X1-031 (2005/06/30)

دیوار ِ صوتی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

موج ِ حاصل از متحرک ی بررسی می‌شود که سرعت ِ آن بیش از سرعت ِ انتشار ِ موج در محیط است. نشان داده می‌شود این موج فقط درون ِ یک مخروط غیرِصفر ماخ است و (اگر بُعد ِ فضا بیش از دو باشد) رو یِ سطح ِ این مخروط واگرا می‌شود.

0 مقدمه

متحرک ی را در نظر بگیرید که با سرعت ِ ثابت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. این حرکت آشفته‌گی یی در محیط درست می‌کند که به شکل ِ موج منتشر می‌شود. فرض کنید محیط می‌تواند یک موج ِ اسکالر را بدون ِ پاشنده‌گی منتشر کند. سرعت ِ انتشار ِ این موج را c می‌گیریم. در این صورت معادله یِ این موج می‌شود

$$\left(-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla\cdot\nabla\right)\,\psi(t,\mathbf{r})=s(t,\mathbf{r}), \qquad (1)$$

که s چشمه یِ موج است. این چشمه فقط در محل ِ متحرک غیرِصفر است. پس می‌شود آن را متناسب با $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}\,t)$ گرفت. تغییردادن ِ ضریب ِ تناسب هم فقط موج را در یک ثابت ضرب می‌کند. پس معادله یِ موج ِ حاصل از متحرک ی که با سرعت ِ ثابت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند، می‌شود

$$\left(-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial^2 t}+\nabla\cdot\nabla\right)\,\psi(t,\mathbf{r})=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}\,t). \tag{2}$$

می‌خواهیم رفتار ِ ψ را در دو حالت که v کوچک‌تر از c یا بزرگ‌تر از c است بررسی کنیم.

1 موج در فضا یِ سه‌بُعدی

تابع ِ گرین [a] ِ تئخیری یِ معادله یِ موج در فضا یِ سه‌بُعدی

$$G_{\mathrm{R}}(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{4\,\pi\,r}\,\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{3}$$

است [1]. از این‌جا جواب ِ (2) در سه‌بُعد می‌شود

$$\begin{aligned}\psi(t,\mathbf{r})&=\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}t'\;\frac{-1}{4\,\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\,\delta(\mathbf{r}'_\perp)\,\delta(z'-v\,t'),\\ &=\frac{-1}{4\,\pi}\int \mathrm{d}z'\;\frac{\delta[z'-v\,t+\beta\,\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}]}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}},\end{aligned} \tag{4}$$

که در آن محور ِ z مسیر ِ حرکت ِ ذره و $\mathbf{r}_\perp$ تصویر ِ $\mathbf{r}$ بر صفحه یِ عمود بر محور ِ z است،

$$\rho:=\sqrt{\mathbf{r}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp} \tag{5}$$

فاصله یِ نقطه یِ مشاهده تا مسیر ِ متحرک است، و

$$\beta:=\frac{v}{c}. \tag{6}$$

از (4) نتیجه می‌شود

$$\psi(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{4\,\pi}\sum_i\;\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-\xi_i)^2}}\;\frac{1}{|f'(\xi_i)|}, \tag{7}$$

که

$$\begin{aligned}\zeta&:=z-v\,t,\\ f(\xi)&:=\xi+\beta\,\sqrt{\rho^2+(\zeta-\xi)^2},\end{aligned} \tag{8}$$

و ξ_i ها جواب‌ها یِ معادله یِ

$$f(\xi_i)=0 \tag{9}$$

اند.

داریم

$$f'(\xi)=1+\beta\,\frac{\xi-\zeta}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-\xi)^2}}. \tag{10}$$

به این ترتیب،

$$\psi(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{4\,\pi\,\beta}\sum_i\frac{1}{|\zeta+(\beta^{-2}-1)\,\xi_i|}. \tag{11}$$

از معادله یِ (9) نتیجه می‌شود

$$(1-\beta^{-2})\,\xi_i^2-2\,\zeta\,\xi_i+\rho^2+\zeta^2=0, \tag{12}$$

که جواب‌ها یِ آن

$$\xi_i=\frac{\zeta\pm\sqrt{\beta^{-2}\,\zeta^2+(\beta^{-2}-1)\,\rho^2}}{1-\beta^{-2}} \tag{13}$$

