X1-035 (2006/01/08)

بیضیگون ِ دوار ِ توپر ِ یکنواخت-باردار

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

پتانسیل ِ الکتریکی یِ حاصل از یک بیضیگون ِ دوار ِ توپر ِ یکنواخت-باردار، بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی محاسبه میشود.

0 مقدمه

چنان که در [1] هم آمده، در سه بُعد دُ نوع مختصات ِ بیضوی تعریف میکنند. تعریف ِ این مختصات بر حسب ِ مختصات ِ استوانِئی سادِتر است. در نُع ِ اول، مختصات ِ (u,ϕ,v) از رو یِ مختصات ِ استوانِئی یِ (ρ,ϕ,z) چنین تعریف میشود.

$$\rho = c\,\cosh u\,\sin v. \tag{1}$$

$$z = c\,\sinh u\,\cos v. \tag{2}$$

گستره یِ (u,v) را میشود یک ی از این دُ- تا گرفت:

$$(u,v) \in \{[0,\infty)\times[0,\pi]\}. \tag{3}$$

یا،

$$(u, v) \in \{(-\infty, \infty) \times [0, (\pi/2)]\}. \tag{4}$$

در حالت ِ اول، رویِها یِ $(u = \text{constant})$ بیضیگونها یِ دوار ِ پخ َند، و رویِها یِ $(v = \text{constant})$ نیم-هذلولیگونها یِ یک-پارچه. در حالت ِ دوم، رویِها یِ $(u = \text{constant})$ نیم-بیضیگونها یِ دوار ِ پخ َند، و رویِها یِ $(v = \text{constant})$ هذلولیگونها یِ یک-پارچه. این رویِها یِ مختصاتی، از دوران ِ (حُل- ِ-محور- ِ-z ِ) بیضیها یا هذلولیها یی به دست میئایند که دوران-یافته یِ کانونها یِ شان دایره یِ $(\rho = c, z = 0)$ است.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی چنین میشود

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \Phi = \frac{1}{D^2(u, v)} \left\{ \frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \left[(\cosh u) \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right] + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left[(\sin v) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right] \right\} + \frac{1}{c^2\, (\cosh^2 u)\, (\sin^2 v)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \tag{5}$$

که D را میشود به یک ی از این شکلها نوشت.

$$D^2(u, v) = c^2\, (\cosh^2 u - \sin^2 v). \tag{6}$$

$$D^2(u, v) = c^2\, (\sinh^2 u + \cos^2 v). \tag{7}$$

در نُع ِ دوم، مختصات ِ (s, ϕ, t) از رو یِ مختصات ِ استوانِئی یِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشود.

$$\rho = c\, \sinh s\, \sin t. \tag{8}$$

$$z = c\, \cosh s\, \cos t. \tag{9}$$

گستره یِ (s, t) چنین میشود.

$$(u, v) \in \{[0, \infty) \times [0, \pi]\}. \tag{10}$$

رویِها یِ (t = constant) بیضیگونها یِ دوار ِ کشیده اند، و رویِها یِ (s = constant) نیم-هذلولیگونها یِ دُ-پارچه. این رویِها یِ مختصاتی دوران-یافته یِ (حُل- ِ-محور- ِ-z ِ) بیضیها و هذلولیها یی با کانونها یِ ($\rho = 0, z = \pm c$) اند.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی چنین میشود

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \Phi = \frac{1}{F^2(s,t)} \left\{ \frac{1}{\sinh s}\, \frac{\partial}{\partial s} \left[(\sinh s)\, \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] + \frac{1}{\sin t}\, \frac{\partial}{\partial t} \left[(\sin t)\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\} + \frac{1}{c^2 \sinh^2 s \sin^2 t}\, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \tag{11}$$

که F را میشود به یک ی از این شکلها نوشت.

$$F^2(s,t) = c^2\, (\cosh^2 s - \cos^2 t). \tag{12}$$

$$F^2(s,t) = c^2\, (\sinh^2 s + \sin^2 t). \tag{13}$$

بر حسب ِ هر-دُ یِ این مختصات، معادله یِ پُوَسُن [2] جداشدنی ست. بر حسب ِ مختصات ِ اول، این معادله میشود

$$-[D^2(u,v)]\, \varrho = \left[A + B + \left(\frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\cosh^2 u} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Phi_{\mathrm{o}}. \tag{14}$$

