X1-036 (2006/02/12)

فاصله یِ زمانی یِ دو غروب ـِ متوالی یِ ماه

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

فاصله یِ زمانی یِ دو غروب ـِ متوالی یِ ماه، از رو یِ هندسه یِ مدار ـِ ماه دور ـِ زمین و چرخش ـِ زمین محاسبه می‌شود.

0 مقدمه

وضعیت ـِ نسبی یِ زمین و ماه و خورشید، بعد از یک ماه ـِ قمری تقریباً تکرار می‌شود. هر ماه ـِ قمری 29.5 روز ـِ خورشیدی است. یعنی طی ـِ یک ماه ـِ قمری، در یک نقطه از زمین به طور ـِ میان‌گین 29.5 بار خورشید غروب می‌کند. حرکت ـِ ماه و خورشید در آسمان چنان است که ماه از خورشید عقب می‌ماند و این عقب‌مانده‌گی، طی ـِ یک ماه ـِ قمری دقیقاً یک دور می‌شود. پس طی ـِ یک ماه ـِ قمری، در یک نقطه از زمین ماه به طور ـِ میان‌گین 28.5 بار غروب می‌کند. از این‌جا معلوم می‌شود میان‌گین فاصله یِ زمانی یِ دو غروب ـِ متوالی یِ ماه $(\bar{t}_{\rm m})$

$$\bar{t}_{\rm m} = \frac{29.5}{28.5}\,\bar{t}_{\rm s} \qquad (1)$$

است، که $\bar{t}_{\rm s}$ روز ـِ خورشیدی یِ میان‌گین (فاصله یِ زمانی یِ میان‌گین ـِ دو غروب ـِ متوالی یِ خورشید در یک نقطه از زمین) است. پس

$$\bar{t}_{\mathrm{m}} = 1.035\,\bar{t}_{\mathrm{s}}. \qquad (2)$$

داریم

$$\bar{t}_{\mathrm{s}} = 24\,h. \qquad (3)$$

از این‌جا

$$\bar{t}_{\mathrm{m}} - 24\,\mathrm{h} = 50\,\mathrm{min}. \qquad (4)$$

این یعنی در یک نقطه از زمین، ماه هر روز نسبت به روز ِ قبل به طور ِ میان‌گین 50 min دیرتر غروب می‌کند. البته روشن است که بحث را به نقاط ی از زمین محدود کرده ایم که ماه طلوع و غروب دارد. سئال این است که فاصله یِ زمانی یِ دو غروب ِ متوالی یِ ماه (روز ِ قمری، t_{m}) ثابت است یا نَه، و اگر نَه بسته‌گی یِ آن به زمان و مکان چه‌گونه است.

1 هندسه یِ مسئله

کلیات ِ این مسئله بسیار شبیه ِ مسئله یِ حرکت‌ها یِ زمین و خورشید است، که در [1] بررسی شده. محور ِ چرخش ِ زمین به دور ِ خود را محور ِ z می‌گیریم. به این ترتیب بردار ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش ِ زمین $\omega_0\,\hat{\mathbf{z}}$ است، که

$$\omega_0 = \frac{2\,\pi}{t_0}, \qquad (5)$$

و t_0 روز ِ نجومی است. روز ِ نجومی دوره یِ چرخش ِ زمین است، و رابطه اَش با روز ِ خورشیدی یِ میان‌گین چنین است.

$$\frac{1}{t_0} = \frac{1}{\bar{t}_{\mathrm{s}}} + \frac{1}{y}, \qquad (6)$$

که y سال ِ خورشیدی است. از این‌جا معلوم می‌شود

$$t_0 = \bar{t}_{\mathrm{s}} - 4\,\mathrm{min}. \qquad (7)$$

اندازه ي سرعت ِ زاویه‌ای ِ نجومی ي گردش ِ ماه دور ِ زمین (یعنی سرعت ِ زاویه‌ای ي گردش نسبت به ستاره‌ها ي دور) Ω_0 است. رابطه ي این کمیت با ماه ِ قمری ي میان‌گین ($\bar{T}_{\rm m}$) چنین است.

$$\frac{1}{\bar{T}_{\rm m}} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{y}, \tag{8}$$

که T_0 دوره ي گردش ِ ماه دور ِ زمین است:

