X1-034 (2005/11/08)

نمایش‌ها یِ اسپینوری یِ $\mathrm{so}(4)$

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

دونمایش ـِ اسپینوری یِ جبر ـِ دوران‌ها یِ چهاربُعدی، و حاصلِ‌ضرب‌ها یِ تانسوری یِ این نمایش‌ها در هم بررسی می‌شوند. نمایش‌ها یِ حاصلِ‌ضرب بر حسب ـِ نمایش‌ها یِ برداری و تانسوری یِ جبر ـِ دوران‌ها یِ چهاربُعدی بیان می‌شوند.

1 جبر ـِ دوران

گروه ـِ دوران‌ها یِ n بُعدی عبارت است از مجموعه یِ ماتریس‌ها یِ $n\times n$ ـِ متعامد (نسبت به متریک ـِ δ) با دترمینان ـِ یک. می‌گوییم ماتریس ـِ R نسبت به متریک ـِ g متعامد است، اگر

$$g_{\mu\,\nu}\,R^{\mu}{}_{\rho}\,R^{\nu}{}_{\sigma}=g_{\rho\,\sigma}. \tag{1}$$

گروه ـِ دوران‌ها یِ n بُعدی را با $\mathrm{SO(n)}$ نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم

$$R=:1+r. \tag{2}$$

اگر R نزدیک به یک باشد (یعنی r کوچک باشد)، رابطه یِ بالا تا اول‌ین مرتبه نسبت به r می‌شود

$$r_{\mu\,\nu}+r_{\nu\,\mu}=0, \tag{3}$$

که بالاوپایین‌بردن ِ شاخص‌ها با g انجام شده. این یعنی r با دو شاخص ِ پایین پادمتقارن است. مجموعه یِ ماتریس‌ها یِ $n\times n$ ِ r با ویژه‌گی یِ (3)، با جبر ِ so(4) (جبر ِ دوران‌ها یِ چهاربُعدی) یک‌ریخت است. برا یِ این مجموعه می‌شود یک پایه یافت. می‌نویسیم

$$r=:\frac{1}{2}\,r^{\nu\,\mu}\,J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu}, \tag{4}$$

که $J^{\mathrm{D}}_{\nu\,\mu}$ ها ماتریس‌ها یی $n\times n$ اند که نسبت به μ و ν پادمتقارن اند. از (4) نتیجه می‌شود

$$r_{\alpha\,\beta}=\frac{1}{2}\,r^{\nu\,\mu}\,\left(J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu}\right)_{\alpha\,\beta}. \tag{5}$$

داریم

$$r_{\alpha\,\beta}=r^{\nu\,\mu}\,g_{\alpha\,\nu}\,g_{\beta\,\mu},$$

$$=\frac{1}{2}\,r^{\nu\,\mu}\,\left(g_{\alpha\,\nu}\,g_{\beta\,\mu}-g_{\alpha\,\mu}\,g_{\beta\,\nu}\right). \tag{6}$$

از مقایسه یِ (5) با (6) نتیجه می‌شود

$$\left(J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu}\right)_{\alpha\,\beta}=g_{\alpha\,\nu}\,g_{\beta\,\mu}-g_{\alpha\,\mu}\,g_{\beta\,\nu}, \tag{7}$$

یا (با بالابردن ِ شاخص ِ α)،

$$\left(J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu}\right)^{\alpha}{}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\nu}\,g_{\beta\,\mu}-\delta^{\alpha}_{\mu}\,g_{\beta\,\nu}. \tag{8}$$

وقت ی g همان δ باشد، مجموعه یِ ماتریس‌ها یِ r با ویژه‌گی یِ (3) یک نمایش ِ جبر ِ دوران‌ها یِ n بُعدی است (نمایش ِ تعریف‌کننده)، و $J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu}$ ها مولدها یِ این نمایش اند. به‌ساده‌گی می‌شود جابه‌جاگر ِ این مولدها با هم را حساب کرد:

$$[J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu},J^{\mathrm{D}}_{\rho\,\sigma}]=g_{\mu\,\rho}\,J^{\mathrm{D}}_{\nu\,\sigma}-g_{\nu\,\rho}\,J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\sigma}+g_{\mu\,\sigma}\,J^{\mathrm{D}}_{\rho\,\nu}-g_{\nu\,\sigma}\,J^{\mathrm{D}}_{\rho\,\mu}. \tag{9}$$