که Φ_{o} پتانسیل و ϱ چگالی یِ بار است، و

$$A\, \Phi = \frac{1}{\cosh u}\, \frac{\partial}{\partial u} \left[(\cosh u)\, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right]. \tag{15}$$

$$B\, \Phi = \frac{1}{\sin v}\, \frac{\partial}{\partial v} \left[(\sin v)\, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right]. \tag{16}$$

بر حسب ِ مختصات ِ دوم، معادله یِ پُوَسُن [2] میشود

$$-[F^2(s,t)]\, \varrho = \left[C + E + \left(\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\sinh^2 s} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Phi_{\mathrm{p}}. \tag{17}$$

که Φ_{p} پتانسیل و ϱ چگالی یِ بار است، و

$$C\, \Phi = \frac{1}{\sinh s}\, \frac{\partial}{\partial s} \left[(\sinh s)\, \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right]. \tag{18}$$

$$E\, \Phi = \frac{1}{\sin t}\, \frac{\partial}{\partial t} \left[(\sin t)\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]. \tag{19}$$

به ویژه اگر پتانسیل تابع ِ ϕ نباشد، معادله‌ها یِ (11) و (17) میشوند

$$-[D^2(u,v)]\,\varrho = \frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\left[(\cosh u)\,\frac{\partial\,\Phi_{\rm o}}{\partial\,u}\right] + \frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\left[(\sin v)\,\frac{\partial\,\Phi_{\rm o}}{\partial\,v}\right]. \quad (20)$$

$$-[F^2(s,t)]\,\varrho = \frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\left[(\sinh s)\,\frac{\partial\,\Phi_{\rm p}}{\partial\,s}\right] + \frac{1}{\sin t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\left[(\sin t)\,\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial\,t}\right]. \quad (21)$$

1 بیضیگون ِ دوار ِ پخ

یک بیضیگون ِ دوار ِ پخ میگیرم که نیم-محورها یِ بزرگ و کوچک َش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضیگون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات میگیرم. معادله یِ این بیضیگون در مختصات ِ بیضوی یِ نُغ ِ اول میشود

$$u = u_0. \quad (22)$$

که،

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (23)$$

$$u_0 = \sinh^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}. \quad (24)$$

گیرم چگالی یِ بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضیگون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0\,\mathsf{H}(u_0 - u). \quad (25)$$

که H تابع ِ پله است. متغیرها یِ U و V و ثابتها یِ Λ و U_0 را چنین تعریف میکنم.

$$U = \sinh u. \quad (26)$$

$$V = \cos v. \quad (27)$$

$$\Lambda = c^2\,\varrho. \quad (28)$$

$$U_0 = \sinh u_0. \quad (29)$$

معادله ی ِ پُوَسُن [2] چنین میشود.

$$(A+B)\,\Phi_{\rm o} = -\Lambda\,(U^2+V^2)\,\mathsf{H}(U_0-U). \tag{30}$$

یا،

$$(A+B)\,\Phi_{\rm o} = -\frac{2\,\Lambda}{3}\,\{[\mathsf{P}_2^A(U)]\,[\mathsf{P}_0^B(V)] + [\mathsf{P}_0^A(U)]\,[\mathsf{P}_2^B(V)]\}\,\mathsf{H}(U_0-U), \tag{31}$$

که P_l^B چندجملِئیی ی ِ لُژاندر [3] از درجه ی ِ l است و

$$\mathsf{P}_l^A(U) = ({\rm i})^{-l}\,\mathsf{P}_l^B({\rm i}\,U). \tag{32}$$

به ویژه،

$$\mathsf{P}_0^A(U) = 1. \tag{33}$$

$$\mathsf{P}_2^A(U) = \frac{3\,U^2+1}{2}. \tag{34}$$

$$\mathsf{P}_0^B(V) = 1. \tag{35}$$

$$\mathsf{P}_2^B(V) = \frac{3\,V^2-1}{2}. \tag{36}$$

عملگرها ی ِ A و B، بر حسب ِ U و V چنین میشوند

$$A\,\Phi = \frac{\partial}{\partial U}\,\left[(1+U^2)\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,U}\right]. \tag{37}$$

$$B\,\Phi = \frac{\partial}{\partial V}\,\left[(1-V^2)\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,V}\right]. \tag{38}$$

