X1-040 (2006/09/29)

حالت‌ها یِ دورانی و فضا یِ فاز

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

شمارش ِ حالت‌ها یِ دورانی بررسی می‌شود و تعداد ِ این حالت‌ها با حجم ِ ناحیه یِ معینی ی از فضا یِ فاز ِ دورانی مقایسه می‌شود.

0 مقدمه

در محاسبه‌ها یِ مکانیک ِ آماری، در حالت ِ کلاسیک به حجم ِ فضا یِ فاز و در حالت ِ کوانتمی به تعداد ِ حالت‌ها بر می‌خوریم. انتظار می‌رود بین ِ این‌دو تناظر ی باشد به این شکل

$$\frac{1}{h^n}\int_R \mathrm{d}\mathcal{V} \sim N, \tag{1}$$

که در آن N تعداد ِ حالت‌ها یِ متناظر با ناحیه یِ R در فضا یِ فاز است [1]. n تعداد ِ درجه‌ها یِ آزادی، $\mathrm{d}\mathcal{V}$ عنصر ِ حجم در فضا یِ فاز، و h ثابت ِ پْلانک [a] است. عنصرِحجم ِ فضا یِ فاز، بر حسب ِ مختصات ِ کانونیک شکل ِ ساده ای دارد. اگر Ξ^i ها مختصات ِ کانونیک ِ فضا یِ فاز باشند، آن‌گاه

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}^{2\,n}\Xi. \tag{2}$$

وقت ی با درجاتِ‌آزادی یِ انتقالی سروکار داریم، کار با مختصات ِ مکان و تکانه (که کانونیک اند) ساده است. در موارد ِ دیگر بر اساس ِ قضیه یِ دَربو [b] دستِ‌کم موضعاً می‌شود مختصات ِ کانونیک ی یافت [2]، اما ممکن است کار با این مختصات ساده نباشد. یک ی از این موارد درجاتِ‌آزادی یِ دورانی است. در این مورد گاه ی مختصات ی که کار را ساده می‌کند شامل ِ پارامترها یِ مشخص‌کننده یِ جهت‌گیری (مثلاً پارامترها یِ اُیلِر [c]) و مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای اند. اما این مختصات کانونیک نیستند، مثلاً کروشه‌یِ‌پواسُن [d]ِ مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای می‌شود

$$\{L_a, L_a\} = \varepsilon^c{}_{a\,b}\, L_c \tag{3}$$

که ε تانسور ِ لِوی‌ـ چیویتا [e] است. پس عنصرِحجم ِ فضا یِ فاز به شکل ِ (2) نیست.

اگر رابطه یِ مختصات ِ کانونیک (Ξ) با مختصات ِ ξ معلوم باشد، عنصرِحجم ِ (2) را می‌شود بر حسب ِ ξ نوشت:

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{1}{h}\,\mathrm{d}^{2\,n}\xi, \tag{4}$$

که h قدرِمطلق ِ دترمینان ِ یاکُبی [f] یِ تبدیل است:

$$h := \left|\det\left(\frac{\partial\xi}{\partial\Xi}\right)\right|. \tag{5}$$

یک راه ِ غیرِمستقیم ِ محاسبه یِ h، استفاده از شکل ِ کروشه یِ پواسُن [d] بین ِ مختصات ِ ξ است. داریم

$$\tilde{J}^{i\,j} := \{\xi^i, \xi^j\},$$

$$= J^{k\,l}\,\frac{\partial\xi^i}{\partial\Xi^k}\,\frac{\partial\xi^j}{\partial\Xi^l}, \tag{6}$$

که J تانسور ِ هم‌تافته [3] است. از (6) نتیجه می‌شود

$$h = \sqrt{|\det(\tilde{J})|}, \tag{7}$$

که منظور از $\det(\tilde{J})$ دترمینان ِ حاصل‌ضرب ِ $\tilde{J}$ در δ با مئلفه‌ها یِ $\delta_{i\,j}$ است.