به این ترتیب جابه‌جاگر ِ مولدها ی ِ جبر ِ دوران ($J_{\mu\nu}$ ها) می‌شود

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\rho}\, J_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho}\, J_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\, J_{\rho\nu} - \delta_{\nu\sigma}\, J_{\rho\mu}. \tag{10}$$

2 نمایش‌ها ی ِ اسپینوری ی ِ جبر ِ دوران

دو فضا ی ِ خطی ی ِ $\mathbb{V}$ و $\dot{\mathbb{V}}$ را در نظر بگیرید. شاخص‌ها ی ِ اعضا ی ِ $\mathbb{V}$ را با حروف ِ ابتدایی ی ِ لاتین، و شاخص‌ها ی ِ اعضا ی ِ $\dot{\mathbb{V}}$ را با حروف ِ ابتدایی ی ِ نقطه‌دار ِ لاتین نمایش می‌دهیم. فرض کنید نگاشت‌ها ی ِ خطی ی ِ σ_μ و $\dot{\sigma}_\mu$ چنان اند که

$$\begin{aligned}
&\sigma_\mu : \mathbb{V} \to \dot{\mathbb{V}},\\
&\dot{\sigma}_\mu : \dot{\mathbb{V}} \to \mathbb{V},\\
&\sigma_\mu\, \dot{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\, \dot{\sigma}_\mu = 2\, g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{11}$$

روشن است که اگر چنین‌نگاشت‌ها یی یافت شود، آن‌گاه

$$\dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\nu + \dot{\sigma}_\nu\, \sigma_\mu = 2\, g_{\mu\nu}. \tag{12}$$

از (11) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
[\dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\nu, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\beta] &= \dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\nu\, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\beta - \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\beta\, \dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\nu,\\
&= -\dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\alpha\, \dot{\sigma}_\nu\, \sigma_\beta + 2\, g_{\nu\alpha}\, \dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\beta\\
&\quad + \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\mu\, \dot{\sigma}_\beta\, \sigma_\nu - 2\, g_{\beta\mu}\, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\nu,\\
&= \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\mu\, \dot{\sigma}_\nu\, \sigma_\beta - 2\, g_{\mu\alpha}\, \dot{\sigma}_\nu\, \sigma_\beta + 2\, g_{\nu\alpha}\, \dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\beta\\
&\quad - \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\mu\, \dot{\sigma}_\nu\, \sigma_\beta + 2\, g_{\beta\nu}\, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\mu - 2\, g_{\beta\mu}\, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\nu,
\end{aligned} \tag{13}$$

و از آن‌جا،

$$[\dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\nu, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\beta] = -2\, g_{\mu\alpha}\, \dot{\sigma}_\nu\, \sigma_\beta + 2\, g_{\nu\alpha}\, \dot{\sigma}_\mu\, \sigma_\beta + 2\, g_{\beta\nu}\, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\mu - 2\, g_{\beta\mu}\, \dot{\sigma}_\alpha\, \sigma_\nu. \tag{14}$$

به همین ترتیب،

$$[\sigma_\mu\,\dot\sigma_\nu,\sigma_\alpha\,\dot\sigma_\beta]=-2\,g_{\mu\,\alpha}\,\sigma_\nu\,\dot\sigma_\beta+2\,g_{\nu\,\alpha}\,\sigma_\mu\,\dot\sigma_\beta+2\,g_{\beta\,\nu}\,\sigma_\alpha\,\dot\sigma_\mu-2\,g_{\beta\,\mu}\,\sigma_\alpha\,\dot\sigma_\nu. \quad (15)$$