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\bar{\Omega}_0}. \tag{9}$$

جهت ِ بردار ِ سرعت ِ زاویه‌ای ي نجومی ي گردش ِ ماه دور ِ زمین $\hat{\mathbf{z}}$ نیست بل که $\hat{\mathbf{n}}$ است، که با $\hat{\mathbf{z}}$ زاویه ي η می‌سازد. جهت ِ ماه نسبت به مرکز ِ زمین در زمان ِ t را با $\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)$ نمایش می‌دهیم. این جهت با

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t) = R[\Phi(t)\,\hat{\mathbf{n}}]\,\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(0) \tag{10}$$

داده می‌شود، که R عمل‌گر ِ دوران به اندازه ي زاویه ي Φ حول ِ محور ِ $\hat{\mathbf{n}}$، و $\Phi(t)$ زاویه ي گردش ِ ماه طی ِ زمان ِ t است:

$$\dot{\Phi} = \Omega_0. \tag{11}$$

جهت ِ یک نقطه از سطح ِ زمین نسبت به مرکز ِ زمین در زمان ِ t را با $\hat{\mathbf{r}}(t)$ نمایش می‌دهیم. این جهت هم با

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = R(\omega_0\,t\,\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{r}}(0) \tag{12}$$

داده می‌شود. غروب (یا طلوع) در یک نقطه از زمین زمان ی رخ می‌دهد که جهت ِ آن نقطه نسبت به مرکز ِ زمین بر جهت ِ ماه نسبت به مرکز ِ زمین عمود باشد:

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)\cdot\hat{\mathbf{r}}(t) = 0. \tag{13}$$

داریم

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(t)\cdot\hat{\mathbf{r}}(t) = \hat{\mathbf{r}}_{\rm m}(0)\cdot\{R[-\Phi(t)\,\hat{\mathbf{n}}]\,R(\omega_0\,t\,\hat{\mathbf{z}})\,\hat{\mathbf{r}}(0)\}. \tag{14}$$

سرعت ِ زاویه ي چرخش ِ زمین تقریباً ثابت است. اگر سرعت ِ زاویه‌ای ي گردش ِ ماه هم ثابت و جهت ِ آن با سرعت ِ زاویه‌ای ي چرخش ِ زمین موازی می‌بود، آن‌گاه

$$\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{m}}(t)\cdot\hat{\mathbf{r}}(t)=\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{m}}(0)\cdot\{R[(\omega_0-\Omega_0)\,t\,\hat{\mathbf{z}}]\,\hat{\mathbf{r}}(0)\},\qquad(15)$$

که در این صورت وضعیت ـِ نسبی يِ ماه و یک نقطه يِ معین در زمین، بر حسب ـِ زمان دوره‌ای با دوره يِ

$$\tau:=\frac{2\,\pi}{\omega_0-\Omega_0}\qquad(16)$$

می‌شد. در این حالت فاصله يِ زمانی يِ دو غروب ـِ متوالی يِ ماه در هر نقطه يِ زمین، هم‌واره τ می‌بود. اما سرعت ـِ زاویه‌ای يِ گردش ـِ ماه ثابت نیست، و جهت ـِ این سرعت ـِ زاویه‌ای هم با جهت ـِ سرعت ـِ زاویه‌ای يِ چرخش ـِ زمین موازی نیست. به همین خاطر فاصله يِ دو غروب ـِ متوالی يِ ماه در هر نقطه يِ زمین، نَه ثابت است و نَه مستقل از مکان. البته روز ـِ قمری يِ میان‌گین از رابطه ای شبیه ـِ رابطه يِ بالا به دست می آید:

$$\frac{1}{\bar{t}_{\mathrm{m}}}=\frac{1}{t_0}-\frac{1}{T_0},\qquad(17)$$

$$=\frac{1}{\bar{t}_{\mathrm{s}}}-\frac{1}{\bar{T}_{\mathrm{m}}},\qquad(18)$$

که در آن از (6) و (8) استفاده شده است.