در این‌جا شکل ِ عنصرِحجم ِ فضا یِ فاز و رابطه یِ آن با اندازه یِ هار [g] را بررسی می‌کنیم. برا یِ درجه‌هایِ‌آزادی یِ دورانی، شکل ِ عنصرِحجم ِ فضا یِ فاز را به دست

می‌آوریم و (1) را برا یِ حالت‌ها یِ خاص بررسی می‌کنیم.

1 کروشه یِ پواسُن و اندازه یِ هار برا یِ گروه‌ها یِ لی

یک گروه ِلی [g] در نظر بگیرید که مجموعه یِ مولدها یَش $\{T_a \mid a\}$، و مجموعه یِ مختصات ِ‌ش $\{x^a \mid a\}$ است. البته ممکن است این مختصات فقط موضعاً تعریف شده باشند. فضا یِ فاز ِ متناظر با این گروه را با خود ِ گروه و مولدها یِ عمل ِ انتقال‌ازچپ در گروه (مجموعه یِ $\{G_a \mid a\}$) می‌سازیم. به این معنی که اگر

$$[\exp(s^b\, T_b)]\, U(x) =: U(y), \tag{8}$$

تعریف می‌کنیم

$$\{x^a, G_b\} := \left.\frac{\partial y^a}{\partial s^b}\right|_{s=0},$$

$$=: A^a{}_b. \tag{9}$$

هم‌راه با این، کروشه یِ پواسُن [d] برا یِ بقیه یِ موارد را هم به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\{x^a, x^b\} = 0, \tag{10}$$

$$\{G_a, G_b\} = f^c{}_{a\,b}\, G_c, \tag{11}$$

که $f^c{}_{a\,b}$ ها ثابت‌هایِ‌ساختار ِ گروه اند:

$$[T_a, T_b] = f^c{}_{a\,b}\, T_c, \tag{12}$$

مختصات ِ فضا یِ فاز را مجموعه یِ x^a ها و G_a ها می‌گیریم. رابطه‌ها یِ (9) تا (11) مئلفه‌ها یِ $\tilde{J}$ در رابطه یِ (6) را مشخص می‌کنند. از این‌ها معلوم می‌شود

$$|\det(\tilde{J})| = [\det(A)]^2, \tag{13}$$

و با مقایسه با (7)،

$$h = |\det(A)|. \tag{14}$$

اندازه‌یِ‌هار [g]ِ چپ‌ناوردا (راست‌ناوردا) اندازه ای رو یِ گروه است که در اثر ِ انتقال‌ازچپ (انتقال‌ازراست) با عنصرها یِ گروه تغییر نمی‌کند [4]. برا یِ ساختن ِ چنین‌اندازه ای، کافی است یک ناحیه حول ِ عنصر ِ همانی یِ گروه در نظر بگیریم، و اثر ِ انتقال‌ازچپ (انتقال‌ازراست) بر آن را بررسی کنیم، و اندازه را چنان تعریف کنیم که حجم ِ ناحیه یِ حاصل با حجم ِ ناحیه یِ اول برابر باشد. طرف ِ چپ ِ رابطه یِ (8) اثر ِ انتقال‌ازراست با $\exp(s^b\, T_b)$ بر $U(x)$ را نشان می‌دهد. از این‌جا معلوم می‌شود عنصرِحجم ِ متناظر با اندازه‌یِ‌هار [g]ِ راست‌ناوردا (صرفِ‌نظر از یک ثابت ِ ضربی)

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{r}}(x) = \frac{1}{|\det(A)|}\,\mathrm{d}^n x \tag{15}$$

است. این که ثابت ِ ضربی را یک بگیریم، یعنی عنصرِحجم ِ گروه در نزدیکی یِ همانی را خود ِ $\mathrm{d}^n s$ بگیریم. دیده می‌شود در این حالت بین ِ عنصرِحجم ِ فضا یِ فاز و عنصرِحجم ِ متناظر با اندازه‌یِ‌هار [g]ِ راست‌ناوردا رابطه یِ ساده ای برقرار است:

$$\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}\mu_{\mathrm{r}}(x)\,\mathrm{d}^n G. \tag{16}$$

البته برا یِ گروه‌ها یی که اندازه‌یِ‌هار [g]ِ چپ‌ناوردا و راست‌ناوردا یِشان یکی است (از جمله برا یِ گروه ِ دَوَران [4])، می‌شود در (16) به جا یِ عنصرِحجم ِ متناظر با اندازه‌یِ‌هار [g]ِ راست‌ناوردا $\mathrm{d}\mu_{\mathrm{l}}(x)$ (عنصرِحجم ِ متناظر با اندازه‌یِ‌هار [g]ِ چپ‌ناوردا) گذاشت.

