X1-032 (2005/07/30)

حرکت ِ بار در میدان ِ الکترومغناطیسی یِ یک‌نواخت و ثابت

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

با استفاده از ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها یِ تانسور ِ میدان ِ الکترومغناطیسی، ویژه‌گی‌ها یِ کیفی یِ حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ الکترومغناطیسی یِ یک‌نواخت و ثابت بررسی می‌شود.

0 مقدمه

معادله یِ حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ الکترومغناطیسی

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{m}\, F^\mu{}_\nu\, u^\nu \tag{1}$$

است، که u چاربردار ِ سرعت ِ ذره، q بار ِ آن، m جرم ِ آن، τ ویژه‌زمان، و F تانسور ِ میدان ِ الکترومغناطیسی است. این‌ها در مثلاً [1] پیدا می‌شود. داریم

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu, \tag{2}$$

که A چاربردار ِ پتانسیل است. قراردادها یی که در این نوشته به کار می‌رود این است

$$
\begin{aligned}
c &= 1, \\
\eta_{00} &= -1, \\
F_{i0} &= E_i, \\
F_{ij} &= \epsilon_{ijk}\, B^k, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

که c سرعت ِ نور، η متریک ِ فضازمان، $\mathbf{E}$ میدان ِ الکتریکی، $\mathbf{B}$ میدان ِ مغناطیسی، و ϵ تانسور ِ لِوی‌چیویتا [a] است. چاربردارها با حرف‌ها یِ ایتالیک، و سه‌بردارها با حرف‌ها یِ سیاه نشان داده می‌شوند. شاخص‌ها یِ یونانی مقدارها یِ 0 تا 3، و شاخص‌ها یِ لاتین مقدارها یِ 1 تا 3 را می‌گیرند.

یک حالت ِ خاص ِ معادله یِ (1) این است که میدان ِ الکترومغناطیسی مستقل از مکان و زمان است. در این حالت معادله یِ (1) یک معادله یِ خطی با ضریب‌ها یِ ثابت است. حالت‌ها یِ از این خاص‌تر هم این اند که میدان ِ الکتریکی صفر است، یا میدان ِ مغناطیسی صفر است، یا میدان ِ مغناطیسی بر میدان ِ الکتریکی عمود است. این‌ها هم در مثلاً [1] بررسی شده اند. اگر میدان ِ الکتریکی صفر (و میدان ِ مغناطیسی مستقل از مکان و زمان) باشد، مسیر ِ ذره یک مارپیچ است. اگر میدان ِ مغناطیسی صفر (و میدان ِ الکتریکی مستقل از مکان و زمان) باشد، دو مئلفه یِ چاربردار ِ سرعت ثابت می‌مانند و بسته‌گی یِ دومئلفه یِ دیگر به ویژه‌زمان نمایی است. اگر هم میدان‌ها یِ الکتریکی و مغناطیسی مستقل از مکان و زمان و برهم عمود باشند، با یک خیز ِ لُرِنتس [b] می‌شود مسئله را به یک ی از دوحالت ِ پیش تبدیل کرد: اگر میدان ِ مغناطیسی بزرگ‌تر باشد، با این تبدیل می‌شود میدان ِ الکتریکی را صفر کرد؛ و اگر میدان ِ الکتریکی بزرگ‌تر باشد، با این تبدیل می‌شود میدان ِ مغناطیسی را صفر کرد. به این ترتیب، حرکت ِ ذره یک ی از حرکت‌ها یِ قبلی می‌شود که خیزیده است.

یک تفاوت ِ مهم ِ حالت ِ میدان ِ الکتریکی یِ صفر و حالت ِ میدان ِ مغناطیسی یِ صفر این است که در حالت ِ اول مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ سرعت بزرگ نمی‌شوند بل که تغییرات ِشان با ویژه‌زمان نوسانی است؛ اما در حالت ِ دوم تغییرات ِ مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ سرعت با ویژه‌زمان نمایی است. این پدیده‌ها به این مربوط اند ویژه‌مقدارها یِ ماتریس ی که در طرف ِ راست ِ معادله یِ (1) ظاهر می‌شود، در حالت ِ اول موهومی یِ محض و در

حالت ِ دوم حقیقی اند. هدف ِ این نوشته هم بررسی یِ حرکت ِ یک ذره یِ باردار در یک میدان ِ الکترومغناطیسی یِ مستقل از مکان و زمان، از این دیدگاه است. در بقیه یِ این متن، میدان ِ الکترومغناطیسی یی که ذره در آن حرکت می‌کند مستقل از مکان و زمان در نظر گرفته می‌شود.