فرض کنید در زمان ـِ صفر، در یک نقطه از زمین ماه غروب کند. در این حالت،

$$\hat{\mathbf{r}}(0)\cdot\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{m}}(0)=0.\qquad(19)$$

اما ضمناً $\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{m}}$ همیشه بر سرعت ـِ زاویه‌ای يِ گردش ـِ ماه دور ـِ زمین عمود است. پس،

$$\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{m}}(0)\propto\hat{\mathbf{r}}(0)\times\hat{\mathbf{n}}.\qquad(20)$$

بردار ـِ $\mathbf{r}_{\mathrm{m}}(t)$ با

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\mathrm{m}}(t)&=R[\Phi(t)\,\hat{\mathbf{n}}]\,\mathbf{r}_{\mathrm{m}}(0),\\ \mathbf{r}_{\mathrm{m}}(0)&=\hat{\mathbf{r}}(0)\times\hat{\mathbf{n}},\end{aligned}\qquad(21)$$

با جهت ـِ ماه نسبت به مرکز ـِ زمین موازی است و شرط ـِ غروب ـِ ماه را می‌شود عمودشدن ـِ این بردار بر $\hat{\mathbf{r}}(t)$ گرفت.

غروب ِ بعدی ي ِ ماه در آن نقطه، در $t=t_{\rm m}$ رخ می‌دهد. به این ترتیب،

$$[R(\omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf z})\,\hat{\mathbf r}(0)]\cdot\{R(\Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf n})\,[\hat{\mathbf r}(0)\times\hat{\mathbf n}]\}=0. \tag{22}$$

هدف یافتن ِ جواب ی از این معادله برا ي ِ $t_{\rm m}$ است که به t_0 نزدیک است.

2 حل ِ تقریبی

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\delta &:= t_{\rm m}-t_0,\\ \hat{\mathbf u} &:= \hat{\mathbf r}(0),\\ \mathbf v &:= \mathbf r_{\rm m}(0).\end{aligned} \tag{23}$$

معادله ي ِ (22) می‌شود

$$[R(\omega_0\,\delta\,\hat{\mathbf z})\,\hat{\mathbf u}]\cdot[R(\Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf n})\,(\hat{\mathbf u}\times\hat{\mathbf n})]=0. \tag{24}$$

فرض کنیم زاویه‌ها ي ِ $(\omega_0\,\delta)$ و $(\Omega_0\,t_{\rm m})$ کوچک اند. تا مرتبه ي ِ اول نسبت به این زاویه‌ها داریم

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf r}(t_{\rm m}) &= \hat{\mathbf u}+\omega_0\,\delta\,\hat{\mathbf z}\times\hat{\mathbf u},\\ \mathbf r_{\rm m}(t_{\rm m}) &= \mathbf v+\Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf n}\times\mathbf v.\end{aligned} \tag{25}$$

به این ترتیب، معادله ي ِ (24) تا مرتبه ي ِ یک نسبت به این زاویه‌ها می‌شود

$$\omega_0\,\delta\,(\hat{\mathbf z}\times\hat{\mathbf u})\cdot\mathbf v+\Omega_0\,t_{\rm m}\,(\hat{\mathbf n}\times\mathbf v)\cdot\hat{\mathbf u}=0. \tag{26}$$

با جاگذاری ي ِ $\mathbf r_{\rm m}(0)$ از (21)،

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf z}\times\hat{\mathbf u})\cdot\mathbf v &= -[\hat{\mathbf z}\cdot\hat{\mathbf n}-(\hat{\mathbf z}\cdot\hat{\mathbf u})\,(\hat{\mathbf n}\cdot\hat{\mathbf u})],\\ (\hat{\mathbf n}\times\mathbf v)\cdot\hat{\mathbf u} &= 1-(\hat{\mathbf n}\cdot\hat{\mathbf u})^2,\end{aligned} \tag{27}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_{\rm m}}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}. \qquad (28)$$

البته تا مرتبه یِ یک نسبت به $\Omega_0\,t_{\rm m}$ (یا $\omega_0\,\delta$)، جواب در واقع

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_0}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}, \qquad (29)$$

است.

اگر $\hat{\mathbf{n}}$ با $\hat{\mathbf{z}}$ برابر باشد، آن‌گاه (28) به شکل ِ ساده یِ

$$\delta=\frac{\Omega_0\,t_{\rm m}}{\omega_0} \qquad (30)$$

در می آید، که (17) میان‌گین ِ آن است.