است. البته (12) با (9) هم‌ارز نیست. جواب‌ها یِ (13) به شرط ی (9) را بر می‌آورند که نامثبت باشند. با گذاشتن ِ (13) در (11) نتیجه می‌شود

$$\psi(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{4\,\pi}\sum_i\frac{1}{\sqrt{\zeta^2+(1-\beta^2)\,\rho^2}}. \tag{14}$$

1.1 حرکت با سرعت ی کوچک‌تر از سرعت ِ موج

در این حالت $\beta<1$ است و معادله یِ (12) حتماً دو ریشه یِ حقیقی دارد که یک ی از آن‌ها مثبت و دیگری منفی است. پس

$$\psi(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(z-v\,t)^2+(1-\beta^2)\,\rho^2}}. \tag{15}$$

این موج همه یِ فضازمان را پر کرده است. در این حالت با یک تبدیلِ‌مختصات ِ ساده می‌شد همین جواب را به دست آورد. کافی است بگیریم

$$
\begin{aligned}
\tilde{t} &:= \gamma\, [t - (\beta/c)\, z],\\
\tilde{z} &:= \gamma\, (z - v\, t),\\
\tilde{\mathbf{r}}_\perp &:= \mathbf{r}_\perp,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

که

$$
\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{17}
$$

این یک تبدیل ِ لُرِنتس [b] است (البته c سرعت ِ نور نیست، سرعت ِ موج ی است که در محیط منتشر می‌شود). با این تبدیل، (2) می‌شود

$$
\left(-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2} + \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\nabla}\right)\,\psi = \gamma\,\delta(\tilde{\mathbf{r}}). \tag{18}
$$

چشمه به $\tilde{t}$ بسته‌گی ندارد. پس جواب ِ (18) می‌شود

$$
\begin{aligned}
\psi &= -\frac{\gamma}{4\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\tilde{z}^2+\tilde{\rho}^2}},\\
&= -\frac{\gamma}{4\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\gamma^2\,\zeta^2+\rho^2}},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

که همان (15) است.

1.2 حرکت با سرعت ی بزرگ‌تر از سرعت ِ موج

در این حالت $\beta > 1$ است و معادله یِ (12) ممکن است دو ریشه یِ حقیقی داشته باشد یا ریشه یِ حقیقی نداشته باشد. اما اگر این معادله ریشه یِ حقیقی داشته باشد، دوریشه اَش هم‌علامت اند. ریشه‌ها یِ نامثبت ِ (12) اند که ریشه یِ (9) اند. پس شرط ِ این که (9) ریشه یِ حقیقی داشته باشد می‌شود

$$
\begin{aligned}
\beta^{-2}\,\zeta^2 - (1-\beta^{-2})\,\rho^2 &\geq 0,\\
\zeta &\leq 0,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

که می‌شود آن را نوشت

$$z - v\,t \leq -\sqrt{\beta^2 - 1}\,\rho. \tag{21}$$

با تعریف ِ

$$\sin\alpha := \frac{1}{\beta}, \tag{22}$$

رابطه ی ِ (21) می‌شود

$$v\,t - z \geq \rho\,\cot\alpha. \tag{23}$$

مرز ِ این ناحیه (جا یی که تساوی برقرار است) یک مخروط است که به آن مخروط ِ ماخ [c] می‌گویند. رئس ِ این مخروط رو ی ِ متحرک، محور ِ این مخروط موازی ی ِ $-\mathbf{v}$، و نیم‌زاویه ی ِ رئس ِ آن α است.

به این ترتیب، تابع ِ موج می‌شود

$$\psi(t,\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(z - v\,t)^2 - \rho^2\,\cot^2\alpha}}\,\theta(v\,t - z - \rho\,\cot\alpha). \tag{24}$$

دیده می‌شود این موج فقط درون ِ مخروط ِ ماخ [c] غیرِصفر است.

2 موج در فضا ی ِ با بُعد ِ دل‌بخواه

تغییرِمختصات ی شبیه به (16) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &:= \lambda\,[t - (\beta/c)\,z],\\
\bar{z} &:= \chi\,\lambda\,(z - v\,t),\\
\bar{\mathbf{r}}_\perp &:= \mathbf{r}_\perp,
\end{aligned} \tag{25}$$

که در آن

$$\lambda := \frac{1}{\sqrt{|1 - \beta^2|}}, \tag{26}$$

و

$$\chi = \begin{cases} +1, & \beta < 1 \\ -1, & \beta > 1 \end{cases}. \tag{27}$$