با تعریف ِ

$$J_{\mu\,\nu}:=-\frac{1}{4}(\dot\sigma_\mu\,\sigma_\nu-\dot\sigma_\nu\,\sigma_\mu),$$

$$\dot J_{\mu\,\nu}:=-\frac{1}{4}(\sigma_\mu\,\dot\sigma_\nu-\sigma_\nu\,\dot\sigma_\mu), \quad (16)$$

دیده می‌شود

$$\begin{aligned}[J_{\mu\,\nu},J_{\alpha\,\beta}]&=g_{\mu\,\alpha}\,J_{\nu\,\beta}-g_{\nu\,\alpha}\,J_{\mu\,\beta}+g_{\mu\,\beta}\,J_{\alpha\,\nu}-g_{\nu\,\beta}\,J_{\alpha\,\mu},\\ [\dot J_{\mu\,\nu},\dot J_{\alpha\,\beta}]&=g_{\mu\,\alpha}\,\dot J_{\nu\,\beta}-g_{\nu\,\alpha}\,\dot J_{\mu\,\beta}+g_{\mu\,\beta}\,\dot J_{\alpha\,\nu}-g_{\nu\,\beta}\,\dot J_{\alpha\,\mu}.\end{aligned} \quad (17)$$

از مقایسه یِ (17) با (10) معلوم می‌شود به ازا یِ $g=\delta$، مولدها یِ $J_{\mu\,\nu}$ و $\dot J_{\mu\,\nu}$ نمایش‌ها یی برا یِ مولدها یِ جبر ِ دوران اند. وقت ی این مولدها کاهش‌ناپذیر باشند (یعنی فضا یِ ناوردا یِ مشترک ِ نابدیهی نداشته باشند) به نمایش‌ها یِ جبر ِ دوران که متناظر با این مولدها یند نمایش‌ها یِ اسپینوری می‌گویند. البته ممکن است نمایش ِ متناظر با $J_{\mu\,\nu}$ ها با نمایش ِ متناظر با $\dot J_{\mu\,\nu}$ ها هم‌ارز باشد. در واقع نشان می‌دهند برا یِ دوران‌ها یِ n بُعدی با $n\geq 3$، اگر n فرد باشد یک تبدیل ِ تشابهی هست که $\dot\sigma_\mu$ ها را به σ_μ ها تبدیل می‌کند و در این حالت فقط یک نمایش ِ اسپینوری داریم. اما اگر n زوج باشد دو نمایش ِ اسپینوری یِ ناهم‌ارز داریم. ضمناً می‌شود دید رابطه یِ (11) به ازا یِ همه یِ n ها جواب دارد.

می‌گوییم بردار ِ v در فضا یِ نمایش ِ یک جبر ِ لی [a] ناوردا است، اگر اثر ِ نمایش ِ اعضا یِ آن جبر بر v صفر باشد. اگر v در حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ دو یا چند فضا یِ نمایش باشد هم تعمیم ِ این تعریف روشن است. مثلاً اگر v در حاصلِ‌ضرب ِ تانسوری یِ نمایش‌ها یِ 1 و 2 باشد، v ناوردا است اگر به ازا یِ هر عضو ِ دل‌بخواه ِ جبر مثل ِ T

$$(T^1\otimes 1^2+1^1\otimes T^2)\,v=0, \quad (18)$$

که 1 نگاشت ِ همانی است. شاخص‌ها یِ 1 و 2 هم با نمایش‌ها یِ 1 و 2 متناظر اند. بر حسب ِ مئلفه‌ها، (18) می‌شود

$$(T^1)^A{}_C\, v^{C\,\dot B} + (T^2)^{\dot B}{}_{\dot D}\, v^{A\,\dot D} = 0, \tag{19}$$

که شاخص‌ها يِ بی‌نقطه متناظر با نمايش ِ 1 و شاخص‌ها يِ نقطه‌دار متناظر با نمايش ِ 2 اند. اگر فضا يِ نمايش ِ 2 دوگان ِ فضا يِ نمايش ِ 1 باشد، رابطه يِ بالا به اين شکل در می آيد.