از رابطه یِ (29) می‌شود مرتبه یِ δ را به دست آورد. با توجه به این که نسبت ِ ω_0 به Ω_0 تقریباً 30 است، δ از مرتبه یِ (1/30) ِ روز است، که می‌شود 50 دقیقه. این در واقع همان رابطه یِ (4) است. از این‌جا معلوم می‌شود خطا یِ نسبی یِ ناشی از جاگذاری یِ t_0 به جا یِ $t_{\rm m}$ در (28)، از مرتبه یِ (1/30) است. ضمناً خطا یِ نسبی یِ ناشی از چشم‌پوشی از جمله‌ها یِ $(\omega_0\,\delta)^2$ در برابر ِ $(\omega_0\,\delta)$، از مرتبه یِ $(2\,\pi/30)$، یا (1/5) است. به این ترتیب انتظار می‌رود با واردکردن ِ جمله‌ها یِ مرتبه‌یِ‌دو نسبت به $(\omega_0\,\delta)$ یا $(\Omega_0\,t_0)$، مقدار ِ δ با دقت ِ چند دقیقه به دست آید.

پس معادله یِ (24) را تا مرتبه یِ دوم نسبت به زاویه‌ها یِ $(\omega_0\,\delta)$ و $(\Omega_0\,t_{\rm m})$ بنویسیم. معادله‌ها یِ (25) می‌شوند

$$\hat{\mathbf{r}}(t_{\rm m})=\hat{\mathbf{u}}+\omega_0\,\delta\,\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}}+\frac{(\omega_0\,\delta)^2}{2}\,\hat{\mathbf{z}}\times\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}}),$$

$$\mathbf{r}_{\rm m}(t_{\rm m})=\mathbf{v}+\Omega_0\,t_{\rm m}\,\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}-\frac{(\Omega_0\,t_{\rm m})^2}{2}\,\mathbf{v}. \qquad (31)$$

در رابطه یِ دوم از این استفاده شده که $\hat{\mathbf{n}}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است. به این ترتیب، تا مرتبه یِ دوم،

$$(\omega_0\,\delta)\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{v}+(\Omega_0\,t_{\rm m})\,(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{u}}+(\omega_0\,\delta)\,(\Omega_0\,t_{\rm m})\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v})$$

$$+\frac{(\omega_0\,\delta)^2}{2}\,[\hat{\mathbf{z}}\times\,(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})]\cdot\mathbf{v}=0. \qquad (32)$$

با استفاده از (21)،

$$(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})\cdot(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{v}) = -(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,[(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}],$$
$$[\hat{\mathbf{z}}\times(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{u}})]\cdot\mathbf{v} = (\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,[(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}]. \qquad (33)$$

به این ترتیب،

$$\delta = \frac{\Omega_0\, t_{\mathrm{m}}}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}$$
$$+\frac{(\Omega_0\, t_{\mathrm{m}})^2}{\omega_0}\,\frac{(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\,\left\{\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}}}{2}-\frac{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u})\,[1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2]}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\right\}. \qquad (34)$$

در این رابطه هم می‌شود به جا یِ t_{m}، در جمله یِ اول $(t_0+\delta)$ و در جمله یِ دوم t_0 گذاشت. حتا می‌شود در جمله یِ اول هم به جا یِ t_{m} خود ـِ t_0 را گذاشت. علت آن است که (δ/t_0) از مرتبه یِ $(\Omega_0\, t_{\mathrm{m}})^2$ است. پس خطا یِ ناشی از درنظرنگرفتن ـِ جمله‌ها یِ $(\Omega_0\, t_{\mathrm{m}})^3$، با خطا یِ ناشی از جاگذاری یِ t_0 به جا یِ t_{m} در جمله یِ اول هم‌مرتبه است. پس

$$\delta = \frac{\Omega_0\, t_0}{\omega_0}\,\frac{1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}$$
$$+\frac{(\Omega_0\, t_0)^2}{\omega_0}\,\frac{(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{z}})\cdot\hat{\mathbf{u}}}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\,\left\{\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}}}{2}-\frac{(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{u})\,[1-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})^2]}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}-(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}})\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}})}\right\}. \qquad (35)$$

