتیجه این که اگر f یک تابع ِ اکیداًکاو باشد که در $[0,1]$ تعریف شده، آن‌گاه

$$\mathrm{tr}[f(\rho')] = \mathrm{tr}[f(\rho)] \quad\Leftrightarrow\quad \rho' = \rho \quad\Leftrightarrow\quad [O,\rho] = 0. \tag{70}$$

5 مرجع‌ها

[1] Jun John Sakurai; “Modern quantum mechanics”, (Addison-Wesley, 1995)

[2] Leslie E. Ballentine; “Quantum mechanics”, (Prentice-Hall, 1990)

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Hilbert

[b] Schrödinger

[c] Heisenberg