$$T^A{}_C\, v^C{}_B - T^D{}_B\, v^A{}_D = 0. \tag{20}$$

ضمناً روشن است که

$$T^A{}_C\, v^C{}_A - T^D{}_A\, v^A{}_D \equiv 0. \tag{21}$$

با تعريف ِ تانسورها يِ ناوردا، و با استفاده از رابطه‌ها يِ (19) تا (21) ديده می‌شود اگر u و v دو تانسور ِ ناوردا يِ يک جبر ِ لی [a] باشند، $u\otimes v$ هم چنين است، و اگر بشود بخش ی از مئلفه‌ها يِ u را در بخش ی از مئلفه‌ها يِ v ادغام کرد، باز هم حاصل تانسور ی ناوردا است.

با روش ی مشابه ِ آن چه در رسيدن به (14) و (15) به کار رفت، به‌ساده‌گی ديده می‌شود

$$\begin{aligned} \dot J_{\mu\,\nu}\, \sigma_\alpha - \sigma_\alpha\, J_{\mu\,\nu} - g_{\mu\,\alpha}\, \sigma_\nu + g_{\nu\,\alpha}\, \sigma_\mu &= 0,\\ J_{\mu\,\nu}\, \dot\sigma_\alpha - \dot\sigma_\alpha\, \dot J_{\mu\,\nu} - g_{\mu\,\alpha}\, \dot\sigma_\nu + g_{\nu\,\alpha}\, \dot\sigma_\mu &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

که به زبان ِ مئلفه‌ها می‌شود

$$\begin{aligned} (\dot J_{\mu\,\nu})^{\dot b}{}_{\dot d}\, (\sigma_\alpha)^{\dot d}{}_a - (J_{\mu\,\nu})^c{}_a\, (\sigma_\alpha)^{\dot b}{}_c - (J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu})^\beta{}_\alpha\, (\sigma_\beta)^{\dot b}{}_a &= 0,\\ (J_{\mu\,\nu})^a{}_c\, (\dot\sigma_\alpha)^c{}_{\dot b} - (\dot J_{\mu\,\nu})^{\dot d}{}_{\dot b}\, (\dot\sigma_\alpha)^a{}_{\dot d} - (J^{\mathrm{D}}_{\mu\,\nu})^\beta{}_\alpha\, (\dot\sigma_\beta)^a{}_{\dot b} &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

اين يعنی $(\sigma_\alpha)^{\dot b}{}_a$ ها و $(\dot\sigma_\alpha)^a{}_{\dot d}$ ها مئلفه‌ها يِ يک بردار ِ (تانسور ِ ناوردا) يند.

از اين‌جا معلوم می‌شود مئلفه‌ها يِ $J_{\mu\,\nu}$ ها و $\dot J_{\mu\,\nu}$ ها هم مئلفه‌ها يِ تانسورها يی ناوردا يند. هم‌چنين، اگر O يک دوفرم ِ ناوردا يِ فضا يِ $\mathbb{V}$ باشد، آن‌گاه مئلفه‌ها يِ $O\,\dot\sigma_\mu$ ها و نيز مئلفه‌ها يِ $O\,J_{\mu\,\nu}$ ها مئلفه‌ها يِ تانسورها يی ناوردا يند. به اين ترتيب، از

حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ نمایش‌ها یِ اسپینوری یِ جبر ـِ دوران می‌شود نمایش‌ها یِ برداری ساخت. اگر $u\in(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})$، آن‌گاه w با

$$w_{\mu\,\nu}:=(O\,J_{\mu\,\nu})_{a\,b}\,u^{a\,b}, \tag{24}$$

در اثر ـِ تبدیل ـِ u با J، با حاصلِ‌ضرب ـِ تانسوری یِ دو $J^{\rm D}$ تبدیل می‌شود، یعنی مثل ـِ یک تانسور ـِ پادمتقارن:

$$(O\,J_{\mu\,\nu})_{a\,b}\,[(J_{\alpha\,\beta})^{a}{}_{c}\,u^{c\,b}+(J_{\alpha\,\beta})^{b}{}_{d}\,u^{a\,d}]=[-(J^{\rm D}_{\alpha\,\beta})^{\sigma}{}_{\mu}\,w_{\sigma\,\nu}-(J^{\rm D}_{\alpha\,\beta})^{\rho}{}_{\nu}\,w_{\mu\,\rho}]. \tag{25}$$