تغییر ـِ δ به خاطر ـِ تغییر ـِ بردارها یِ $\hat{\mathbf{u}}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \cos\eta. \qquad (36)$$

در نقطه ای از زمین با عرض ـِ جغرافیایی یِ λ،

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{u}} = \sin\lambda. \qquad (37)$$

رابطه یِ ساده‌تر ـِ (29) می‌شود

$$\delta = \frac{\Omega_0\, t_0}{\omega_0}\, f(y), \qquad (38)$$

که

$$f(y) := \frac{1 - y^2}{\cos\eta - y\,\sin\lambda}. \tag{39}$$

در این‌جا،

$$y := \hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{u}}, \tag{40}$$

و

$$y = \cos\eta\,\sin\lambda + x\,\sin\eta\,\cos\lambda, \tag{41}$$

که

$$x := \cos\xi. \tag{42}$$

ξ زاویه یِ $\hat{\mathbf{u}}$ با صفحه یِ شامل ِ $\hat{\mathbf{z}}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ است.

بررسی را به جاها یی محدود کنیم که عرض ِ جغرافیایی‌شان بزرگ نیست، تا ماه همیشه طلوع و غروب داشته باشد:

$$|\lambda| + \tilde{\eta} < \frac{\pi}{2}, \tag{43}$$

که

$$\tilde{\eta} := \cos^{-1}(|\cos\eta|), \tag{44}$$

یعنی $\tilde{\eta}$ زاویه یِ حاده یِ راستا یِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش ِ زمین با راستا یِ سرعت ِ زاویه ای یِ گردش ِ ماه دور ِ زمین است. از شرط ِ (43) نتیجه می‌شود مخرج ِ f، به ازا یِ $|x| \le 1$ تغییرِعلامت نمی‌دهد.

f در $x = \pm 1$ فرینه می‌شود. داریم

$$f_\pm := f(x = \pm 1),$$

$$= \frac{\cos(\lambda \pm \eta)}{\cos\lambda}. \tag{45}$$

جز این، f ممکن است در $y = y_*$ هم فرینه شود، که y_* صفر ِ مشتق ِ f نسبت به y است:

$$(1+y_*^2)\,\sin\lambda - 2\,y_*\,\cos\eta = 0. \tag{46}$$

این معادله دو ریشه دارد که حاصلِ‌ضرب ِشان یک است. ریشه ای که اندازه اَش بزرگتر از یک است قابلِ‌قبول نیست. پس،

$$y_* = \frac{\cos\eta}{\sin\lambda}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\right]. \tag{47}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$x_* = \frac{\cos\eta}{\sin\lambda\,\cos\lambda\,\sin\eta}\left[\cos^2\lambda-\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\right]. \tag{48}$$

این مقدار ِ x قابلِ‌قبول است، اگر قدرِمطلق ِ آن نابزرگ‌تر از یک باشد:

$$-1 \le \frac{\cos\eta}{\sin\lambda\,\cos\lambda\,\sin\eta}\left[\cos^2\lambda-\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\right] \le 1. \tag{49}$$

$\sin\eta$ و $\cos\lambda$ نامنفی اند. پس شرط‌ها یِ بالا را می‌شود چنین نوشت.

$$\cos\lambda\,\cos(|\lambda|+\tilde\eta) - \sqrt{\cos^2\eta-\sin^2\lambda} \le 0, \tag{50}$$

$$\cos\lambda\,\cos(|\lambda|-\tilde\eta) - \sqrt{\cos^2\eta-\sin^2\lambda} \ge 0, \tag{51}$$

که با استفاده از

$$\cos^2\eta-\sin^2\lambda = \cos(|\lambda|-\tilde\eta)\,\cos(|\lambda|+\tilde\eta), \tag{52}$$

می‌شوند

$$\cos|\lambda| - \sqrt{\frac{\cos(|\lambda|-\tilde\eta)}{\cos(|\lambda|+\tilde\eta)}} \le 0, \tag{53}$$

$$\cos|\lambda| - \sqrt{\frac{\cos(|\lambda|+\tilde\eta)}{\cos(|\lambda|-\tilde\eta)}} \ge 0. \tag{54}$$

شرط ِ (53) می‌شود

$$\frac{\cos(|\lambda|-\tilde\eta)}{\cos(|\lambda|+\tilde\eta)} \ge \cos^2|\lambda|. \tag{55}$$