هدف حل ِ معادله ی ِ (31) است، با این شرایط- ِ-مرزی

$$\left.\frac{\partial\,\Phi_{\rm o}}{\partial\,U}\right|_{U=0} = 0. \tag{39}$$

$$\lim_{U\to\infty}\Phi_{\rm o} = 0. \tag{40}$$

P_l^B ویژه- بردار ِ B با ویژه- مقدار ِ $[-l\,(l+1)]$ است. پس این نهاده را به کار میبَرم.

$$\Phi_{\rm o}(U,V) = [\Upsilon_0(U)]\,\mathsf{P}_0^B(V) + [\Upsilon_2(U)]\,\mathsf{P}_2^B(V) \tag{41}$$

چون P_l^B ها خطی-مستقل َند، از (31) نتیجه میشود

$$(A\,\Upsilon_0)(U) = -\frac{2\,\Lambda}{3}\,[\mathsf{P}_2^A(U)]\,\mathsf{H}(U_0 - U), \tag{42}$$

$$[(A-6)\,\Upsilon_2](U) = -\frac{2\,\Lambda}{3}\,[\mathsf{P}_0^A(U)]\,\mathsf{H}(U_0 - U). \tag{43}$$

شرایط- ِ-مرزی یِ (39) و (40) هم چنین میشوند

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\Upsilon_0}{\mathrm{d}\,U}\right|_{U=0} = 0. \tag{44}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_0 = 0. \tag{45}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\Upsilon_2}{\mathrm{d}\,U}\right|_{U=0} = 0. \tag{46}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_2 = 0. \tag{47}$$

نقطه یِ $U \to \infty$ یک تکینِگی یِ منظم برا یِ عملگر- ِ-دیفرانسیل ِ A است. این معادله را بررسی میکنم.

$$[A - l\,(l+1)]\,\Pi_l^A = 0. \tag{48}$$

اگر رفتار ِ $[\Pi_l^A(U)]$ در حد ِ $(U \to \infty)$ به شکل ِ U^k باشد، با جاگذاری در معادله دیده میشود

$$(k = l)\ \vee\ [k = -(l+1)]. \tag{49}$$

با فرض ِ این که l نامنفی باشد، جواب ِ متناظر با U^{-l-1} در $U \to \infty$ صفر میشود. این جواب را با R_l^A نشان میدهم. همچنین، اگر l صحیح باشد یک جواب ِ معادله یِ (46) هم ان P_l^A است، که چندجملِئی ست و به ازا یِ l ها یِ فرد فرد و به ازا یِ l ها یِ زُج زُج است. پس برا یِ l ها یِ صحیح ِ نامنفی، جواب ِ (48) چنین میشود

$$\Pi_l^A = \mu\,\mathsf{P}_l^A + \nu\,\mathsf{R}_l^A. \tag{50}$$

بهنجارش ِ R_l^A را چنان میگیرم که

$$\mathsf{R}_l^A = \mathsf{P}_l^A\ \cot^{-1} + \tilde{\mathsf{P}}_l^A. \tag{51}$$

که $\tilde{\mathsf{P}}_l^A$ چندجملِئی یی از درجه یِ $(l-1)$ است، چنان که

$$\{[A - l\,(l+1)]\,\tilde{\mathsf{P}}_l^A\}(U) = -2\,\frac{\mathrm{d}\,[\mathsf{P}_l^A(U)]}{\mathrm{d}U}. \tag{52}$$

از جمله،

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_0^A(U) &= \cot^{-1} U, \\ \mathsf{R}_2^A(U) &= [\mathsf{P}_2^A(U)]\,\cot^{-1} U - \frac{3}{2}\,U. \end{aligned} \tag{53}$$

معادله یِ (42) همراه با شرایط ِ مرزی یِ (44) و (45) نتیجه میدهد

$$\Upsilon_0(U) = \Upsilon_0^-(U)\,\mathsf{H}(U_0 - U) + \Upsilon_0^+(U)\,\mathsf{H}(U - U_0). \tag{54}$$

که،

$$\Upsilon_0^- = \frac{\Lambda}{9}\,\mathsf{P}_2^A + \alpha\,\mathsf{P}_0^A. \tag{55}$$

$$\Upsilon_0^+ = \beta\,\mathsf{R}_0^A(U). \tag{56}$$

با استفاده از پیوستگی یِ Υ_0 و مشتق َش در $(U = U_0)$، ضریبها یِ α و β به دست میئایند:

$$\alpha = -\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(\mathsf{P}_2^A, \mathsf{R}_0^A; U_0)}{W(\mathsf{R}_0^A, \mathsf{P}_0^A; U_0)}. \tag{57}$$

$$\beta = -\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(\mathsf{P}_2^A, \mathsf{P}_0^A; U_0)}{W(\mathsf{R}_0^A, \mathsf{P}_0^A; U_0)}. \tag{58}$$