2 اندازه یِ هار برا یِ گروه ِ دَوَران

برا یِ $\mathrm{SO}(3)$ (گروه ِ دَوَران‌ها یِ سه‌بُعدی) می‌شود پارامترها یِ جبر را مختصه‌ها یِ گروه گرفت. یک انتخاب ِ دیگر هم پارامترها یِ اُیلِر [c] است. البته هر یک از این‌ها را به عنوان ِ مختصات ِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ (گروه ِ ماتریس‌ها یِ یکانی یِ 2×2 با دترمینان ِ یک) هم می‌شود به کار برد. جبر ِ این دوگروه ِ سه‌بُعدی یک‌ریخت است و داریم

$$[T_a, T_b] = \varepsilon^c{}_{a\,b}\, T_c. \tag{17}$$

2.1 پارامترها یِ جبر

یک عضو ـِ گروه ـِ $\mathrm{SO}(3)$ را می‌شود با پارامترها یِ جبر نمایش داد:

$$U(x) = \exp(x^a\, T_a). \tag{18}$$

در مورد ـِ گروه ـِ $\mathrm{SO}(3)$، ناحیه ای از مختصات ـِ (x^1, x^2, x^3) که کل ـِ گروه را می‌پوشاند یک گوی به شعاع ـِ π است، که نقاط ـِ متقاطر ـِ مرز ـِ آن یکی شده اند. این مجموعه فضا یِ افکنشی یِ سه‌بُعدی (RP_3) است. در مورد ـِ گروه ـِ $\mathrm{SU}(2)$، ناحیه ای از مختصات که کل ـِ گروه را می‌پوشاند گو یی به شعاع ـِ ($2\,\pi$) است، که همه یِ نقطه‌ها یِ مرز ـِ آن یکی شده اند. این مجموعه کره یِ سه‌بُعدی (S_3) است.

یک راه ـِ ساده برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ ماتریس ـِ A، استفاده از نمایش ـِ دوبُعدی یِ $\mathrm{SU}(2)$ است. رابطه یِ y با x و s مستقل از نمایش است. پس A هم مستقل از نمایش است. در نمایش ـِ دوبُعدی مولدها متناسب با ماتریس‌ها یِ پاؤلی [h] اند:

$$T_a = -\frac{i}{2}\,\sigma_a. \tag{19}$$

این‌ها علاوه بر (17) یک رابطه یِ پادجابه‌جایی را هم بر می آورند:

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\,\delta_{a\,b}. \tag{20}$$

از (17)، (19)، و (20) نتیجه می‌شود

$$\sigma_a\,\sigma_b = \delta_{a\,b} + i\,\varepsilon^c{}_{a\,b}\,\sigma_c. \tag{21}$$

با تعریف‌ها یِ

$$\begin{aligned} y\cdot x &:= \delta_{a\,b}\, y^a\, x^b,\\ (y\times x)^a &:= \varepsilon^a{}_{b\,c}\, y^b\, x^c, \end{aligned} \tag{22}$$

برا يِ x و y ها يِ دل‌بخواه، معلوم می‌شود در این نمایش،

$$U(x) = \cos\frac{r}{2} - i\,\frac{x^a\,\sigma_a}{r}\,\sin\frac{r}{2}, \tag{23}$$

که

$$r := (x\cdot x)^{1/2}. \tag{24}$$

بخش ـِ مرتبه يِ یک نسبت به s در رابطه يِ (8) را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\mathrm{LH} = &-\frac{x\cdot s}{2\,r}\,\sin\frac{r}{2},\\ &-\frac{i\,\sigma_a}{2}\left[s^a\,\cos\frac{r}{2} + \frac{(s\times x)^a}{r}\,\sin\frac{r}{2}\right].\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{RH} = &-\frac{x\cdot\delta x}{2\,r}\,\sin\frac{r}{2}\\ &-\frac{i\,\sigma_a}{2}\left[\frac{x^a\,(x\cdot\delta x)}{r^2}\,\cos\frac{r}{2} - \frac{2\,x^a\,(x\cdot\delta x)}{r^3}\sin\frac{r}{2} + \frac{2\,\delta x^a}{r}\,\sin\frac{r}{2}\right],\end{aligned} \tag{26}$$

