X1-039 (2006/07/31)

به سو یِ یک نقطه یِ خاص در کره

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

ژئودزیک ی بر یک کره بررسی می‌شود که دو نقطه یِ معین را به هم وصل می‌کند. جهت ِ بردار ِ مماس بر این ژئودزیک در ابتدا یِ آن، بر حسب ِ طول و عرض ِ جغرافیایی یِ ابتدا و انتها حساب می‌شود.

0 مقدمه

در فضاها یِ خطی یِ حقیقی، جهت ِ یک نقطه یِ خاص ($\mathbf{r}_0$) نسبت به یک نقطه یِ دیگر ($\mathbf{r}$) با بردار ِ $\mathbf{u}$ با

$$\mathbf{u} := \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \tag{1}$$

تعریف می‌شود (و البته هر مضرب ِ مثبت ی از $\mathbf{u}$ را هم می‌شود به جا یِ خود ِ $\mathbf{u}$ گرفت). در خمینه‌ها (که در آن‌ها تفاضل ِ نقاط تعریف نشده) این تعریف کار نمی‌کند. در این حالت، با فرض ِ آن که انتقال ِ موازی رو یِ خمینه تعریف شده جهت ِ نقطه یِ $\mathbf{r}_0$ نسبت به نقطه یِ $\mathbf{r}$ را بر اساس ِ ژئودزیک تعریف می‌کنیم: ژئودزیک ی را در نظر بگیرید که از $\mathbf{r}$ شروع و به $\mathbf{r}_0$ ختم می‌شود. بردار ِ مماس بر ژئودزیک در ابتدا یِ آن را جهت ِ $\mathbf{r}_0$ نسبت به $\mathbf{r}$ می‌نامیم. دیده می‌شود تعریف ِ (1) برا یِ فضاها یِ خطی، در واقع

حالت ـِ خاص ی از این تعریف است، به شرط ـِ آن که ژئودزیک‌ها یِ فضا یِ خطی را خط ـِ راست بگیریم (یعنی انتقالِ‌موازی را همان انتقالِ‌موازی یِ معمول ـِ فضاها یِ خطی بگیریم). اگر انتقالِ‌موازی را بر اساس ـِ مشتقِ‌هم‌وردا یی تعریف کنیم که بدون ـِ پیچش است و با متریک هم سازگار است، تعریف ـِ بالا این است که خم‌ها یی را در نظر بگیرید که از $\mathbf{r}$ شروع و به $\mathbf{r}_0$ ختم می‌شوند. بین ـِ این خم‌ها خم ی را بیابید که طول ـَ ش کمینه باشد. بردار ـِ مماس بر این خم در نقطه یِ $\mathbf{r}$، همان جهت ـِ موردِنظر است. یک مرجع برا یِ آشنایی با ژئودزیک و انتقالِ‌موازی [1] است.

یک حالت ـِ خاص از مسئله یِ بالا وقت ی است که خمینه یِ موردِنظر یک کره یِ دوبُعدی است، مثل ـِ کره یِ زمین. در این صورت پرسش ـِ بالا با این هم‌ارز است که می‌خواهیم از نقطه یِ $\mathbf{r}$ به نقطه یِ $\mathbf{r}_0$ برویم. فرض کنید در حرکت بر زمین محدودیت نداریم و سرعت ـِ حرکت هم مقدار ـِ ثابت ی است. در کدام جهت حرکت کنیم تا سریع‌تر به مقصد برسیم؟ یا: در نقطه ای با عرض ـِ جغرافیایی یِ λ و طول ـِ جغرافیایی یِ ϕ هستیم. جهت ـِ قبله (با طول و عرض ـِ جغرافیایی یِ λ_0 و ϕ_0) کدام است؟