با استفاده از (25)، معادله ي (2) می‌شود

$$\left[\bar{\nabla}_\perp \cdot \bar{\nabla}_\perp + \chi\,\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}\right)\right]\,\psi = \lambda\,\delta(\bar{\mathbf{r}}), \tag{28}$$

طرف ِ راست ِ (28) تابع ِ $\bar{t}$ نیست. پس می‌شود جواب ِ معادله را مستقل از $\bar{t}$ گرفت. به این ترتیب (28) می‌شود

$$\left(\bar{\nabla}_\perp \cdot \bar{\nabla}_\perp + \chi\,\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)\,\psi = \lambda\,\delta(\bar{\mathbf{r}}). \tag{29}$$

در حالت ِ $\beta < 1$، (29) یک معادله ي لَپلَس [d] در D بُعد است و جواب ِ آن می‌شود

$$\psi(t,\mathbf{r}) = \gamma\,G_{\mathrm{E}}^{(D)}(\tilde{\mathbf{r}}), \tag{30}$$

که $G_{\mathrm{E}}^{(D)}$ تابعِ‌گرین [a]ِ معادله ي لَپلَس [d] در بُعد ِ D است [1]. روشن است که در این حالت تبدیل ِ (25) همان تبدیل ِ (16) است. دیده می‌شود (19) حالت ِ خاص ِ (30) است.

در حالت ِ $\beta > 1$، معادله ي (29) یک معادله ي موج در فضا ي $(D-1)$ بُعدی است. جواب ِ این معادله می‌شود

$$\psi(t,\mathbf{r}) = \lambda\,G_{\mathrm{R}}^{(D-1)}(\bar{z},\bar{\mathbf{r}}_\perp). \tag{31}$$

ما دنبال ِ جواب ِ تئخیر ی (بر حسب ِ t) برا ي معادله ي (2) بودیم. اما از تبدیل ِ (25) دیده می‌شود در $t \to -\infty$ (که ψ باید صفر باشد) $\bar{z} \to -\infty$. پس ψ باید در $\bar{z} \to -\infty$ صفر باشد که می‌گوید ψ بر حسب ِ $\bar{z}$ هم تئخیری است.

از شکل ِ تابعِ‌گرین [a]ِ تئخیری ي معادله ي موج ([1]) دیده می‌شود ψ صفر است مگر

$$\bar{z} \geq |\bar{\mathbf{r}}_\perp|. \tag{32}$$

با استفاده از

$$\bar{z} = \frac{v\,t - z}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \qquad \beta > 1, \tag{33}$$

دیده می‌شود شرط ِ (32) در واقع همان شرط ِ (23) است. داریم

$$\lambda = \tan\alpha, \tag{34}$$

و از آن‌جا (33) را می‌شود نوشت

$$\bar{z} = (v\,t - z)\,\tan\alpha. \tag{35}$$

از این‌جا (31) در حالت ِ $D = 3$ می‌شود

$$\psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{\tan\alpha}{2\,\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(z - v\,t)^2\,\tan^2\alpha - \rho^2}}\,\theta[(v\,t - z)\,\tan\alpha - \rho], \tag{36}$$

که همان (24) است.

از شکل ِ تابعِ گرین ِ تئخیری در فضا یِ $(D-1)$ بُعدی ([1]) دیده می‌شود برا یِ D ها یِ بزرگ‌تر از یا مساوی با 3، تابع ِ موج رو یِ مخروط ِ ماخ [c] بی‌نهایت می‌شود. ضمناً معلوم می‌شود برا یِ D ها یِ زوج و بزرگ‌تر از 3، تابع ِ موج فقط رو یِ مخروط ِ ماخ [c] غیرِصفر است (نَه تنها بیرون ِ مخروط ِ ماخ [c] صفر است، درون ِ مخروط ِ ماخ [c] هم صفر است).

یک حالت ِ خاص ِ مهم ِ دیگر $D = 2$ اند. در این حالت از [1] دیده می‌شود

$$\psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2}\,\theta[(v\,t - z)^2\,\tan^2\alpha - \rho^2]\,\theta(t),$$

$$= -\frac{\tan\alpha}{2}\,\theta(v\,t - z - \rho\,\cot\alpha). \tag{37}$$

این یعنی تابع ِ موج درون ِ مخروط ِ ماخ [c] ثابت است.

3 مرجع

[1] محمد خرمی؛ " تابعِ گرین ِ معادله یِ موج در بعدها یِ مختلف"،
X1-002 (2001/04/01)

4 اسم‌ها یِ خاص

[a] Green

[b] Lorentz

[c] Mach

[d] Laplace