که LH و RH به ترتیب طرف ـِ چپ و طرف ـِ راست اند و

$$\delta x^a := A^a{}_b\,s^b. \tag{27}$$

از برابری يِ LH با RH نتیجه می‌شود

$$x\cdot\delta x = x\cdot s, \tag{28}$$

$$\frac{x\,(x\cdot\delta x)}{r^2}\,\cos\frac{r}{2} - \frac{2\,x\,(x\cdot\delta x)}{r^3}\sin\frac{r}{2} + \frac{2\,\delta x}{r}\,\sin\frac{r}{2} = s\,\cos\frac{r}{2} + \frac{s\times x}{r}\,\sin\frac{r}{2}. \tag{29}$$

رابطه يِ (28) را در (29) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\delta x = -\frac{x\times s}{2} + \left(\frac{r}{2}\,\cot\frac{r}{2}\right)\,s + \left(1 - \frac{r}{2}\,\cot\frac{r}{2}\right)\,\frac{x\,(x\cdot s)}{r^2}, \tag{30}$$

و از آن‌جا،

$$A^a{}_b = \frac{x^c}{2}\,\varepsilon^a{}_{b\,c} + \left(\frac{r}{2}\,\cot\frac{r}{2}\right)\,\delta^a{}_b + \left(1 - \frac{r}{2}\,\cot\frac{r}{2}\right)\,\frac{x^a\,\delta_{b\,c}\,x^c}{r^2}. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$h = \frac{r^2}{4}\ \left(1 + \cot^2 \frac{r}{2}\right),$$
$$= \frac{r^2/4}{\sin^2(r/2)}. \tag{32}$$

2.2 پارامترها یِ اُیلِر

بر حسب ِ (ϕ, θ, ψ) (پارامترها یِ اُیلِر [c])، اعضا یِ گروه ِ SO(3) یا SU(2) می‌شوند

$$U(\phi, \theta, \psi) = \exp(\phi\, T_3)\ \exp(\theta\, T_2)\ \exp(\psi\, T_3). \tag{33}$$

برا یِ SO(3) ناحیه یِ $(0 \le \phi < 2\,\pi, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \psi < 2\,\pi)$ و برا یِ SU(2) ناحیه یِ $(0 \le \phi < 2\,\pi, 0 \le \theta \le 2\,\pi, 0 \le \psi < 2\,\pi)$ کل ِ گروه را می‌پوشانند.

رابطه یِ (8) را به این شکل می‌نویسیم.

$$[\exp(s^b\, T_b)] =: U(y)\, U^{-1}(x), \tag{34}$$

که از آن (تا مرتبه یِ یک نسبت به s) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} 1 + s^b\, T_b &= [1 + (\delta\phi)\, T_3]\ \exp(\phi\, T_3)\, [1 + (\delta\theta)\, T_2]\ \exp(\theta\, T_2)\, [1 + (\delta\psi)\, T_3] \\ &\quad \times\ \exp(-\theta\, T_2)\ \exp(-\phi\, T_3), \\ &= 1 + [-(\delta\theta)\ \sin\phi + (\delta\psi)\ \sin\theta\ \cos\phi]\, T_1 \\ &\quad + [(\delta\theta)\ \cos\phi + (\delta\psi)\ \sin\theta\ \sin\phi]\, T_2 + [\delta\phi + (\delta\psi)\ \cos\theta]\, T_3. \end{aligned} \tag{35}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \delta\phi &= (-\cos\phi\ \cot\theta)\, s^1 + (-\sin\phi\ \cot\theta)\, s^2 + s^3, \\ \delta\theta &= (-\sin\phi)\, s^1 + (\cos\phi)\, s^2, \\ \delta\psi &= \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\, s^1 + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\, s^2, \end{aligned} \tag{36}$$

