X1-041 (2006/11/17)

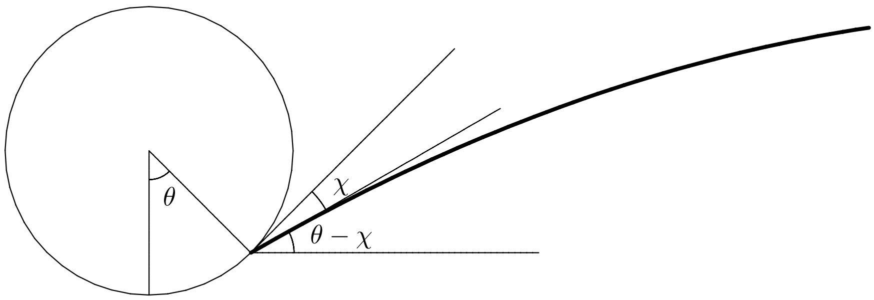
استوانه ای بلند شناور بر سطح ِ یک مایع

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

تعادل ِ یک استوانه یِ بلند بررسی می‌شود که رو یِ سطح ِ یک مایع شناور است.

0 مقدمه

یک استوانه یِ بلند را در نظر بگیرید که رو یِ سطح ِ یک مایع در حالت ِ تعادل است. به خاطر ِ این استوانه سطح ِ مایع افقی نمی‌ماند بل که به پایین (یا بالا) خم می‌شود. معادله یِ سطح ِ مایع از تعادل ِ نیروها یِ فشار (درون ِ مایع و بیرون ِ آن)، و کشش ِ سطحی به دست می‌آید. البته این معادله یک معادله یِ دیفرانسیل است که مشخصات ِ استوانه و برهم‌کنش ِ آن با مایع شرط ِ مرزی یِ آن را می‌دهد. تعادل ِ استوانه هم با نیرو یِ ناشی از فشار ِ جَو، نیرو یِ وارد بر استوانه از سو یِ مایع، و وزن ِ استوانه است. از طرف ِ مایع دو نیرو به این استوانه وارد می‌شود، یک ی نیرو یِ ناشی از فشار ِ مایع، و یک ی هم نیرو یِ ناشی از کشش ِ سطحی. (این‌ها در واقع نیروها یِ وارد بر استوانه و یک لایه یِ نازک ِ مایع ِ چسبیده به آن اند.) سرانجام، چسبنده‌گی یِ استوانه با مایع زاویه یِ سطح ِ آزاد ِ مایع با سطح ِ استوانه در محل ِ برخورد ِ این دوسطح با هم را تعیین می‌کند، که این هم در نیرو یِ وارد بر استوانه از مایع به خاطر ِ کشش ِ سطحی وارد می‌شود.



شکل ِ 1 هندسه ي مسئله. خم ِ کلفت مقطع ِ سطح ِ آزاد ِ مایع، و دایره مقطع ِ استوانه است.

چون استوانه بلند است، مسئله عملاً دوبُعدی است. بخش ی از استوانه با زاویه یِ (2θ)، تر می‌شود. زاویه يِ سطح ِ آزاد ِ مایع با استوانه در مرز ِ ناحیه يِ ترشده χ است، که از این رابطه به دست می آید.

$$\cos\chi = 1 - \frac{\gamma}{\tau}. \tag{1}$$

γ چسبنده‌گی يِ استوانه با مایع، و τ کشش ِ سطحی يِ مایع است. برا يِ به‌دست‌آوردن ِ این رابطه، کافی است نیروها يِ مماسی يِ وارد بر واحد ِ طول ِ بخش ِ باریک ی از سطح ِ مایع را که شامل ِ مرز ِ ترشده‌گی يِ استوانه است بنویسیم. خواهیم داشت

$$\tau = \tau\,\cos\chi + \gamma, \tag{2}$$

که به (1) می‌رسد. این تنهاجا یی است که چسبنده‌گی وارد می‌شود، و البته خواهیم دید همین پارامتر ِ χ اثر ِ مهم ی در تعادل ِ استوانه دارد.