1 جواب ِ معادله یِ حرکت

جواب ِ معادله یِ (1) می‌شود

$$u(\tau) = U(\tau)\, u(0), \tag{4}$$

که

$$U(\tau) := \exp\left(\frac{q\,\tau}{m}\,F\right) \tag{5}$$

این نشان می‌دهد رابطه یِ $u(\tau)$ با $u(0)$ یک تبدیل ِ لُرِنتس [b] است. کافی است توجه کنیم که F پادمتقارن است، به این معنی که

$$F_\nu{}^\mu = -F^\mu{}_\nu. \tag{6}$$

پس می‌شود F را به شکل ِ یک ترکیب ِ خطی از مولدها یِ گروه ِ لُرِنتس [b] نوشت. در واقع،

$$F = \mathbf{E}\cdot\mathbf{K} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{J}, \tag{7}$$

که K_i ها مولدها یِ خیز ِ لُرِنتس [b] و J_i ها مولدها یِ چرخش اند. به این ترتیب روشن است که اگر میدان ِ الکتریکی صفر باشد، حرکت ِ بردار ِ سرعت چرخش ی با سرعت ِ زاویه‌ای یِ

$$\boldsymbol{\omega} := -\frac{q}{m}\,\mathbf{B} \tag{8}$$

است. اگر میدان ِ مغناطیسی صفر باشد، بردار ِ سرعت در τ خیزیده یِ بردار ِ سرعت در زمان ِ صفر است، و تندی یِ این خیز

$$\boldsymbol{\alpha} := \frac{q\,\tau}{m}\,\mathbf{E} \tag{9}$$

است.

در هر یک از دوحالت، ماتریس ِ F دو ویژه‌مقدار ِ صفر و دو ویژه‌مقدار ِ غیرِصفر قرینه یِ هم دارد. اگر $\mathbf{E}$ صفر باشد، ویژه‌بردارها یِ F متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر

$$v_0 = a\,n + b\,u(\mathbf{B}) \tag{10}$$

اند، که

$$n^\mu := \delta^\mu_0, \tag{11}$$

و $u(\mathbf{B})$ بردار ی است که بخش ِ فضایی یَش همان $\mathbf{B}$ و بخش ِ زمانی یَش صفر است. a و b ثابت‌ها یی دل‌بخواه اند. معنی یِ این ویژه‌بردارها هم روشن است. میدان ِ مغناطیسی انرژی یِ ذره را عوض نمی‌کند، پس مئلفه یِ صفر ِ بردار ِ سرعت ِ ذره عوض نمی‌شود. ضمناً نیرو یِ حاصل از میدان ِ مغناطیسی، در جهت ِ خود ِ میدان مئلفه ندارد. پس مئلفه یِ سرعت در جهت ِ میدان ِ مغناطیسی هم عوض نمی‌شود. دوویژه‌مقدار ِ دیگر ِ ماتریس ِ F در این حالت،

$$\lambda = \pm\, i\,\frac{q\,B}{m},$$

$$= \pm\, i\,\omega \tag{12}$$

اند. از این‌جا ویژه‌مقدارها یِ $U(\tau)$ می‌شوند

$$\Lambda(\tau) = \exp\left(\pm\, i\,\frac{q\,B}{m}\right),\ 1,\ 1. \tag{13}$$

همه یِ این ویژه‌مقدارها فاز اند. پس با تغییر ِ τ مئلفه‌ها یِ بردار ِ سرعت بسیار بزرگ نمی‌شوند.