و به این ترتیب،

$$h = \left|\det\left[\frac{\partial(\phi,\theta,\psi)}{\partial(s^1,s^2,s^3)}\right]\right|,$$
$$= \frac{1}{|\sin\theta|}. \tag{37}$$

2.3 حجم ِ گروه ِ دَوَران

$V_{\mathrm{SO}(3)}$ (حجم ِ گروه ِ دَوَران) با استفاده از رابطه یِ (32) به دست می‌آید:

$$V_{\mathrm{SO}(3)} = \int_0^{\pi} \mathrm{d}r \int \mathrm{d}\Omega\ \left[4\,\sin^2\left(\frac{r}{2}\right)\right], \tag{38}$$

که Ω مشخص‌کننده یِ جهت ِ x است. این جهت با دو زاویه یِ θ و ϕ مشخص می‌شود که (r,θ,ϕ) مختصات ِ کروی یِ متناظر با x اند. داریم

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{39}$$

از این‌جا،

$$V_{\mathrm{SO}(3)} = 8\,\pi^2. \tag{40}$$

می‌شود این حجم را با استفاده از پارامترها یِ اُیلِر [c] هم حساب کرد. از (37) نتیجه می‌شود

$$V_{\mathrm{SO}(3)} = \int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\,\pi} \mathrm{d}\psi\ \sin\theta, \tag{41}$$

که باز هم به (40) می‌انجامد.

با محاسبه‌ها یِ مشابه ی معلوم می‌شود حجم ِ گروه ِ $\mathrm{SU}(2)$ دو برابر ِ این مقدار است:

$$V_{\mathrm{SU}(2)} = 16\,\pi^2. \tag{42}$$

3 حجم ِ فضا یِ فاز برا یِ گروه ِ دَوَران

حالت ِ جسم ی که می‌تواند بچرخد با پارامترها یِ مشخص‌کننده یِ یک عضو ِ گروه ِ دَوَران (فضا یِ پیکربندی) و مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای (L_a ها) مشخص می‌شود. (مولدها یِ گروه ِ دَوَران را به جا یِ G_a ها با L_a ها نمایش داده ایم.) دو حالت ِ خاص را بررسی می‌کنیم: دَوَران ِ یک جسم ِ بیش‌ازیک‌بُعدی، و دَوَران ِ یک میله.

3.1 جسم‌ها یِ بیش‌ازیک‌بُعدی

همه یِ حالت‌ها یِ دَوَرانی یِ یک جسم ِ بیش‌ازیک‌بُعدی را در نظر بگیرید که اندازه یِ تکانه‌یِ‌زاویه یَش نابزرگ‌تر از J است:

$$\sum_{a=1}^{3}(L_a)^2 \le J^2. \tag{43}$$

حجم ِ فضایِ‌فاز ِ متناظر با چنین‌سیستم ی می‌شود حجم ِ گروه ِ دَوَران ضرب در حجم ِ یک گو یِ سه بُعدی به شعاع ِ J:

$$\mathcal{V}_{\mathrm{SO}(3)} = \frac{32\,\pi^3}{3}\,J^3. \tag{44}$$

برا یِ تحقیق‌کردن ِ رابطه یِ (1)، تعداد ِ حالت‌ها یِ متناظر با نمایش‌ها یِ با اسپین ِ صحیح ِ نابزرگ‌تر از j را حساب می‌کنیم. فقط اسپین‌ها یِ صحیح را در نظر گرفته ایم، چون گروه ِ دَوَران را بررسی می‌کنیم و نمایش‌ها یِ با اسپین ِ نیمه‌صحیح (مثلاً اسپین ِ یک‌دوم) نمایش‌ها یِ گروه ِ دَوَران نیستند. ضمناً توجه داریم که پیکربندی یِ سیستم با یک عضو ِ گروه ِ دَوَران مشخص می‌شود نَه با یک جهت در فضا یِ سه‌بُعدی. با اعضا یِ هر گروه یک نمایش ِ خاص ِ آن گروه ساخته می‌شود که نمایش ِ منظم ِ آن گروه است:

$$[R_{\mathrm{reg}}(U_1)]\,U_2 := U_1\,U_2. \tag{45}$$

دیده می‌شود نمایش ِ منظم ِ یک عضو ِ گروه، در واقع همان انتقال‌ازچپ با آن عضو ِ گروه است. نمایش ِ منظم تجزیه‌پذیر است و برا یِ یک گروه ِ فشرده، در تجزیه یِ نمایش ِ منظم همه یِ نمایش‌ها یِ باپایان‌بُعدی یِ گروه ظاهر می‌شوند و هر نمایش به

