X1-038 (2006/06/29)

جسم ِ صلب و نسبیت ِ خاص

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

حرکت ِ جسم ی بررسی می‌شود که متناظر با هر روی‌داد ِ آن چارچوب ِ لخت ی هست که جسم نسبت به آن ساکن است و فاصله یِ هر دونقطه یِ دل‌بخواه ِ جسم در آن چارچوب در زمان ِ سکون ِ مشترک ِشان ثابت است.

0 مقدمه

نسبیت ِ خاص با وجود ِ جسم ِ صلب سازگار نیست. یک علت ِ سینماتیکی آن است که اصولاً فاصله یِ دو نقطه یِ جسم از هم به چارچوب بسته‌گی دارد و اگر سرعت ِ دونقطه با هم فرق کند، چارچوب ِ طبیعی یی برا یِ محاسبه یِ فاصله یِ این دونقطه نداریم و ثابت‌بودن ِ فاصله یِ آن‌ها از هم بی‌معنی می‌شود: برا یِ سنجش ِ فاصله یِ دو نقطه از هم باید مکان ِ این دونقطه را هم‌زمان سنجید، و هم‌زمانی یِ دوروی‌داد مستقل‌ازچارچوب نیست. این بر خلاف ِ وضعیت ی است که در نسبیت ِ گالیله‌ای هست. آن‌جا هم‌زمانی یِ دو روی‌داد مطلق است و فاصله یِ (فضایی یِ) دو روی‌داد از هم مطلق است.

یک علت ِ دینامیکی هم از این‌جا می آید که صلب‌بودن ِ جسم را این طور تعریف کنیم که نسبت ِ تنش به کرنش برا یِ جسم بی‌نهایت است، به این ترتیب کرنش ِ جسم (برا یِ تنش‌ها یِ باپایان) صفر می‌شود. برا یِ جسم ی با این ویژه‌گی، سرعت ِ انتشار ِ

صوت بی‌نهایت است و این هم با نسبیت ِ خاص نمی‌خوانَد، چون قرار است علامت ی نباشد که سریع‌تر از نور منتشر شود.

اما نسبیت ِ خاص جلو ي یک چیز را نمی‌گیرد و آن این که جسم هم‌واره یک چارچوبِ‌سکون ِ آنی داشته باشد، که فاصله ي هر دونقطه ي جسم از هم در این چارچوب (که در حالت ِ کلی چارچوب ی متغیر است) ثابت باشد. این یعنی متناظر با هر روی‌داد ِ r در جهان خط ِ یک نقطه ي دل‌بخواه ِ جسم، چارچوب ی باشد که در همه ي روی‌دادها ي جسم که نسبت به این چارچوب با روی‌داد ِ r هم‌زمان اند سرعت نسبت به این چارچوب صفر باشد، و فاصله ي فضایی ي هر دوروی‌داد (متناظر با دو نقطه ي معین ِ جسم) از این نوع هم (در آن چارچوب) ثابت باشد.

1 چارچوبِ‌سکون ِ آنی

مکان ِ هر نقطه از جسم به زمان و برچسب ِ آن نقطه بسته‌گی دارد: $\mathbf{r}$ (مکان) تابع ِ t (زمان) و $\mathbf{R}$ (برچسب) است. می‌گوییم یک چارچوب ِ لخت چارچوبِ‌سکون ِ آنی ي جسم است، اگر زمان ی مثل ِ t'_0 (نسبت به آن چارچوب) باشد که

$$\dot{\mathbf{r}}'(t'_0, \mathbf{R}) = 0, \tag{1}$$

یعنی در $t' = t'_0$، سرعت ِ همه ي نقاط ِ جسم صفر باشد (t' و $\mathbf{r}'$ زمان و مکان نسبت به آن چارچوب اند). می‌گوییم جسم هم‌واره چارچوبِ‌سکون ِ آنی دارد، اگر یک خانواده ي یک‌پارامتری ي $\mathfrak{F}(\tau)$ از چارچوب‌ها ي لخت باشد که به ازا ي هر روی‌داد ِ r از جسم یک مقدار ِ τ باشد که در چارچوب ِ $\mathfrak{F}(\tau)$ و در زمان ِ متناظر با r در چارچوب ِ $\mathfrak{F}(\tau)$، همه ي روی‌دادها ي جسم نسبت به چارچوب ِ $\mathfrak{F}(\tau)$ ساکن باشند. این خانواده از چارچوب‌ها با یک خانواده بردار ِ سرعت $\mathbf{v}(\tau)$ (نسبت به یک چارچوبِ‌لخت ِ ثابت) متناظر است، به این ترتیب که فوقِ‌سطح ِ زمان‌ـ ثابت در $\mathfrak{F}(\tau)$ عبارت است از

$$c^2\,(t - t_0) = [\mathbf{v}(\tau)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{2}$$

می‌توان نشان داد اگر جسم هم‌واره چارچوبِ‌سکون ِ آنی داشته باشد، آن‌گاه فاصله ي هر دونقطه ي آن نسبت به چارچوب‌هايِ‌سکون ِ آنی تغییر نمی‌کند. به بیان ِ دقیق‌تر،