این شرط به ازا يِ $\tilde{\eta}=0$ برقرار است. شرط ِ (43) تضمین می‌کند مخرج ِ طرف ِ چپ ِ (55) مثبت است. ضمناً داریم

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\eta}}\left[\frac{\cos(|\lambda|-\tilde{\eta})}{\cos(|\lambda|+\tilde{\eta})}\right]=\frac{\sin(2\,|\lambda|)}{\cos^2(|\lambda|+\tilde{\eta})},$$

$$\geq 0, \tag{56}$$

پس طرف ِ چپ ِ (55)، نسبت به $\tilde{\eta}$ نانزولی است. به این ترتیب (55) و در نتیجه (53) اتحاد است.

شرط ِ (54) می‌شود

$$\frac{\cos(|\lambda|+\tilde{\eta})}{\cos(|\lambda|-\tilde{\eta})}\leq\cos^2|\lambda|. \tag{57}$$

این شرط اتحاد نیست. این بار مشتق ِ طرف ِ چپ نسبت به $\tilde{\eta}$ نامثبت است، و نامساوی هم به ازا يِ $\tilde{\eta}=0$ برقرار نیست (مگر λ هم صفر باشد). شرط ِ (57) هم‌ارز است با

$$\sin(2\,|\lambda|)\leq[3+\cos(2\,|\lambda|)]\,\tan\tilde{\eta}, \tag{58}$$

یا

$$\tan(\tilde{\eta})\geq\frac{\sin(2\,|\lambda|)}{3+\cos(2\,|\lambda|)}. \tag{59}$$

می‌شود هم شرط را بر حسب ِ $|\lambda|$ به دست آورد:

$$\sin(2\,|\lambda|-\tilde{\eta})\leq 3\sin\tilde{\eta}, \tag{60}$$

که می‌شود

$$\tilde{\eta}\geq\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right), \tag{61}$$

$$\vee$$

$$\tilde{\eta}\leq\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\ \wedge\ |\lambda|\notin\left[\frac{\tilde{\eta}}{2}+\frac{1}{2}\,\sin^{-1}(3\,\sin\tilde{\eta}),\frac{\tilde{\eta}}{2}-\frac{1}{2}\,\sin^{-1}(3\,\sin\tilde{\eta})+\frac{\pi}{2}\right]. \tag{62}$$

با فرض ِ این که این شرط برقرار است، f یک فرینه يِ دیگر هم دارد:

$$f_* := f(y_*),$$
$$= \frac{2}{\cos\eta}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\eta}\right)^2}\right]^{-1}. \tag{63}$$

علامت ـِ f عوض نمی‌شود. پس هرسه‌فرینه یِ آن یا مثبت اند یا منفی. چون فرینه یِ f_* بین ـِ فرینه‌ها یِ $f_\pm$ رخ می‌دهد، مقدار ـِ f_* یا از هردو یِ $f_\pm$ کوچک‌تر است، یا از هردو یِ $f_\pm$ بزرگ‌تر. روشن است که

$$|f_*| \geq \frac{1}{\cos\tilde\eta} \geq \cos\tilde\eta \geq \frac{\cos(\tilde\eta+|\lambda|)}{\cos|\lambda|}. \tag{64}$$

پس $|f_*|$ از قدرِمطلق ـِ دستِ‌کم یک ی از دوفرینه یِ دیگر بزرگ‌تر است، و در نتیجه از قدرِمطلق ـِ هردوفرینه یِ دیگر بزرگ‌تر است.

خلاصه، f سه فرینه دارد ($f_\pm$ و f_*) اگر (61) یا (62) برقرار باشند، و دو فرینه دارد ($f_\pm$) اگر نَه (61) برقرار باشد و نَه (62). اگر (61) یا (62) برقرار باشند، آن‌گاه

$$\frac{\cos(\tilde\eta+|\lambda|)}{\cos|\lambda|} \leq |f| \leq \frac{2}{\cos\tilde\eta}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{\sin|\lambda|}{\cos\tilde\eta}\right)^2}\right]^{-1}, \tag{65}$$