تعداد ی برابر با بُعد ِ آن نمایش [5]. بنابراین تعداد ِ حالت‌ها (در واقع تعداد ِ حالت‌ها یِ نمایش‌ها یِ با اسپین ِ صحیح ِ نابزرگ‌تر از j در نمایش ِ منظم) می‌شود

$$N_{\mathrm{SO}(3)} = \sum_{l=0}^{j} (d_l)^2, \tag{46}$$

که d_l بُعد ِ نمایش ِ با اسپین ِ l است. داریم

$$d_l = 2\,l + 1, \tag{47}$$

و از آن‌جا،

$$N_{\mathrm{SO}(3)} = \frac{(j+1)\,(2\,j+1)\,(2\,j+3)}{3}. \tag{48}$$

برا یِ j ها یِ بزرگ، می‌شود تناظر ِ

$$J \sim \hbar j \tag{49}$$

را به کار برد. ضمناً می‌شود در طرف ِ راست ِ (48) فقط بزرگ‌ترین توان ِ j را نگه داشت. روشن است که در این صورت،

$$\frac{\mathcal{V}_{\mathrm{SO}(3)}}{h^3} \sim N_{\mathrm{SO}(3)}, \tag{50}$$

که همان تناظر ِ (1) است.

برا یِ $\mathrm{SU}(2)$، حجم ِ فضا یِ فاز دو برابر ِ طرف ِ راست ِ (44) می‌شود:

$$\mathcal{V}_{\mathrm{SU}(2)} = \frac{64\,\pi^3}{3}\,J^3. \tag{51}$$

اما ضمناً در محاسبه یِ $N_{\mathrm{SU}(2)}$ همه یِ اسپین‌ها (چه صحیح و چه نیمه‌صحیح) وارد می‌شوند:

$$N_{\mathrm{SU}(2)} = \sum_{2\,l=0}^{2\,j} [(2\,l)+1]^2, \tag{52}$$

که $(2\,l)$ صحیح است. به این ترتیب،

$$N_{\mathrm{SU}(2)} = \frac{(j+1)\,(2\,j+1)\,(4\,j+3)}{3}. \tag{53}$$

این‌جا هم اگر برا یِ j ها یِ بزرگ فقط بزرگ‌ترین توان ِ j در طرف ِ راست ِ (53) را نگه داریم و تناظر ِ (49) را هم به کار ببریم، به

$$\frac{\mathcal{V}_{\mathrm{SU}(2)}}{h^3} \sim N_{\mathrm{SU}(2)} \tag{54}$$

می‌رسیم، که همان تناظر ِ (1) است.

3.2 میله‌ها

پیکربندی ِ دَوَرانی ِ یک میله با دو زاویه مشخص می‌شود نَه سه‌تا. این دوزاویه را می‌شود (θ,ϕ) (زاویه‌ها ِ مختصات ِ کروی) گرفت. به علاوه مئلفه ِ تکانه ِ زاویه‌ای ِ میله در راستا ِ خود َش صفر است. به این ترتیب به‌تر است به جا ِ L_a ها از به‌اصطلاح مئلفه‌ها ِ تکانه ِ زاویه‌ای در چارچوب ِ جسم استفاده کنیم.