اگر میدان ِ مغناطیسی صفر باشد، باز هم F دو ویژه‌مقدار ِ صفر دارد. در این حالت ویژه‌بردارها یِ متناظر می‌شوند

$$v_0 = a\,u(\mathbf{e}_1) + b\,u(\mathbf{e}_2), \tag{14}$$

که $\mathbf{e}_i$ ها بردارها یی عمود بر $\mathbf{E}$ اند. این یعنی با تغییر ِ τ مئلفه‌ها یی از سرعت که بر میدان ِ الکتریکی عمود اند تغییر نمی‌کنند. دوویژه‌مقدار ِ دیگر ِ ماتریس ِ F در این

حالت

$$\lambda = \pm \frac{q\,E}{m} \tag{15}$$

اند. از این‌جا ویژه‌مقدارها یِ $U(\tau)$ می‌شوند

$$\Lambda(\tau) = \exp\left(\pm \frac{q\,E}{m}\right),\ 1,\ 1. \tag{16}$$

اندازه یِ یک ی از این ویژه‌مقدارها بزرگ‌تر از یک است و با افزایش ِ τ به‌طور ِ نمایی زیاد می‌شود. پس در این حالت (بخش ی از) مئلفه‌ها یِ بردار ِ سرعت، با افزایش ِ τ به‌طور ِ نمایی بزرگ می‌شوند.

در حالت ِ کلی هم که هیچ یک از میدان‌ها یِ الکتریکی و مغناطیسی صفر نیست، با تعیین ِ ویژه‌مقدارها یِ F (در واقع با تعیین ِ شکل ِ ژُردَن [c] ِ F) می‌شود فهمید مئلفه‌ها یِ سرعت با افزایش ِ τ بزرگ می‌شوند یا نَه.

2 معادله یِ مشخصه یِ تانسور ِ میدان

ویژه‌مقدارها یِ F ریشه‌ها یِ این معادله اند.

$$C_F(\lambda) = 0, \tag{17}$$

که

$$C_F(z) := \det(z - F). \tag{18}$$

برا یِ هر ماتریس ِ M داریم

$$\det(M^*) = \det(M), \tag{19}$$

که M^* پس‌آر ِ M است:

$$(M^*)_\mu{}^\nu := M^\nu{}_\mu. \tag{20}$$

از ترکیب ِ (19) با (6) نتیجه می‌شود

$$\det(z - F) = \det(z + F), \tag{21}$$

و از آن (چون بُعد ِ فضازمان و در نتیجه بُعد ِ F زوج است)،

$$C_F(-z) = C_F(z). \tag{22}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود C_F یک چندجمله‌ای ي زوج از درجه ي چهار است. پس برا ي تعیین ِ آن کافی است ضریب‌ها ي z^2 و z^0 را بدانیم. L را یک تبدیل ِ لُرِنتس [b] ِ دل‌بخواه بگیرید. در این صورت،

$$C_{F'} = C_F, \tag{23}$$

که

$$F' := L\,F\,L^{-1}. \tag{24}$$

اما از این رابطه یا

$$F'^{\mu}{}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha}\,L_{\nu}{}^{\beta}\,F^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{25}$$

نتیجه می‌شود میدان‌ها ي $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{B}'$ که در F' ظاهر می‌شوند، تبدیل‌یافته ي میدان‌ها ي $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ تحت ِ L اند. در نوشتن ِ (25) از این استفاده شده که

$$(L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = L_{\nu}{}^{\mu}. \tag{26}$$

نتیجه این که C_F، با اعمال ِ تبدیل ِ لُرِنتس [b] بر F تغییر نمی‌کند. پس ضریب‌ها ي آن باید تابع‌ها یی از F باشند که تحت ِ تبدیل ِ لُرِنتس [b] تغییر نکنند. دو تابع ِ مستقل از این نوع هست:

$$\begin{aligned} Q_1 &:= F^{\mu\nu}\,F_{\mu\,\nu}, \\ Q_2 &:= (\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,F^{\mu\nu}\,F^{\rho\sigma})^2. \end{aligned} \tag{27}$$