1 معادله يِ سطح ِ مایع

محور ِ x را افقی و عمود بر محور ِ استوانه، و محور ِ y را عمودی می‌گیریم، چنان که شتاب ِ گرانش

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{y}}, \tag{3}$$

که g ثابت ی مثبت است. سطح ِ مایع با رابطه یِ y بر حسب ِ x مشخص می‌شود. یک بردار ِ مماس بر این سطح هست که بر محور ِ استوانه عمود است. $\hat{\mathbf{t}}$ را همین بردار می‌گیریم که یکه شده و مئلفه یِ آن در جهت ِ x مثبت است. بردار ِ یکه یِ عمود بر سطح ِ مایع و با مئلفه یِ مثبت در جهت ِ y را هم با $\hat{\mathbf{n}}$ نمایش می‌دهیم. بخش ِ کوچک ی از سطح ِ مایع بین ِ x و $x + \mathrm{d}x$ را در نظر می‌گیریم. نیروها یی که به این بخش وارد می‌شوند نیروها یِ ناشی از فشار ِ درون و بیرون ِ مایع، و نیروها یِ ناشی از کشش ِ سطحی اند. معادله یِ تعادل می‌شود

$$\tau\,\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}} + (P - P_0)\,\mathrm{d}s\,\hat{\mathbf{n}} = 0, \tag{4}$$

که P_0 فشار ِ جَو و P فشار ِ درون ِ مایع درست زیر ِ سطح ِ مایع است. $\mathrm{d}s$ طول ِ خم ِ $y(x)$ در این بخش از سطح ِ مایع است:

$$\mathrm{d}s^2 := \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2. \tag{5}$$

داریم

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}\phi, \tag{6}$$

که ϕ زاویه یِ خم ِ $y(x)$ با محور ِ x است. از این‌جا،

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = P_0 - P. \tag{7}$$

داریم

$$P = P_0 - \rho\,g\,y, \tag{8}$$

که ρ چگالی یِ مایع است و مبدئ ِ y را چنان گرفته ایم که دور از استوانه (که سطح ِ مایع افقی می‌شود) سطح ِ مایع در $y = 0$ باشد. به این ترتیب،

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \rho\,g\,y. \tag{9}$$

با استفاده از

$$\mathrm{d}y = \sin\phi\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

رابطه یِ (9) می‌شود

$$\tau\,\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=\rho\,g\,y\,\mathrm{d}y, \tag{11}$$

که می‌شود از آن انتگرال گرفت و رسید به

$$\tau\,(1-\cos\phi)=\frac{1}{2}\,\rho\,g\,y^2. \tag{12}$$

باز هم از این استفاده شده که $y=0$ متناظر با $\phi=0$ است. برا یِ به‌دست آوردن ِ خود ِ y، باید از (13) جذر بگیریم. برا یِ این کار توجه می‌کنیم که اگر $0<\phi<\pi$، آن‌گاه مقدار ِ y کم‌تر از مقدار ِ y در x ها یِ بزرگ ِ مثبت است. پس y منفی است. اگر $-\pi<\phi<0$، آن‌گاه مقدار ِ y بیش‌تر از مقدار ِ y در x ها یِ بزرگ ِ مثبت است. پس y مثبت است. (البته این برا یِ آن بخش از سطح ِ مایع درست است که x ها یِ بزرگ ِ مثبت را در بر دارد. برا یِ بخش ِ دیگر که شامل ِ x ها یِ بزرگ ِ منفی است، نتایج برعکس است. در ادامه یِ کار، همه یِ نتایج را برا یِ بخش ِ شامل ِ x ها یِ بزرگ ِ مثبت به دست می آوریم.)

به این ترتیب، جذر ِ معادله یِ (12) می‌شود

$$y=-2\,\sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g}}\,\sin\frac{\phi}{2}. \tag{13}$$

2 تعادل ِ استوانه

شعاع ِ استوانه را با R نشان می‌دهیم. هر نقطه یِ ترشده یِ استوانه را با پارامتر ِ ψ مشخص می‌کنیم، که ψ زاویه یِ صفحه یِ واصل ِ این نقطه به محور ِ استوانه، با صفحه یِ عمودی است. داریم

$$-\,\theta\le\psi\le\theta. \tag{14}$$

در مرز ِ ترشده‌گی، زاویه یِ سطح ِ آزاد ِ مایع با افق $(\theta-\chi)$ است. از این‌جا

$$\tilde{y}(\theta)=-2\,\sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g}}\,\sin\frac{\theta-\chi}{2}, \tag{15}$$