که W وْرُنسکی [4] است:

$$W(f, g; x) = (f\,g' - f'\,g)(x). \tag{59}$$

و $\mathfrak{X}'$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ است. به این ترتیب،

$$\Upsilon_0^-(U) = \frac{\Lambda}{6}\,(U_0^2 - U^2) + \frac{\Lambda}{3}\,U_0\,(1 + U_0^2)\,\cot^{-1} U_0. \tag{60}$$

$$\Upsilon_0^+(U) = \frac{\Lambda}{3}\,U_0\,(1 + U_0^2)\,\cot^{-1} U. \tag{61}$$

به هم ین ترتیب، معادله ی ِ (43) همراه با شرایط ِ مرزی ی ِ (46) و (47) نتیجه میدهد

$$\Upsilon_2(U) = \Upsilon_2^-(U)\,\mathsf{H}(U_0 - U) + \Upsilon_2^+(U)\,\mathsf{H}(U - U_0). \tag{62}$$

که،

$$\Upsilon_2^- = \frac{\Lambda}{9}\,\mathsf{P}_0^A + \gamma\,\mathsf{P}_2^A. \tag{63}$$

$$\Upsilon_2^+ = \delta\,\mathsf{R}_2^A. \tag{64}$$

با استفاده از پیوستگی ی ِ Υ_2 و مشتق َ ش در $(U = U_0)$، ضریبها ی ِ γ و δ به دست میائیند:

$$\gamma = \frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(\mathsf{P}_0^A, \mathsf{R}_2^A; U_0)}{W(\mathsf{R}_2^A, \mathsf{P}_2^A; U_0)}. \tag{65}$$

$$\delta = \frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(\mathsf{P}_0^A, \mathsf{P}_2^A; U_0)}{W(\mathsf{R}_2^A, \mathsf{P}_2^A; U_0)}. \tag{66}$$

به این ترتیب،

$$\Upsilon_2^-(U) = \frac{\Lambda}{18}\,\{[3\,U_0\,(1 + U_0^2)\,\cot^{-1} U_0 - 3\,U_0^2 - 2]\,(3\,U^2 + 1) + 2\}. \tag{67}$$

$$\Upsilon_2^+(U) = \frac{\Lambda}{6}\,U_0\,(1 + U_0^2)\,[(3\,U^2 + 1)\,\cot^{-1} U - 3\,U]. \tag{68}$$

رابطه ی ِ (41) هم چنین میشود.

$$\Phi_\mathrm{o} = \Phi_\mathrm{o}^-\,\mathsf{H}(U_0 - U) + \Phi_\mathrm{o}^+\,\mathsf{H}(U - U_0). \tag{69}$$

که،

$$\begin{aligned}\Phi_\mathrm{o}^- = {}& \frac{\Lambda}{36}\,\{[3\,U_0\,(1 + U_0^2)\,\cot^{-1} U_0 - 3\,U_0^2 - 2]\,(3\,U^2 + 1) + 2\}\,(3\,V^2 - 1) \\ &+ \frac{\Lambda}{6}\,(U_0^2 - U^2) + \frac{\Lambda}{3}\,U_0\,(1 + U_0^2)\,\cot^{-1} U_0.\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\Phi_\mathrm{o}^+ = {}& \frac{\Lambda}{12}\,U_0\,(1 + U_0^2)\,\{4\,\cot^{-1} U \\ &+ [(3\,U^2 + 1)\,\cot^{-1} U - 3\,U]\,(3\,V^2 - 1)\}.\end{aligned} \tag{71}$$

پتانسیل درون ِ بیضیگون را ساده میکنم. دیده میشود

$$\Phi_{\mathrm{o}}^{-} = -\frac{\Lambda}{4}\,[2\,\xi\,U^2\,V^2 + (1-\xi)\,(1+U^2)\,(1-V^2)]. \tag{72}$$