از (9) و (36) نتیجه می‌شود

$$L_1 = (-\cos\phi\,\cot\theta)\,p_\phi + (-\sin\phi)\,p_\theta + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\,p_\psi,$$

$$L_2 = (-\sin\phi\,\cot\theta)\,p_\phi + (\cos\phi)\,p_\theta + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,p_\psi,$$

$$L_3 = p_\phi, \tag{55}$$

که p_ζ تکانه ِ مزدوج ِ ζ است. رابطه ِ L_a ها با L'_a ها (مئلفه‌ها ِ تکانه ِ زاویه‌ای در چارچوب ِ جسم) از طریق ِ ماتریس ِ دَوَران است:

$$L_a = [\exp(\phi\,M_3)\,\exp(\theta\,M_2)\,\exp(\psi\,M_3)]_a{}^b\,L'_b, \tag{56}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$L'_1 = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\,p_\phi + (\sin\psi)\,p_\theta + (\cos\psi\,\cot\theta)\,p_\psi,$$

$$L'_2 = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\,p_\phi + (\cos\psi)\,p_\theta + (-\sin\psi\,\cot\theta)\,p_\psi,$$

$$L'_3 = p_\psi. \tag{57}$$

به این ترتیب شرط ـِ $L'_3 = 0$ می‌شود

$$p_\psi = 0, \tag{58}$$

و شرط ـِ این که اندازه یِ تکانه یِ زاویه‌ای بزرگ‌تر از J نباشد می‌شود

$$\frac{(p_\phi)^2}{\sin^2\theta} + p_\theta^2 \le J^2. \tag{59}$$

فضایِ‌فاز ـِ چهاربعدی یی را در نظر بگیرید که مختصات ـِ کانونیک َ ش $(\phi, \theta, p_\phi, p_\theta)$ است. حجم ـِ بخش ی از این‌فضا که رابطه یِ (59) را بر می‌آوَرَد می‌شود

$$\mathcal{V}'_{\mathrm{SO}(3)} = 4\,\pi^2\,J^2. \tag{60}$$

حالا تعداد ـِ حالت‌ها یِ دَوَرانی با اسپین ـِ صحیح ـِ نابزرگ‌تر از j را در نظر بگیرید. داریم

$$N'_{\mathrm{SO}(3)} = \sum_{l=0}^{j}(2\,l+1), \tag{61}$$

و از آن‌جا،

$$N'_{\mathrm{SO}(3)} = (j+1)^2. \tag{62}$$

اگر تناظر ـِ (49) را به کار ببریم و در طرف ـِ راست (62) هم فقط بزرگ‌ترین توان ـِ j را نگه داریم،

$$\frac{\mathcal{V}'_{\mathrm{SO}(3)}}{h^2} \sim N'_{\mathrm{SO}(3)}, \tag{63}$$

که همان تناظر ـِ (1) است.

سرانجام، در مورد ـِ گروه ـِ $\mathrm{SU}(2)$ حجم ـِ فضا یِ فاز دو برابر می‌شود:

$$\mathcal{V}'_{\mathrm{SU}(2)} = 8\,\pi^2\,J^2, \tag{64}$$

و در محاسبه یِ تعداد ـِ حالت‌ها هم باید همه یِ اسپین‌ها را در نظر گرفت:

$$N'_{\mathrm{SU}(2)} = \sum_{2\,l=0}^{2\,j}[(2\,l)+1], \tag{65}$$

که $(2\,l)$ صحیح است. از این‌جا،

$$N'_{\mathrm{SU}(2)} = (j+1)\,(2\,j+1), \tag{66}$$

و باز با تناظرِ (49) و در حدِ j ها یِ بزرگ می‌رسیم به

$$\frac{\mathcal{V}'_{\mathrm{SU}(2)}}{h^2} \sim N'_{\mathrm{SU}(2)}, \tag{67}$$

که همان تناظرِ (1) است.

4 مرجع‌ها

[1] P. K. Pathria; "Statistical mechanics", (Pergamon Press, 1993) chapter 2

[2] Vladimir Igorevich Arnold; "Mathematical methods of classical mechanics", 2nd edition (Springer Verlag, 1989) chapter 8

[3] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; "Classical mechanics", 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 8

[4] Asim O. Barut & Ryszard Rączka; "Theory of group representations and applications", 2nd edition (World Scientific, 1986) chapter 2

[5] Wu-Ki Tung; "Group theory in physics", (World Scientific, 1985) chapter 3

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Planck

[b] Darboux

[c] Euler

[d] Poisson

[e] Levi-Civita

[f] Jacobi

[g] Haar

[h] Pauli