هم‌چنین، اگر $v\in(\mathbb{V}\otimes\dot{\mathbb{V}})$، آن‌گاه z با

$$z_{\mu}:=(O\,\dot\sigma_{\mu})_{a\,\dot b}\,v^{a\,\dot b}, \tag{26}$$

در اثر ـِ تبدیل ـِ v با J و $\dot J$، با $J^{\rm D}$ تبدیل می‌شود، یعنی مثل ـِ یک بردار:

$$(O\,\dot\sigma_{\mu})_{a\,\dot b}\,[(J_{\alpha\,\beta})^{a}{}_{c}\,v^{c\,\dot b}+(\dot J_{\alpha\,\beta})^{\dot b}{}_{\dot d}\,v^{a\,\dot d}]=-(J^{\rm D}_{\alpha\,\beta})^{\nu}{}_{\mu}\,z_{\nu}. \tag{27}$$

3 دوران‌ها یِ چهاربُعدی

بُعد ـِ جبر ـِ دوران‌ها یِ n بُعدی $n\,(n-1)/2$ است. پس به ازا یِ $n=4$، تعداد ـِ مولدها یِ دوران 6 تا است. این 6 مولد را می‌شود به دو گروه ـِ 3 تایی تقسیم کرد:

$$J_j:=\frac{1}{2}\,\varepsilon_j{}^{k\,l}\,J_{k\,l},$$

$$K_j:=J_{j\,0}. \tag{28}$$

شاخص‌ها یی که از حروف ـِ میانی یِ لاتین اند بین ـِ 1 تا 3 مقدار می‌گیرند. مقدار ـِ چهارُم ـِ شاخص ـِ فضا را 0 گرفته ایم. (می‌شد آن را 4 هم گرفت.) ε هم تانسور ـِ لِوی‌ـ چیویتا [b] است. با این تعریف‌ها، رابطه یِ جابه‌جایی یِ (10) می‌شود

$$
\begin{aligned}
[J_j, J_k] &= \varepsilon^l{}_{j\,k}\, J_l,\\
[J_j, K_k] &= \varepsilon^l{}_{j\,k}\, K_l,\\
[K_j, K_k] &= \varepsilon^l{}_{j\,k}\, J_l,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

با انتخاب ِ یک پایه یِ دیگر برا یِ جبر ِ دوران به شکل ِ

$$
J_j^{\pm} := \frac{1}{2}\,(J_j \pm K_j), \tag{30}
$$

رابطه‌ها یِ (29) می‌شوند

$$
\begin{aligned}
[J_j^{\pm}, J_k^{\pm}] &= \varepsilon^l{}_{j\,k}\, J_l^{\pm},\\
[J_j^{+}, J_k^{-}] &= 0.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

این شکل ِ رابطه‌ها یِ جابه‌جایی نشان می‌دهد جبر ِ دوران‌ها یِ 4 بُعدی حاصلِ‌جمع ِ مستقیم دو جبر ِ دوران‌ها یِ 3 بُعدی است. مولدها یِ یک ی از این دوجبر J_j^+ ها و مولدها یِ جبر ِ دیگر J_j^- ها هستند. نمایش‌ها یِ باپایان‌بُعدی یِ کاهش‌ناپذیر ِ جبر ِ دوران‌ها یِ 3 بُعدی با یک عدد ِ صحیح ِ نامنفی (دوبرابر ِ اسپین) مشخص می‌شوند. از این‌جا معلوم می‌شود نمایش‌ها یِ باپایان‌بُعدی یِ جبر ِ دوران‌ها یِ 4 بُعدی با دو عدد ِ صحیح ِ نامنفی مشخص می‌شوند. این عددها را با $2\,j^+$ و $2\,j^-$ نشان می‌دهیم. بُعد ِ نمایش ِ (j^+, j^-) می‌شود $(2\,j^+ + 1)\,(2\,j^- + 1)$.