که $\tilde{y}(\psi)$ ارتفاع ِ نقطه ای از بخش ِ ترشده یِ استوانه متناظر با پارامتر ِ ψ است. داریم

$$\tilde{y}(\psi)=\tilde{y}(\theta)+R\,(\cos\theta-\cos\psi). \tag{16}$$

$\mathbf{f}_0$ (نیرو یِ وارد بر واحد ِ طول ِ استوانه ناشی از فشار ِ جَو) می‌شود

$$\mathbf{f}_0=\hat{\mathbf{y}}\,(-2\,P_0\,R\,\sin\theta). \tag{17}$$

$\mathbf{f}_P$ (نیرو یِ وارد بر واحد ِ طول ِ استوانه ناشی از فشار ِ مایع) می‌شود

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_P&=\hat{\mathbf{y}}\int_{-\theta}^{\theta}R\,\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\;P(\psi),\\&=2\,\hat{\mathbf{y}}\int_0^{\theta}R\,\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\;\{P_0-\rho\,g\,[\tilde{y}(\theta)+R\,(\cos\theta-\cos\psi)]\}.\end{aligned} \tag{18}$$

$\mathbf{f}_\tau$ (نیرو یِ وارد بر واحد ِ طول ِ استوانه ناشی از کشش ِ سطحی یِ مایع) می‌شود

$$\mathbf{f}_\tau=\hat{\mathbf{y}}\,[2\,\tau\sin(\theta-\chi)]. \tag{19}$$

سرانجام، $\mathbf{w}$ (وزن ِ واحد ِ طول ِ استوانه) می‌شود

$$\mathbf{w}=\hat{\mathbf{y}}\,(-\pi\,R^2\,\rho_{\mathrm{s}}\,g), \tag{20}$$

که ρ_{s} چگالی یِ استوانه است.

شرط ِ تعادل صفربودن ِ مجوع ِ این چهارنیرو است. این شرط می‌شود

$$\begin{aligned}0=&(-2\,P_0\,R\,\sin\theta)+[2\,P_0\,R\,\sin\theta-(2\,\rho\,g\,R\,\sin\theta)\,\tilde{y}(\theta)+\rho\,g\,R^2\,(\theta-\sin\theta\,\cos\theta)]\\&+[2\,\tau\,\sin(\theta-\chi)]+[-\pi\,R^2\,\rho_{\mathrm{s}}\,g].\end{aligned} \tag{21}$$

بر حسب ِ پارامترها یِ بی‌بُعد ِ

$$a:=\sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g\,R^2}}, \tag{22}$$

$$X:=\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho}, \tag{23}$$

و با استفاده از رابطه یِ (15)، معادله یِ (21) می‌شود

$$h(a,\theta,\chi) = \pi\, X, \tag{24}$$

که

$$h(a,\theta,\chi) := 2\,a^2\,\sin(\theta-\chi) + 4\,a\,\sin\theta\,\sin\frac{\theta-\chi}{2} + \theta - \frac{1}{2}\,\sin 2\,\theta. \tag{25}$$

گستره ي پارامترها عبارت است از

$$\begin{aligned} \chi &\in [0,\pi],\\ \theta &\in [0,\pi],\\ a &\in (0,\infty),\\ X &\in (0,\infty). \end{aligned} \tag{26}$$

3 پای‌داری يِ تعادل ِ استوانه

رابطه يِ (24) مقدار ِ θ را بر حسب ِ پارامترها يِ χ، X، و a می‌دهد. ممکن است به ازا يِ بعض ی از مقدارها يِ این سه‌پارامتر، برا يِ θ جواب وجود نداشته باشد، یا بیش از یک جواب وجود داشته باشد. در حالت ی که برا يِ θ (که باید بین ِ صفر و π باشد) جواب نداریم، استوانه نمی‌تواند بر سطح ِ مایع شناور بماند. اگر بیش از یک جواب داشته باشیم، باید معلوم شود کدام جواب اضافی است. برا يِ تعیین ِ جواب ِ درست، پای‌داری يِ تعادل را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید یک نیرو يِ عمودی يِ اضافی رو به پایین به استوانه وارد شود. وجود ِ این نیرو يِ اضافی مثل ِ افزایش ِ $\rho_{\rm s}$ است. در این حالت استوانه پایین‌تر می‌رود. اگر نقطه يِ تعادل به ازا يِ $\rho_{\rm s}$ ِ جدید زیر ِ نقطه يِ قبلی باشد، تعادل ِ جدید ی برقرار می‌شود. اما اگر نقطه يِ تعادل ِ جدید بالا يِ نقطه يِ قبلی باشد، استوانه مرتباً پایین‌تر می‌رود و از تعادل دورتر و دورتر می‌شود. پس در این حالت تعادل ناپای‌دار است. با بحث ِ مشابه ی نشان داده می‌شود اگر با کاهش ِ $\rho_{\rm s}$ نقطه يِ تعادل پایین برود، تعادل ناپای‌دار