جهت در یک نقطه از سطح ـِ زمین (جز قطب ـِ شمال و قطب ـِ جنوب) را می‌شود با یک زاویه نسبت به شمال تعیین کرد. مسئله این است. جهت ـِ نقطه ای با عرض و طول ـِ جغرافیایی یِ (λ_0, ϕ_0) نسبت به نقطه ای با عرض و طول ـِ جغرافیایی یِ (λ, ϕ) بردار ی است که نسبت به جهت ـِ شمال، به اندازه یِ زاویه یِ α به طرف ـِ غرب (یعنی پادساعت‌گرد) چرخیده است. رابطه یِ α با (λ_0, ϕ_0) و (λ, ϕ) چیست؟

1 جهت بر کره

ژئودزیک‌ها یِ کره دایره هایِ عظیمه اند، دایره‌ها یی که هر کدام اشتراک ـِ کره اند با صفحه ای که از مرکز ـِ کره می‌گذرد. بردار ـِ عمود بر صفحه ای که از مرکز ـِ کره و نقطه‌ها یِ $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ می‌گذرد

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}}_0 \times \hat{\mathbf{n}} \tag{2}$$

است، که $\mathbf{n}$ و $\mathbf{n}_0$ بردارها یِ یکه یِ در جهت ـِ به‌ترتیب ـِ $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ اند. بردار ـِ مماس بر ژئودزیک ی که $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ را به هم وصل می‌کند در نقطه یِ $\mathbf{r}$، بر $\mathbf{v}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ عمود است. پس $\mathbf{u}$

(جهت ِ $\mathbf{r}_0$ نسبت به $\mathbf{r}$) می‌شود

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}, \\ &= \hat{\mathbf{n}}_0 - (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \hat{\mathbf{n}})\, \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned} \tag{3}$$

دایره‌یِ‌عظیمه ای که از دونقطه یِ $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ می‌گذرد، به وسیله یِ این دو نقطه به دو بخش تقسیم می‌شود. به‌ساده‌گی می‌شود دید که بردار ِ بالا جهت ِ مماس بر این دایره از $\mathbf{r}$ به سو یِ $\mathbf{r}_0$، در بخش ِ کوتاه‌تر است. ضمناً دیده می‌شود اگر $\hat{\mathbf{n}}$ و $\hat{\mathbf{n}}_0$ با هم موازی یا پادموازی باشند (دونقطه یک‌سان یا متقاطر باشند) $\mathbf{u}$ صفر است و جهت تعریف‌نشده.

در هر نقطه یِ زمین (جز قطب‌ها) با طول و عرض ِ جغرافیایی یِ (λ, ϕ) یک جهت ِ شمال $(\hat{\mathbf{N}})$ و یک جهت ِ غرب $(\hat{\mathbf{W}})$ داریم که بر یک‌دیگر و بر $\hat{\mathbf{n}}$ عمود اند:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}} &= -\hat{\mathbf{x}}\, \sin\lambda\, \cos\phi - \hat{\mathbf{y}}\, \sin\lambda\, \sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\, \cos\lambda, \\ \hat{\mathbf{W}} &= \hat{\mathbf{x}}\, \sin\phi - \hat{\mathbf{y}}\, \cos\phi, \\ \hat{\mathbf{n}} &= \hat{\mathbf{x}}\, \cos\lambda\, \cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\, \cos\lambda\, \sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\, \sin\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

که (x, y, z) مختصات ِ دِکَرتی یی اند با مبدئ ِ مرکز ِ زمین، محور ِ z منطبق بر محور ِ قطبی، و محور ِ x متناظر با $\phi = 0$. جهت ِ $\mathbf{r}_0$ نسبت به $\mathbf{r}$ با زاویه یِ α مشخص می‌شود، که

$$\mathbf{u} =: |\mathbf{u}|\, (\hat{\mathbf{N}}\, \cos\alpha + \hat{\mathbf{W}}\, \sin\alpha), \tag{5}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|\, \cos\alpha &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}, \\ |\mathbf{u}|\, \sin\alpha &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{W}, \end{aligned} \tag{6}$$