فوقِ‌سطح ِ زمان‌ثابت ی در $\mathfrak{F}(\tau)$ را در نظر بگیرید که همه یِ جهان‌خط‌ها یِ جسم در محل ِ تقاطع ِشان با آن فوقِ‌سطح، نسبت به $\mathfrak{F}(\tau)$ ساکن اند. فاصله یِ (فضایی یِ) دو روی‌داد ِ r و r_0 در این فوقِ‌سطح از یک‌دیگر، برابر است با فاصله یِ فضازمانی یِ این دوروی‌داد از هم:

$$\ell^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - c^2\,(t - t_0)^2, \tag{3}$$

که

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, \mathbf{R}) &= \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}(t_0, \mathbf{R}_0) &= \mathbf{r}_0. \end{aligned} \tag{4}$$

وجود ِ چارچوبِ‌سکون ِ آنی متناظر با سرعت ِ $\mathbf{v}$، به معنی یِ آن است که (2) برقرار است و

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t_0, \mathbf{R}_0) &= \mathbf{v}(\tau), \\ \dot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{R}) &= \mathbf{v}(\tau). \end{aligned} \tag{5}$$

می‌خواهیم نشان دهیم اگر جسم هم‌واره چارچوبِ‌سکون ِ آنی داشته باشد، آن‌گاه ℓ ثابت است. داریم

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \ell^2}{\partial t_0} = \left(\frac{\partial t}{\partial t_0} - 1\right)\,\left\{[\mathbf{v}(\tau)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - c^2\,(t - t_0)\right\}. \tag{6}$$

اما بر اساس ِ (2)، طرف ِ راست ِ (6) صفر است. پس ℓ ثابت است.

2 وجود ِ چارچوبِ‌سکون ِ آنی

فرض کنید حرکت ِ یک نقطه از جسم مشخص است، یعنی $\mathbf{r}(t, \mathbf{R}_0)$ به ازا یِ t یِ دل‌بخواه و یک $\mathbf{R}_0$ ِ خاص معلوم است. سئال این است که معادله یِ حرکت ِ نقاط ِ دیگر ِ جسم چه باشد تا این جسم هم‌واره چارچوبِ‌سکون ِ آنی داشته باشد.

رابطه‌ها یِ (2)، (4)، و (5) را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری از (2) نسبت به t_0، و استفاده از (5) داریم

$$c^2\,\left(\frac{\partial t}{\partial t_0}-1\right)=\mathbf{a}_0\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0\,\left(\frac{\partial t}{\partial t_0}-1\right), \tag{7}$$

که $\mathbf{v}_0$ همان $\mathbf{v}(\tau)$ است و

$$\mathbf{a}_0:=\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_0}{\mathrm{d}t_0}. \tag{8}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial t}{\partial t_0}=1+\frac{\gamma_0^2}{c^2}\,\mathbf{a}_0\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{9}$$

که γ_0 ضریب ِ لُرِنتس [a] است:

$$\gamma_0:=\frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v}_0/c)^2}}. \tag{10}$$

از (5) و (9) نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_0}=\left[1+\frac{\gamma_0^2}{c^2}\,\mathbf{a}_0\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right]\,\mathbf{v}_0. \tag{11}$$

این رابطه یک معادله یِ دیفرانسیل برا یِ $\mathbf{r}$ بر حسب ِ t_0 است، که از رو یِ آن علی‌الاصول می‌شود $\mathbf{r}$ را بر حسب ِ t_0 به دست آورد. بعد با استفاده از (9) می‌شود t را بر حسب ِ t_0 به دست آورد. به این ترتیب، با محاسبه یِ t_0 بر حسب ِ t تابعیت ِ $\mathbf{r}$ بر حسب ِ t به دست می‌آید. ضمناً به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر

$$\begin{aligned} c^2\,(t_1-t_0)&=\mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\\ c^2\,(t_2-t_0)&=\mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0), \end{aligned} \tag{12}$$

آن‌گاه

$$c^2\,(t_2-t_1)=\mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \tag{13}$$

که می‌گوید اگر روی‌دادها یِ r_1 و r_2 با r_0 هم‌زمان باشند، آن‌گاه r_1 و r_2 با یک‌دیگر هم‌زمان اند.

نتیجه این که با معلوم‌بودن ِ $\mathbf{r}(t,\mathbf{R}_0)$ به ازا یِ همه یِ t ها، می‌شود $\mathbf{r}(t,\mathbf{R})$ را به ازا یِ همه یِ t ها و $\mathbf{R}$ ها چنان حساب کرد که جسم هم‌واره چارچوبِ‌سکون ِ آنی داشته باشد.