و اگر نَه (61) برقرار باشد و نَه (62)، آن‌گاه

$$\frac{\cos(\tilde\eta+|\lambda|)}{\cos|\lambda|} \leq |f| \leq \frac{\cos(\tilde\eta-|\lambda|)}{\cos|\lambda|}. \tag{66}$$

3 مقدارها یِ عددی

مشخصات ـِ مدار ـِ ماه دور ـِ زمین را می‌شود در مثلاً [2] یافت. مدار ـِ ماه دور ـِ زمین بیضی یی با خروج‌ازمرکز ـِ e است، که

$$e = 0.055. \tag{67}$$

دوره ي گردش ِ ماه دور ِ زمين هم

$$T_0 = 27.3\,\mathrm{d} \tag{68}$$

است. $\hat{\mathbf{z}}$ (جهت ِ سرعت ِ زاويه‌ای ي چرخش ِ زمين)، در مقياس ِ سال ثابت است. زاويه ي اين بردار با بردار ِ عمود بر مدار ِ زمين دور ِ خورشيد α است:

$$\alpha = 23.5°. \tag{69}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ (جهت ِ سرعت ِ زاويه‌ای ي گردش ِ ماه دور ِ زمين) ثابت نيست و با دوره ي 19 سال تغيير می‌كند، اما β (زاويه ي اين بردار با بردار ِ عمود بر مدار ِ زمين دور ِ خورشيد) تقريباً ثابت است:

$$\beta = 5°. \tag{70}$$

به اين ترتيب η ثابت نيست:

$$\cos\eta = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma. \tag{71}$$

γ زاويه ای متغير است، اما تغييرات َش در مقياس ِ چند ماه چشم‌گير نيست.

ديده می‌شود آن چه δ را متغير می‌كند، تغييرات ِ Ω_0 و بردار ِ $\hat{\mathbf{u}}$ است: از تغيير ِ $\hat{\mathbf{n}}$ طی ِ چندماه می‌شود چشم پوشيد. برا ي تعيين ِ محدوده ي تغييرات ِ δ، كافی است همان شكل ِ ساده ي (29) را به كار ببريم. چون مدار ِ ماه دور ِ زمين دايره نيست، Ω_0 ثابت نيست. بر اساس ِ قانون ِ دوم ِ كِپلِر [a]،

$$\Omega_0\,r_{\mathrm{m}}^2 = \mathrm{const.}, \tag{72}$$

كه r_{m} فاصله ي ماه تا زمين است. از اين‌جا نتيجه می‌شود

$$\frac{\Delta\,\Omega_0}{\Omega_0} = 2\,e,$$

$$= 0.1. \tag{73}$$

پس تغيير ِ نسبی ي δ به خاطر ِ تغيير ِ Ω_0 از مرتبه ي 10% است.

از (69) تا (71) معلوم می‌شود

$$18.5^\circ \le \eta \le 28.5^\circ. \tag{74}$$

عرض ِ جغرافیایی ِ تهران 35.5° است. از این داده‌ها معلوم می‌شود برا یِ تهران دستِ‌کم یک ی از شرط‌ها یِ (61) یا (62) برقرار است. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} &0.72 \le f \le 1.18, \qquad \eta = 18.5^\circ,\\ &0.54 \le f \le 1.30, \qquad \eta = 28.5^\circ. \end{aligned} \tag{75}$$

این یعنی در تهران، فاصله یِ بین ِ دو غروب ِ متوالی یِ ماه بین ِ 27 min تا 65 min است. البته خود ِ این گستره 10% خطا دارد به خاطر ِ ثابت‌گرفتن ِ Ω_0، و از مرتبه یِ 20% خطا به خاطر ِ درنظرنگرفتن ِ مرتبه‌ها یِ بالاتر. اگر کلاً 30% خطا در نظر بگیریم، گستره یِ $t_{\rm m}$ ممکن است به 20 min تا 90 min هم برسد.

4 مرجع‌ها

[1] محمد خرمی، فریناز روشنی، احمد شریعتی، و امیرحسین فتح‌اللهی؛ ” ساعت ِ آفتابی“، X1-004 (2001/08/01)

[2] Kennet R. Lang; “Astrophysical data: planets and stars”, (Springer Verlag, 1992) chapter 4

5 اسم ِ خاص

[a] Kepler