یا

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|\, \cos\alpha &= \cos\lambda\, \sin\lambda_0 - \sin\lambda\, \cos\lambda_0\, \cos(\phi - \phi_0), \\ |\mathbf{u}|\, \sin\alpha &= \cos\lambda_0\, \sin(\phi - \phi_0). \end{aligned} \tag{7}$$

به این ترتیب،

$$\tan\alpha = \frac{\cos\lambda_0\ \sin(\phi-\phi_0)}{\cos\lambda\ \sin\lambda_0 - \sin\lambda\ \cos\lambda_0\ \cos(\phi-\phi_0)}. \tag{8}$$

البته $\tan\alpha$ جهت را به طور ِ یک‌تا مشخص نمی‌کند: به ازا یِ هر مقدار ِ $\tan\alpha$ دو جهت داریم، که با استفاده از یک ی از معادله‌ها یِ (7) جهت ِ درست (متناظر با ژئودزیک ِ کوتاه‌تر) مشخص می‌شود.

2 تقارن، حالت‌ها یِ خاص

از رابطه‌ها یِ (7) یا رابطه یِ (8) دیده می‌شود زاویه یِ جهت ِ $\mathbf{r}_0$ نسبت به $\mathbf{r}$ با شمال، لزوماً برابر ِ زاویه یِ جهت ِ $\mathbf{r}$ نسبت به $\mathbf{r}_0$ با شمال به اضافه یِ π نیست. یعنی در حالت ِ کلی اگر جا یِ مبدئ و مقصد را عوض کنیم، جهت وارونه نمی‌شود. جهت ِ $\mathbf{r}$ نسبت به $\mathbf{r}_0$ را با بردار ِ $\mathbf{u}'$، و زاویه یِ متناظر را با α' نمایش می‌دهیم. با عوض‌کردن ِ نقش‌ها یِ (λ,ϕ) و (λ_0,ϕ_0) با هم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}'|\ \cos\alpha' &= \cos\lambda_0\ \sin\lambda - \sin\lambda_0\ \cos\lambda\ \cos(\phi-\phi_0),\\ |\mathbf{u}'|\ \sin\alpha' &= \cos\lambda\ \sin(\phi_0-\phi).\end{aligned} \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$\tan\alpha' = \frac{\cos\lambda\ \sin(\phi_0-\phi)}{\cos\lambda_0\ \sin\lambda - \sin\lambda_0\ \cos\lambda\ \cos(\phi-\phi_0)}. \tag{10}$$

اما اگر $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ به هم نزدیک باشند، تا مرتبه یِ یک نسبت به $(\lambda-\lambda_0)$ و $(\phi-\phi_0)$ داریم

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}|\ \cos\alpha &= -\Delta\lambda,\\ |\mathbf{u}|\ \sin\alpha &= (\cos\bar{\lambda})\ \Delta\phi,\end{aligned} \tag{11}$$

که

$$\bar{\lambda} := \frac{\lambda+\lambda_0}{2}, \tag{12}$$

و

$$\Delta\lambda := \lambda - \lambda_0,$$
$$\Delta\phi := \phi - \phi_0. \tag{13}$$

البته تا مرتبه یِ یک، در رابطه یِ دوم ـِ (11) می‌شود λ یا λ_0 را هم به جا یِ $\bar{\lambda}$ گذاشت. دیده می‌شود در این حالت با عوض‌کردن ـِ نقش‌ها یِ (λ, ϕ) و (λ_0, ϕ_0) با هم، α به $(-\alpha)$ تبدیل می‌شود. این حالت متناظر با وضعیت ی است که بخش ـِ کوچک ی از کره که شامل ـِ $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}_0$ است را می‌شود با یک نقشه یِ مسطح تقریب کرد. در این حالت جابه‌جایی‌ها یِ در جهت ـِ شمال (تقسیم بر شعاع ـِ کره) برابر ـِ $\Delta\lambda$، و جابه‌جایی‌ها یِ در جهت ـِ غرب (تقسیم بر شعاع ـِ کره) برابر ـِ $\Delta\phi\,(\cos\bar{\lambda})$ اند.