3 میله

یک حالت ِ خاص میله ای است که در راستا ي خود َش حرکت می‌کند. در این حالت معادلاتِ‌دیفرانسیل ِ (9) و (11) را می‌شود به‌ساده‌گی حل کرد. ساده‌تر این است که به جا ي حل ِ مستقیم ِ این معادله‌ها، شرط‌ها يِ (2) و (3) را در نظر بگیریم. با جاگذاری يِ (2) در (3) نتیجه می‌شود

$$(x-x_0)^2 - \frac{v_0^2}{c^2}\,(x-x_0)^2 = \ell^2, \tag{14}$$

که مختصه يِ فضایی را با x نشان داده ایم. از این‌جا،

$$x - x_0 = \gamma_0\,(\pm\ell). \tag{15}$$

برچسب ِ نقاط (X) را چنان تعریف می‌کنیم که پرانتز ِ طرفِ‌راست $(X-X_0)$ شود. (این ممکن است، چون پرانتز ِ طرفِ‌راست ثابت است.) در نتیجه،

$$x = x_0 + \gamma_0\,(X - X_0). \tag{16}$$

به این ترتیب، از (2) نتیجه می‌شود

$$t = t_0 + \frac{\gamma_0\,v_0}{c^2}\,(X - X_0). \tag{17}$$

به‌ساده‌گی تحقیق می‌شود این‌ها معادلات ِ (9) و (11) را بر می‌آورند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial t_0} &= 1 + \frac{\gamma_0^3\,a_0}{c^2}\,(X - X_0),\\ &= 1 + \frac{\gamma_0^2\,a_0}{c^2}\,(x - x_0),\end{aligned} \tag{18}$$

که همان (9) است، و

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t_0} &= v_0 + \frac{\gamma_0^3\,v_0\,a_0}{c^2}\,(X - X_0),\\ &= \left[1 + \frac{\gamma_0^2\,a_0}{c^2}\,(x - x_0)\right]\,v_0,\end{aligned} \tag{19}$$

که همان (11) است.

بین ِ معادلات ِ (16) و (17) می‌شود $(X - X_0)$ را حذف کرد:

$$t - t_0 = \frac{v_0}{c^2}\,(x - x_0). \tag{20}$$

این در واقع مانسته یِ یک‌بُعدی یِ همان معادله یِ (2) است. به ازا یِ t_0 ِ معین (و در نتیجه x_0 و v_0 ِ معین)، این معادله یِ یک خط در فضازمان است. یک حالت ِ خاص این است که همه یِ خط‌ها یی که به ازا یِ t_0 ها یِ دل‌بخواه به دست می‌آیند از نقطه یِ ثابت ی در فضازمان بگذرند. می‌شود مبدئ را رو یِ این نقطه یِ ثابت گذاشت. در این صورت به ازا یِ همه یِ t_0 ها نقطه یِ $(t = 0, x = 0)$ رو یِ خط ِ بالا است:

$$0 - t_0 = \frac{v_0}{c^2}\,(0 - x_0). \tag{21}$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل برا یِ x_0 بر حسب ِ t_0 است:

$$c^2\,t_0 = x_0\,\frac{\partial x_0}{\partial t_0}, \tag{22}$$

که نتیجه می‌دهد

$$x_0^2 - c^2\,t_0^2 = \xi_0^2, \tag{23}$$

که ξ_0 ثابت است. اگر نقطه یِ ثابت ی از فضازمان که همه یِ خط‌ها یِ (20) از آن می‌گذرند را متناظر با $X = 0$ بگیریم، از (16) و (17) به‌ترتیب نتیجه می‌شود

$$x = \gamma_0\,X, \tag{24}$$

$$= \frac{X}{X_0}\,x_0, \tag{25}$$

و

$$t = \frac{\gamma_0\,v_0}{c^2}\,X, \tag{26}$$

$$= \frac{X}{X_0}\,t_0. \tag{27}$$

از (26) نتیجه می‌شود به ازا یِ $t_0 = 0$ داریم $v_0 = 0$ و $\gamma_0 = 1$، که نتیجه می‌دهد $x_0 = X_0$. این ثابت ِ ξ_0 را تعیین می‌کند. به این ترتیب، معادله یِ (23) می‌شود

$$x_0^2 - c^2\, t_0^2 = X_0^2. \tag{28}$$

از این‌جا و با استفاده از (25) و (27) نتیجه می‌شود

$$x^2 - c^2\, t^2 = X^2. \tag{29}$$

این معادله یِ حرکت ِ یک ذره با ویژه‌شتاب ِ ثابت است. یک راه ِ ساده یِ دیدن ِ این، آن است که توجه کنیم معادله یِ بالا با تبدیل ِ لُرِنتس [a] عوض نمی‌شود. پس در هر لحظه می‌شود تبدیلِ لُرِنتس ی یافت که جسم را در آن لحظه ساکن کند و معادله یِ حرکت در این چارچوبِ سکون ِ آنی همان معادله یِ (29) (البته با x' به جا یِ x و t' به جا یِ t) است. پس کافی است از معادله یِ بالا x را بر حسب ِ t حساب کنیم، دو بار از آن مشتق بگیریم، و نتیجه را برا یِ زمان ی حساب کنیم که سرعت صفر است. این زمان $t = 0$ است. پس ویژه‌شتاب ِ این نقطه $\ddot{x}(t = 0)$ است:

$$\ddot{x}(t = 0) = \frac{c^2}{X}. \tag{30}$$

4 اسم ِ خاص

[a] Lorentz