(اگر فقط تبدیل‌هايِ‌لُرِنتس [b] ی را در نظر بگیریم که دترمینان ِشان یک باشد، جذر ِ Q_2 هم تحت ِ تبدیل عوض نمی‌شود. اما تحت ِ تبدیل‌ها یی که دترمینان ِشان منفی ي یک است، جذر ِ Q_2 تغییرِعلامت می‌دهد.) بر حسب ِ میدان‌ها ي الکتریکی و مغناطیسی، Q_1 و Q_2 می‌شوند

$$Q_1 := 2\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}),$$
$$Q_2 := (8\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2. \tag{28}$$

ضمناً می‌دانیم ضریب ِ z^2 در C_F یک چندجمله‌ای یِ درجه یِ دو از میدان‌ها یِ الکتریکی و مغناطیسی، و ضریب ِ z^0 در C_F یک چندجمله‌ای یِ درجه یِ چهار از میدان‌ها یِ الکتریکی و مغناطیسی است. از این‌جا معلوم می‌شود

$$C_F(z) = z^4 + f\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,z^2 + g\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2 + h\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E})^2. \tag{29}$$

اگر میدان ِ الکتریکی صفر باشد، دو تا از ریشه‌ها یِ C_F صفر اند. پس در این حالت ضریب ِ z^0 باید صفر باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود h صفر است. برا یِ تعیین ِ f و g هم کافی است یک مثال ِ ساده بگیریم، مثلاً این که میدان‌ها یِ الکتریکی و مغناطیسی موازی یِ هم باشند. نتیجه می‌شود

$$f = 1,$$
$$g = -1, \tag{30}$$

و از آن‌جا،

$$C_F(z) = z^4 + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,z^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2. \tag{31}$$

البته این نتیجه را با محاسبه یِ مستقیم هم می‌شد به دست آورد.

3 ویژه‌گی‌ها یِ کیفی یِ حرکت

معادله یِ مشخصه یِ F یک معادله یِ دومجذوری است، پس ریشه‌ها یِ آن دوبه‌دو قرینه یِ هم اند. از رو یِ این ریشه‌ها، جواب ِ معادله یِ حرکت در حالت‌ها یِ مختلف را بررسی می‌کنیم.

I $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}\neq 0$

در این حالت معادله ي ِ مشخصه برا ي ِ λ^2 یک جواب ِ مثبت و یک جواب ِ منفی دارد. پس از چهارریشه ي ِ این معادله دوتا موهومی ي ِ محض اند، یک ی حقیقی و منفی است، و یک ی حقیقی و مثبت. به خاطر ِ این ریشه ي ِ حقیقی ي ِ مثبت (بخش ی از) مئلفه‌ها ي ِ سرعت با گذشت ِ زمان بسیار بزرگ می‌شوند. پس با گذشت ِ زمان، انرژی ي ِ ذره به‌طور ِ نامحدود زیاد می‌شود.

II $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}>0.$

در این حالت برا ي ِ λ^2 یک جواب ِ صفر و یک جواب ِ منفی به دست می‌آید. پس دوویژه‌مقدار ِ صفر و دوویژه‌مقدار ِ موهومی ي ِ محض داریم. ویژه‌بردارها ي ِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر می‌شوند

$$v_0 = a\,u(\mathbf{B}) + b\,[\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\,n + u(\mathbf{E}\times\mathbf{B})]. \tag{32}$$

دیده می‌شود متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر دو ویژه‌بردار ِ خطی‌مستقل هست، پس F قطری‌شدنی است. ضمناً در حالت ِ خاص ِ $\mathbf{E}=0$، این دوویژه‌بردار به شکل ِ رابطه ي ِ (10) در می‌آیند. چون بخش‌ِحقیقی ي ِ هیچ یک از ویژه‌مقدارها مثبت نیست، با گذشت ِ زمان انرژی ي ِ ذره به‌طور ِ نامحدود زیاد نمی‌شود.