است. پس شرط ِ پای‌داری یِ تعادل آن است که ارتفاع ِ مرکز ِ استوانه در حالت ِ تعادل، نسبت به $\rho_{\rm s}$ (یا X) نزولی باشد، یعنی استوانه هر چه چگال‌تر باشد پایین‌تر برود.

مختصه یِ y متناظر با مرکز ِ استوانه را با $y_{\rm c}$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$Y := \frac{y_{\rm c}}{R}. \tag{27}$$

از (15) نتیجه می‌شود

$$Y = -2\,a\,\sin\frac{\theta-\chi}{2} + \cos\theta, \tag{28}$$

شرط ِ پای‌داری یِ تعادل آن است که

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_{a,\chi} \le 0, \tag{29}$$

که در آن θ از (24) بر حسب ِ X، a، و χ به دست می‌آید. از (28) نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)_{a,\chi} = -a\,\cos\frac{\theta-\chi}{2} - \sin\theta. \tag{30}$$

دیده می‌شود در گستره یِ مقدارها یِ χ، θ، و a،

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)_{a,\chi} \le 0. \tag{31}$$

از ترکیب ِ این رابطه با (29) نتیجه می‌شود شرط ِ پای‌داری یِ تعادل این است که

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)_{a,\chi} \ge 0, \tag{32}$$

یا

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) \ge 0, \tag{33}$$

که،

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) &:= \left[\frac{\partial h(a,\theta,\chi)}{\partial \theta}\right]_{a,\chi},\\ &= 2\,a^2\,\cos(\theta-\chi) + 2\,a\,\left(2\,\cos\theta\,\sin\frac{\theta-\chi}{2} + \sin\theta\,\cos\frac{\theta-\chi}{2}\right)\\ &\quad +1 - \cos 2\,\theta.\end{aligned} \tag{34}$$

یعنی شرط ِ پای‌داری این است که با افزایش ِ چگالی یِ استوانه بخش ِ ترشده یِ آن بزرگ‌تر شود.

به ازا یِ χ و a ِ معین، سه نقطه یِ $\theta_0(a,\chi)$، $\theta_1(a,\chi)$، و $\theta_2(a,\chi)$ هست که

$$0 \le \theta_0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi, \tag{35}$$

چنان که

$$h(a,\theta,\chi) < 0, \qquad 0 \le \theta < \theta_1, \tag{36}$$

$$h(a,\theta,\chi) > 0, \qquad \theta_1 < \theta < \pi, \tag{37}$$

و،

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) < 0, \qquad 0 \le \theta < \theta_0, \tag{38}$$

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) > 0, \qquad \theta_0 < \theta < \theta_2, \tag{39}$$

$$(\mathrm{D}_2 h)(a,\theta,\chi) < 0, \qquad \theta_2 < \theta \le \pi. \tag{40}$$

به این ترتیب، شرط‌ها یِ (24) و (33) مقدار ِ θ را به ناحیه یِ $(\theta_1, \theta_2]$ محدود می‌کنند. البته ممکن است θ_2 برابر با π شود. θ_1 صفر است، اگر و تنها اگر $\chi = 0$. ضمناً به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\theta_1 \le \chi \le \theta_2. \tag{41}$$

θ_1 با χ برابر است اگر و تنها اگر $\chi = 0$، و θ_2 با χ برابر است اگر و تنها اگر $\chi = \pi$.