که،

$$\xi = (1+U_0^2)\,(1-U_0\,\cot^{-1}U_0). \tag{73}$$

از روابط ِ مختصاتی هم نتیجه میشود

$$\frac{z^2}{c^2} = U^2\,V^2. \tag{74}$$

$$\frac{\rho^2}{c^2} = (1+U^2)\,(1-V^2). \tag{75}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\mathrm{o}}^{-} = -\frac{\varrho}{4}\,[2\,\xi\,z^2 + (1-\xi)\,\rho^2]. \tag{76}$$

پتانسیل بیرون ِ بیضیگون را هم بر حسب ِ Q_{o} (بار ِ درون ِ بیضیگون) مینویسم:

$$Q_{\mathrm{o}} = \frac{4\,\pi}{3}\,\frac{\Lambda\,b\,a^2}{c^2}. \tag{77}$$

$$\frac{b\,a^2}{c^3} = U_0\,(1+U_0^2). \tag{78}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\mathrm{o}}^{+} = \frac{Q_{\mathrm{o}}}{16\,\pi\,c}\,\{4\,\cot^{-1}U + [(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U]\,(3\,V^2-1)\}. \tag{79}$$

یا،

$$\Phi_{\mathrm{o}}^{+} = \frac{Q_{\mathrm{o}}}{4\,\pi\,c}\,\{\mathsf{R}_0^A(U) + [\mathsf{R}_2^A(U)]\,[\mathsf{P}_2^B(V)]\}. \tag{80}$$

نقاط ِ دور از بیضیگون متناظر َند با U ها یِ بزرگ. در این نقاط،

$$\Phi_{\mathrm{o}} \approx \frac{Q_{\mathrm{o}}}{4\,\pi\,c\,U}. \tag{81}$$

یعنی،

$$\Phi_{\rm o} \approx \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,r}. \tag{82}$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضیگون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضیگون به کره تبدیل شود. این یعنی حد ِ $(c \to 0)$ با a و $Q_{\rm o}$ ثابت. در این حالت،

$$\xi = \frac{1}{3}. \tag{83}$$

$$\Phi_{\rm o}^{-} = -\frac{\varrho\,r^2}{6}. \tag{84}$$

$$\Phi_{\rm o}^{+} = \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,r}. \tag{85}$$

یک حالت ِ هم حدی این است که بیضیگون به قرص تبدیل شود. این یعنی حد ِ $(b \to 0)$ با a و $Q_{\rm o}$ ثابت. در این حالت a هم ان c است، و پتانسیل همه جا $\Phi_{\rm o}^{+}$ است. σ (چگالی-یِ-سطحی یِ قرص ِ حاصل) را حساب میکنم:

$$\begin{aligned}\sigma &= -2\,\lim_{z\to 0^+}\left(\frac{\partial\,\Phi_{\rm o}}{\partial\,z}\right)_{\rho},\\ &= -2\,\lim_{z\to 0^+}\left[\left(\frac{\partial\,\Phi_{\rm o}}{\partial\,u}\right)_{v}\,\left(\frac{\partial\,u}{\partial\,z}\right)_{\rho}+\left(\frac{\partial\,\Phi_{\rm o}}{\partial\,v}\right)_{u}\,\left(\frac{\partial\,v}{\partial\,z}\right)_{\rho}\right].\end{aligned} \tag{86}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\sigma = \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\cos v. \tag{87}$$

یا،

$$\sigma = \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{c}\right)^2}. \tag{88}$$

این چگالی یکنواخت نیست، و نباید هم باشد. به سادگی دیده میشود $\sqrt{1-(\rho/c)^2}$ نسبت ِ کلفتی یِ بیضیگون در فاصله یِ ρ از محور ِ z، به کلفتی یِ بیضیگون در محور ِ z، در حد ِ $(b \to 0)$ است. این چگالی یِ سطحی هم حد ِ چگالی یِ حجمی در کلفتی یِ بیضیگون، در $(b \to 0)$ است.