اگر دونقطه تقریباً متقاطر باشند و نزدیک ـِ قطب‌ها هم نباشند، آن‌گاه

$$\phi - \phi_0 \approx \pi,$$
$$\lambda - \lambda_0 \approx 0. \tag{14}$$

در این حالت،

$$|\mathbf{u}|\,\cos\alpha = \lambda + \lambda_0,$$
$$|\mathbf{u}|\,\sin\alpha = (\cos\tilde{\lambda})\,(\Delta\phi - \pi), \tag{15}$$

و

$$|\mathbf{u}'|\,\cos\alpha' = \lambda + \lambda_0,$$
$$|\mathbf{u}'|\,\sin\alpha' = -(\cos\tilde{\lambda})\,(\Delta\phi - \pi), \tag{16}$$

که

$$\tilde{\lambda} := \frac{\lambda - \lambda_0}{2}. \tag{17}$$

دیده می‌شود در این حالت این دوجهت قرینه یِ هم نسبت به شمال اند:

$$\alpha' = -\alpha. \tag{18}$$

اگر $\phi = \phi_0$ (دونقطه رو یِ یک نصف‌النهار)، آن‌گاه یک ی از جهت‌ها (یِ $\mathbf{r}_0$ نسبت به $\mathbf{r}$ و $\mathbf{r}$ نسبت به $\mathbf{r}_0$) شمالی و دیگری جنوبی است. اگر هم $\phi - \phi_0 = \pi$ (طول‌هایِ‌جغرافیایی یِ دونقطه به اندازه یِ π با هم فرق دارند) آن‌گاه یا هردوجهت شمالی اند، یا هردوجهت جنوبی اند.

یک حالت ِ خاص ِ دیگر آن است که عرض ِ جغرافیایی یِ دونقطه یکی باشد. ممکن است در این حالت چنین به نظر برسد که یک ی از جهت‌ها شرقی و دیگری غربی است. اما (7) و (8) نشان نمی‌دهند در این حالت α برابر ِ $(\pm\pi/2)$ باشد، مگر در استوا. علت آن است که مدارها (جز استوا) دایره‌یِ‌عظیمه نیستند و کوتاه‌ترین مسیر ی که دو نقطه یِ هم‌عرضِ‌جغرافیایی را به هم وصل می‌کند مدار ِ مشترک ِ آن دونقطه نیست، و در محل ِ هر یک از آن دونقطه شرقی‌ـ غربی نیست. در واقع از مقایسه یِ (7) با (9)، معلوم می‌شود در این حالت هم (18) برقرار است، یعنی این دوجهت قرینه یِ‌هم نسبت به شمال اند.

به عنوان ِ یک مثال، شهرها یِ تهران و مکه را در نظر بگیرید. مختصات ِ جغرافیایی یِ تهران $(\lambda = 35.5^\circ, \phi = 51.5^\circ)$، و مختصات ِ جغرافیایی یِ مکه $(\lambda_0 = 21.5^\circ, \phi_0 = 40^\circ)$ است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\alpha = 141^\circ, \tag{19}$$

یعنی جهت ِ قبله در تهران 141° به طرف ِ غرب، نسبت به شمال است، یا 39° به طرف ِ غرب، نسبت به جنوب. هم‌چنین داریم

$$\alpha' = -33^\circ, \tag{20}$$

یعنی جهت ِ تهران نسبت به مکه 33° به طرف ِ شرق، نسبت به شمال است. دیده می‌شود این دوجهت وارونه یِ هم نیستند.

3 مرجع

[1] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics”, (Institute of Physics Publishing, 1995) chapter 7