4 وجود ِ جواب

معادله یِ (24) و شرط ِ (33) مقدار ِ θ را بر حسب ِ X و χ و a می‌دهند. اما لزوماً به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ این سه‌پارامتر جواب ی برا یِ θ وجود ندارد. شرط ِ لازم و کافی برا یِ وجود ِ جواب برا یِ θ این است که

$$\max\{h(a,\theta,\chi) \mid \theta\} \ge \pi\, X, \tag{42}$$

یا

$$q(a,\chi) \geq \pi\, X, \tag{43}$$

که

$$q(a,\chi) := h[a, \theta_2(a,\chi), \chi]. \tag{44}$$

داریم

$$\left[\theta_2(a,\chi) = \pi \ \Rightarrow\ \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial a}\right)_\chi = 0\right] \quad \vee \quad (D_2 h)(a,\theta_2,\chi) = 0. \tag{45}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)_\chi &= (\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi) + (D_2 h)(a,\theta_2,\chi)\,\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial a}\right)_\chi,\\ &= (\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi).\end{aligned} \tag{46}$$

هم‌چنین،

$$(\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi) = 4\,a\sin(\theta_2-\chi) + 4\,\sin\theta\,\sin\frac{\theta_2-\chi}{2}, \tag{47}$$

و با توجه به (41)،

$$(\mathrm{D}_1 h)(a,\theta_2,\chi) \geq 0. \tag{48}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right)_\chi \geq 0. \tag{49}$$

داریم

$$\{q(a,\chi) \mid a\} = (\pi,\infty). \tag{50}$$

از ترکیب ِ این با (43) و (44) نتیجه می‌شود به ازا ی

$$a \leq \bar{a}(X,\chi), \tag{51}$$

برا ی θ جواب وجود ندارد، که

$$\begin{cases} q[\bar{a}(X,\chi),\chi] = \pi\, X, & X > 1 \\ \bar{a}(X,\chi) = 0, & X \le 1 \end{cases}. \tag{52}$$

به این ترتیب، استوانه ای که چگال یَش از چگالی یِ مایع بیش‌تر نباشد، حتماً رو یِ مایع شناور می‌ماند. اما استوانه ای که چگالی یَش از چگالی یِ مایع بیش‌تر باشد فقط وقت ی رو یِ مایع شناور می‌ماند که شعاع َش از حد ِ معین ی بیش‌تر نشود.

رفتار ِ θ_2 و $\bar{a}$ بر حسب ِ X و χ را بررسی کنیم. روشن است که کافی است حالت ِ $X > 1$ را بررسی کنیم. داریم

$$\theta_2 = \pi, \tag{53}$$

اگر

$$h(\bar{a},\pi,\chi) = \pi\, X, \tag{54}$$

$$\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\pi,\chi) \ge 0. \tag{55}$$

از (54) نتیجه می‌شود

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\pi\,(X-1)}{2\,\sin\chi}}, \tag{56}$$

که جاگذاری یِ آن در (55) نتیجه می‌دهد

$$\chi \ge \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad X \ge 1 + \frac{4\,(1+\cos\chi)\,\sin\chi}{\pi\,\cos^2\chi}. \tag{57}$$

اگر (57) برقرار نباشد، θ_2 و $\bar{a}$ رابطه‌ها یِ

$$h(\bar{a},\theta_2,\chi) = \pi\, X, \tag{58}$$

$$\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\theta_2,\chi) = 0 \tag{59}$$

را بر می‌آورند. می‌شود (59) را یک رابطه یِ پارامتری برا یِ $\bar{a}$ (بر حسب ِ θ_2) گرفت، که از جاگذاری یِ آن در (58) مقدار ِ X بر حسب ِ θ_2 به دست می‌آید. معادله یِ (59) را می‌شود نوشت

$$A\,\bar{a}^2 + 2\,B\,\bar{a} + C = 0, \tag{60}$$

که

$$A := 2\,\cos(\theta_2-\chi),$$

$$B := 2\,\cos\theta_2\,\sin\frac{\theta_2-\chi}{2}+\sin\theta_2\,\cos\frac{\theta_2-\chi}{2},$$

$$C := 1-\cos 2\,\theta_2. \tag{61}$$

معادله ی (59) ممکن است برا یِ $\bar{a}$ صفر، یک، یا دو جواب (ِ مثبت) داشته باشد. مشتق ِ هر یک از این جواب‌ها نسبت به θ_2 هم از این رابطه به دست می‌آید.

$$\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial\theta_2}\right)_\chi=-\frac{\mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\theta_2,\chi)}{\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\theta_2,\chi)}. \tag{62}$$