2 بیضیگون ِ دوار ِ کشیده

یک بیضیگون ِ دوار ِ کشیده میگیرم که نیم-محورها یِ بزرگ و کوچک َش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضیگون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات میگیرم. معادله یِ این بیضیگون در مختصات ِ بیضوی یِ نُع ِ دوم با

$$s = s_0. \tag{89}$$

که،

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{90}$$

$$s_0 = \cosh^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{91}$$

گیرم چگالی یِ بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضیگون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0 \, \mathsf{H}(s_0 - s). \tag{92}$$

متغیرها یِ S و T و ثابتها یِ Λ و S_0 را چنین تعریف میکنم.

$$S = \cosh u. \tag{93}$$

$$T = \cos t. \tag{94}$$

$$\Lambda = c^2 \, \varrho. \tag{95}$$

$$S_0 = \cosh s_0. \tag{96}$$

معادله یِ پُوَسُن [2] چنین میشود.

$$(C + E)\, \Phi_\mathrm{p} = -\Lambda\, (S^2 - T^2)\, \mathsf{H}(S_0 - S). \tag{97}$$

یا،

$$(C + E)\, \Phi_\mathrm{p} = -\frac{2\,\Lambda}{3}\, \{[\mathsf{P}_2^C(S)]\, [\mathsf{P}_0^E(T)] - [\mathsf{P}_0^C(S)]\, [\mathsf{P}_2^E(T)]\}\, \mathsf{H}(S_0 - S), \tag{98}$$

که P_l^C و P_l^E چندجملِئیی یِ لُژاندر [3] از درجه یِ l اند. به ویژه،

$$\mathsf{P}_0^C(S) = 1. \tag{99}$$

$$\mathsf{P}_2^C(S) = \frac{3\,S^2+1}{2}. \tag{100}$$

$$\mathsf{P}_0^E(T) = 1. \tag{101}$$

$$\mathsf{P}_2^E(T) = \frac{3\,T^2-1}{2}. \tag{102}$$

عملگرها یِ C و D، بر حسب ِ S و T چنین میشوند

$$C\,\Phi = \frac{\partial}{\partial\,S}\,\left[(S^2-1)\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,S}\right]. \tag{103}$$

$$E\,\Phi = \frac{\partial}{\partial\,V}\,\left[(1-T^2)\,\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,V}\right]. \tag{104}$$

میشود با روش ی مشابه با روش ِ بخش ِ پیش پتانسیل ِ $\Phi_{\rm p}$ را حساب کرد. اما سادِتر این است که توجه شود عملگر ِ C به عملگر ِ A، و عملگر ِ E به عملگر ِ B مربوط است:

$$C = A(U\to \mathrm{i}\,S). \tag{105}$$

$$E = B(V\to T). \tag{106}$$

و از آنجا دیده میشود اگر $\Phi_{\rm o}$ جواب ِ (30) باشد، آنگاه $\Phi_{\rm p}$ جواب ِ (97) است:

$$\Phi_{\rm p}(S,T) = -\Phi_{\rm o}(U\to \mathrm{i}\,S, V\to T). \tag{107}$$

در این جاگذاری،

$$\cot^{-1}(\mathrm{i}\,S) = -i\,\coth^{-1} S. \tag{108}$$

$$\mathsf{H}(\mathrm{i}\,S) = \mathsf{H}((S). \tag{109}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\rm p} = \Phi_{\rm p}^-\,\mathsf{H}(S_0-S) + \Phi_{\rm p}^+\,\mathsf{H}(S-S_0). \tag{110}$$

که،

$$\Phi_{\rm p}^- = \frac{\Lambda}{36}\,\{[-3\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1}S_0 + 3\,S_0^2 - 2]\,(3\,S^2-1) - 2\}\,(3\,T^2-1) + \frac{\Lambda}{6}\,(S_0^2 - S^2) + \frac{\Lambda}{3}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1}S_0. \tag{111}$$

$$\Phi_{\rm p}^+ = \frac{\Lambda}{12}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\{4\,\coth^{-1}S - [(3\,S^2-1)\,\coth^{-1}S - 3\,S]\,(3\,T^2-1)\}. \tag{112}$$

پتانسیل درون ِ بیضیگون را ساده میکنم. دیده میشود

$$\Phi_{\rm p}^- = -\frac{\Lambda}{4}\,[2\,\zeta\,S^2\,T^2 + (1-\zeta)\,(S^2-1)\,(1-V^2)]. \tag{113}$$

که،

$$\zeta = (S_0^2-1)\,(S_0\,\coth^{-1}S_0 - 1). \tag{114}$$

از روابط ِ مختصاتی هم نتیجه میشود

$$\frac{z^2}{c^2} = S^2\,T^2. \tag{115}$$

$$\frac{\rho^2}{c^2} = (S^2-1)\,(1-T^2). \tag{116}$$

به این ترتیب چیز ی شبیه به (76) به دست میئاید:

$$\Phi_{\rm o}^- = -\frac{\varrho}{4}\,[2\,\zeta\,z^2 + (1-\zeta)\,\rho^2]. \tag{117}$$