در این حالت می‌شود a و b را چنان گرفت که v_0 سرعت ِ یک ذره باشد. برا ي ِ این کار کافی است مئلفه ي ِ زمانی ي ِ سرعت مثبت باشد و

$$v_0\cdot v_0 = -m^2. \tag{33}$$

از رابطه ي ِ اخیر نتیجه می‌شود

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,b^2-(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\,a^2=m^2, \tag{34}$$

که به ازا ي ِ هر a، برا ي ِ b جواب ِ حقیقی دارد. کافی است جواب ِ مثبت ِ b را بگیریم. پس ذره ي ِ باردار ی هست که سرعت َ ش در چنین‌میدان ی ثابت بماند.

III $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}<0.$

در این حالت برا ي ِ λ^2 یک جواب ِ صفر و یک جواب ِ مثبت به دست می‌آید. پس

دوویژه‌مقدار ِ صفر و دوویژه‌مقدار ِ حقیقی ی ِ قرینه ی ِ هم داریم. ویژه‌بردارها ی ِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر می‌شوند

$$v_0 = a\,[(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,u(\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,n] + b\,[(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,u(\mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,n], \quad (35)$$

که $\mathbf{e}_i$ ها بردارها یی عمود بر $\mathbf{E}$ اند. دیده می‌شود متناظر با ویژه‌مقدار ِ صفر دو ویژه‌بردار ِ خطی‌مستقل هست، پس F قطری‌شدنی است. ضمناً در حالت ِ خاص ِ $\mathbf{B} = 0$، این دوویژه‌بردار به شکل ِ رابطه ی ِ (14) در می‌آیند. هم‌چنین، اگر $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ هیچ یک صفر نباشند، (32) و (35) یک‌سان اند. کافی است بگیریم

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 &= \mathbf{B},\\ (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{e}_2 &= \mathbf{E}\times\mathbf{B}.\end{aligned} \quad (36)$$

چون بخش ِ حقیقی ی ِ یک ی از ویژه‌مقدارها مثبت است، با گذشت ِ زمان انرژی ی ِ ذره به‌طور ِ نامحدود زیاد می‌شود.

در این حالت نمی‌شود v_0 را بردار ِ سرعت ِ یک ذره گرفت. چون از شرط ِ (33) و به ازا ی ِ $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ ِ یکه و عمودبرهم، نتیجه می‌شود

$$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\,(a^2 + b^2) = -m^2, \quad (37)$$

که برا ی ِ a و b جواب ِ حقیقی ندارد. پس هیچ ذره ی ِ باردار ی نیست که سرعت َ ش در چنین‌میدان ی ثابت بماند.

IV $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = 0.$

در این حالت هرچهارریشه ی ِ معادله ی ِ مشخصه صفر اند. اگر میدان ِ الکترومغناطیسی صفر باشد، مسئله ساده است و بردار ِ سرعت تغییر نمی‌کند. پس فقط حالت ی را در نظر می‌گیریم که میدان‌ها ی ِ الکتریکی و مغناطیسی هم‌اندازه و عمود بر هم اند. در این حالت F صفر نیست و چون تنهاویژه‌مقدارها ی ِ آن صفر اند، قطری‌شدنی نیست. در واقع F پوچ‌توان است و داریم

$$F^3 = 0. \quad (38)$$

از این‌جا معلوم می‌شود

$$U(\tau) = 1 + \frac{q\,\tau}{m}\,F + \frac{q^2\,\tau^2}{2\,m}\,F^2. \qquad (39)$$

پس در این حالت هم (بخش ی از) مئلفه‌ها یِ سرعت با گذشت ِ زمان به‌طور ِ نامحدود زیاد می‌شوند، و در نتیجه با گذشت ِ زمان انرژی به‌طور ِ نامحدود زیاد می‌شود، البته نَه به شکل ِ نمایی بل که به شکل ِ چندجمله‌ای. در این حالت هم ذره یِ باردار ی نیست که سرعت َ ش ثابت بماند، چون در این وضعیت طرف ِ چپ ِ معادله یِ (37) صفر می‌شود، در حال ی که طرف ِ راست ِ این معادله منفی است.

4 مرجع

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 12

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Levi-Civita

[b] Lorentz

[c] Jordan