همه یِ نمایش‌ها یِ باپایان‌بُعدی یِ جبر ِ دوران‌ها یِ 3 بُعدی را می‌شود از حاصلِ‌ضرب‌ها یِ تانسوری یِ نمایش ِ $j = \frac{1}{2}$ ساخت. پس همه یِ نمایش‌ها یِ باپایان‌بُعدی یِ جبر ِ دوران‌ها یِ 4 بُعدی را می‌شود از حاصلِ‌ضرب‌ها یِ تانسوری یِ دو نمایش ِ $(\frac{1}{2}, 0)$ و $(0, \frac{1}{2})$ ساخت. به این‌ها نمایش‌ها یِ اسپینوری یِ جبر ِ دوران‌ها یِ 4 بُعدی می‌گویند.

این نمایش‌ها 2 بُعدی اند. فضا یِ نمایش ِ $(\frac{1}{2}, 0)$ را با $\mathbb{V}$، و فضا یِ نمایش ِ $(0, \frac{1}{2})$ را با $\dot{\mathbb{V}}$ نشان می‌دهیم. مولدها یِ متناظر با این دونمایش را هم با به‌ترتیب $J_{\mu\nu}$ ها (یا J_i ها و K_i ها) و $\dot{J}_{\mu\nu}$ ها (یا $\dot{J}_i$ ها و $\dot{K}_i$ ها) نشان می‌دهیم. از تعریف ِ (30) (همراه با این که مولدها یِ نمایش ِ $j = 0$ ِ جبر ِ دوران‌ها یِ 3 بُعدی صفر اند) دیده می‌شود

$$
\begin{aligned}
K_i &= J_i, \\
\dot{K}_i &= -\dot{J}_i.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

J_i ها و $\dot{J}_i$ ها نمایش ِ اسپینوری یِ مولدها یِ جبر ِ دوران‌ها یِ 3 بُعدی اند. پس می‌شود آن‌ها به این شکل گرفت.

$$
\begin{aligned}
(J_j)^a{}_b &= -\frac{i}{2}\,(\tau_j)^a{}_b, \\
(\dot{J}_j)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} &= -\frac{i}{2}\,(\tau_j)^a{}_b,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

که τ_j ها ماتریس‌ها یِ پاؤلی [c] اند. به این ترتیب، می‌شود σ_j ها و $\dot{\sigma}_j$ ها در (11) و (16) را به این شکل گرفت.

$$
\begin{aligned}
(\sigma_j)^{\dot{a}}{}_b &= (\tau_j)^a{}_b, \\
(\dot{\sigma}_j)^a{}_{\dot{b}} &= (\tau_j)^a{}_b.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

از این‌جا σ_0 و $\dot{\sigma}_0$ هم می‌شوند

$$
\begin{aligned}
(\sigma_0)^{\dot{a}}{}_b &= i\,\delta^a_b, \\
(\dot{\sigma}_0)^a{}_{\dot{b}} &= -i\,\delta^a_b.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