پتانسیل بیرون ِ بیضیگون را هم بر حسب ِ $Q_{\rm p}$ (بار ِ درون ِ بیضیگون) مینویسم:

$$Q_{\rm p} = \frac{4\,\pi}{3}\,\frac{\Lambda\,b^2\,a}{c^2}. \tag{118}$$

$$\frac{b^2\,a}{c^3} = S_0\,(S_0^2-1). \tag{119}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\rm p}^+ = \frac{Q_{\rm p}}{16\,\pi\,c}\,\{4\,\coth^{-1}S - [(3\,S^2-1)\,\coth^{-1}S - 3\,S]\,(3\,T^2-1)\}. \tag{120}$$

یا،

$$\Phi_{\rm p}^{+} = \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,c}\,\{\mathsf{R}_0^C(S) - [\mathsf{R}_2^C(S)]\,[\mathsf{P}_2^D(T)]\}. \tag{121}$$

که،

$$\mathsf{R}_0^C(S) = \coth^{-1} S. \tag{122}$$

$$\mathsf{R}_2^C(S) = [\mathsf{P}_2^C(S)]\,\coth^{-1} S - \frac{3}{2}\,S. \tag{123}$$

$\mathsf{R}_0^C(S)$ و $\mathsf{R}_2^C(S)$ آن جوابها ی ِ معادله ی ِ لُژاندر [3] با $(l=0)$ و $(l=2)$ اند، که در $(S\to\infty)$ مثل ِ S^{-l-1} رفتار میکنند. نقاط ِ دور از بیضیگون متناظر َند با S ها ی ِ بزرگ. در این نقاط،

$$\Phi_{\rm p} \approx \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,c\,S}. \tag{124}$$

یعنی،

$$\Phi_{\rm p} \approx \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,r}. \tag{125}$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضیگون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضیگون به کره تبدیل شود. این یعنی حد ِ $(c\to 0)$ با a و $Q_{\rm p}$ ثابت. در این حالت مانسته ی ِ (83) تا (85) به دست میئاید:

$$\zeta = \frac{1}{3}. \tag{126}$$

$$\Phi_{\rm p}^{-} = -\frac{\varrho\,r^2}{6}. \tag{127}$$

$$\Phi_{\rm p}^{+} = \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,r}. \tag{128}$$

یک حالت ِ حدی هم این است که بیضیگون به میله تبدیل شود. این یعنی حد ِ $(b\to 0)$ با a و $Q_{\rm p}$ ثابت. در این حالت a هم ان c است، و پتانسیل همه جا $\Phi_{\rm p}^{+}$ است. λ (چگالی-ی ِ-طولی ی ِ میله ی ِ حاصل) را حساب میکنم:

$$\begin{aligned}\lambda &= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left[\rho\,\left(\frac{\partial\,\Phi_{\rm p}}{\partial\,\rho}\right)_z\right],\\ &= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left\{\rho\,\left[\left(\frac{\partial\,\Phi_{\rm p}}{\partial\,s}\right)_t\,\left(\frac{\partial\,s}{\partial\,\rho}\right)_z + \left(\frac{\partial\,\Phi_{\rm p}}{\partial\,t}\right)_s\,\left(\frac{\partial\,t}{\partial\,\rho}\right)_z\right]\right\}.\end{aligned} \tag{129}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\lambda = \frac{Q_\mathrm{p}}{2\,c}\,[1 - \mathsf{P}_2^C(\cos v)]. \tag{130}$$

یا،

$$\lambda = \frac{3\,Q_\mathrm{p}}{4\,c}\;\left[1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]. \tag{131}$$

این چگالی یکنواخت نیست، و نباید هم باشد. میشود دید عبارتِ $[1-(z/c)^2]$ نسبتِ مساحتِ مقطعِ بیضیگون در فاصله یِ z از صفحه یِ $x\,y$، به مساحتِ مقطعِ بیضیگون در صفحه یِ $x\,y$، در حدِ $(b\to 0)$ است. این چگالی یِ طولی هم حدِ چگالی یِ حجمی در مساحتِ مقطعِ بیضیگون، در $(b\to 0)$ است.

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «مختصاتِ بیضوی در چند مسئله یِ الکترُمغناطیس»؛ X1-010 (2002/04/17)

[2] Poisson

[3] Legendre

[4] Wronski