به ساده‌گی (مثلاً با محاسبه یِ مستقیم) دیده می‌شود تانسورها یِ لِوی‌ـ چیویتا [b] یِ متناظر با $\mathbb{V}$ و $\dot{\mathbb{V}}$ (ε و $\dot{\varepsilon}$) دو دوفرم ِ ناوردا یند. به این ترتیب، با (24) و با ε به جا یِ O، می‌شود از اعضا یِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ تانسورها یِ پادمتقارن ساخت. قرارداد ِ تعریف ِ تانسور ِ لِوی‌ـ چیویتا [b] در 4 بُعد را

$$
\varepsilon_{0\,1\,2\,3} := 1, \tag{36}
$$

می‌گیریم. با استفاده از (32) دیده می‌شود

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\,\nu}{}^{\rho\,\sigma}\,J_{\rho\,\sigma}=-J_{\mu\,\nu}, \tag{37}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\,\nu}{}^{\rho\,\sigma}\,(O\,J_{\rho\,\sigma})_{a\,b}\,u^{a\,b}=-(\,J_{\mu\,\nu})_{a\,b}\,u^{a\,b}, \tag{38}$$

که u عضو ِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ است. این یعنی تانسور ِ پادمتقارن ی که از یک عضو ِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ ساخته می‌شود، ویژه‌بردار ِ تانسور ِ لِوی‌ـ چیویتا [b] هم هست، متناظر با ویژه‌مقدار ِ منفی یِ یک. به چنین‌تانسورها یی تانسورها یِ پادمتقارن ِ پادخوددوگان می‌گویند. فضا یِ این تانسورها 3 بُعدی است، در حال ی که $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ فضا یی 4 بُعدی است. پس باید $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ یک زیرفضا یِ یک‌بُعدی داشته باشد که اثر ِ $O\,J_{\mu\,\nu}$ ها بر آن صفر باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود این زیرفضا یِ یک‌بُعدی بخش ِ پادمتقارن ِ $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}$ است:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{a\,c}\,(J_{\mu\,\nu})^{c}{}_{b}\,\varepsilon^{a\,b}&=\delta^{b}_{c}\,(J_{\mu\,\nu})^{c}{}_{b},\\&=(J_{\mu\,\nu})^{b}{}_{b},\\&=0,\end{aligned} \tag{39}$$

که در آن بالاوپایین‌بردن ِ شاخص‌ها با خود ِ ε انجام می‌شود.

حاصلِ‌ضرب ِ دو نمایش ِ $j=\frac{1}{2}$ از جبر ِ دوران‌ها یِ 3 بُعدی را می‌شود به یک نمایش ِ $j=1$ (بخش ِ متقارن ِ فضا) و یک نمایش ِ $j=0$ (بخش ِ پادمتقارن ِ فضا) تجزیه کرد. به این ترتیب،

$$\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(\frac{1}{2},0\right)=(1,0)\oplus(0,0), \tag{40}$$

و فضا یِ نمایش ِ $(1,0)$ از جبر ِ دوران‌ها یِ 4 بُعدی، با فضا یِ تانسورها یِ پادمتقارن ِ پادخوددوگان یک‌ریخت است.

به همین ترتیب، از (32) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\,\nu}{}^{\rho\,\sigma}\,\dot{J}_{\rho\,\sigma}=\dot{J}_{\mu\,\nu}, \tag{41}$$

و از آن با استدلال ی مشابه ِ استدلال ِ بالا معلوم می‌شود فضا یِ نمایش ِ $(0,1)$ از جبر ِ دوران‌ها یِ 4 بُعدی، با فضا یِ تانسورها یِ پادمتقارن ِ خوددوگان (ویژه‌بردارها یِ تانسور ِ لِوی‌ـ چیویتا [b] متناظر با ویژه‌مقدار ِ یک) یک‌ریخت است.

سرانجام، از (26) دیده می‌شود فضا یِ نمایش ـِ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ با فضا یِ بردارها یک‌ریخت است. در این‌جا هیچ زیرفضا یِ نابدیهی یی از $\mathbb{V} \otimes \dot{\mathbb{V}}$ هم نیست که اثر ـِ $O\,\dot{\sigma}_\mu$ ها بر آن صفر باشد. $\mathbb{V} \otimes \dot{\mathbb{V}}$ فضا یی 4 بُعدی است، و فضا یِ بردارها هم 4 بُعدی است.

4 اسم‌ها یِ خاص

[a] Lie

[b] Levi-Civita

[c] Pauli