صورت ِ این کسر منفی است (چون θ_2 مقدار ِ h را بیشینه می‌کند). پس علامت ِ مشتق ِ $\bar{a}$ نسبت به θ_2 همان علامت ِ $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\theta_2,\chi)$ است، که

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 h(\bar{a},\theta_2,\chi)&=2\,A\,\bar{a}+2\,B,\\&=\pm 2\,\sqrt{B^2-A\,C}.\end{aligned} \tag{63}$$

علامت ِ $\pm$ متناظر است با ریشه‌ها یِ $\bar{a}_\pm$، که

$$\bar{a}_\pm := \frac{-B\pm\sqrt{B^2-A\,C}}{A}. \tag{64}$$

اگر A منفی باشد، (60) یک و فقط یک جواب برا یِ $\bar{a}$ دارد. این جواب $\bar{a}_-$ است، که نسبت به θ_2 نزولی است و

$$\lim_{\theta_2\to\pi^-}\bar{a}_-=0^+. \tag{65}$$

اگر A مثبت باشد، برا یِ $\bar{a}$ یا دو جواب هست یا صفر جواب. در این حالت شرط ِ وجود ِ جواب (ِ مثبت) برا یِ $\bar{a}$ این است که مبین ِ (60) مثبت و B منفی باشد. جا یی که مبین مثبت باشد، B تغییرِعلامت نمی‌دهد. مبین به ازا یِ $A=0$ مثبت است. پس به ازا یِ بعض ی مقدارها یِ مثبت ِ A هم برا یِ $\bar{a}$ جواب داریم، اگر و تنها اگر جا یی که A تغییرِعلامت می‌دهد B منفی باشد. داریم

$$A=0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2=\chi+\frac{\pi}{2}. \tag{66}$$

(در این‌جا از این استفاده شده که $\chi<\theta_2$.) پس

$$A=0 \quad \Leftrightarrow \quad B=\frac{-2\,\sin\chi+\cos\chi}{\sqrt{2}}. \tag{67}$$

پس برا یِ $\bar{a}$ جواب‌ها یِ متناظر با A یِ مثبت هم هست، اگر

$$\tan\chi>\frac{1}{2}. \tag{68}$$

در این حالت یک مقدار ِ $\tilde{\theta}(\chi)$ هست که

$$B^2-A\,C=0, \qquad \theta_2=\tilde{\theta}(\chi). \tag{69}$$

پس اگر

$$\tilde{\theta}(\chi)<\theta_2<\chi+\frac{\pi}{2}, \tag{70}$$

آن‌گاه برا یِ $\bar{a}$ دو جواب (ِ مثبت) هست. بین ِ این‌ها $\bar{a}_-$ نسبت به θ_2 نزولی و $\bar{a}_+$ نسبت به θ_2 صعودی است. البته از (41) دیده می‌شود

$$\tilde{\theta}(\chi)>\chi. \tag{71}$$

خلاصه، گستره یِ مقدارها یِ (X,χ) را به شش ناحیه تقسیم می‌کنیم:

$X<u(\chi)$	**I**
$u(\chi)<X<1$	**II**
$X>1 \quad \wedge \quad \chi<\tan^{-1}\frac{1}{2}$	**III**
$X>1 \quad \wedge \quad \tan^{-1}\frac{1}{2}<\chi<\frac{\pi}{2}$	**IV**
$\chi>\frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad 1<X<v(\chi)$	**V**
$\chi>\frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad v(\chi)<X$	**VI**

در این رابطه‌ها،

$$u(\chi) := \frac{1}{\pi}\left(\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi\right), \qquad (72)$$

$$v(\chi) := 1 + \frac{4\,(1+\cos\chi)\,\sin\chi}{\pi\,\cos^2\chi}. \qquad (73)$$

ناحیه‌ها یِ I تا VI: به طور ِ کلی داریم

$$\lim_{a\to\infty}\theta = \chi. \qquad (74)$$

این یعنی برا یِ استوانه‌ها یِ بسیار کوچک، سطح ِ مایع عملاً افقی می‌ماند.
ناحیه‌ها یِ I و II: در این حالت به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ a برا یِ θ جواب هست، و داریم

$$\lim_{a\to 0^+}\theta = u^{-1}(X). \qquad (75)$$

این یعنی برا یِ استوانه‌ها یِ بسیار بزرگ، نیرو یِ ارشمیدس است که وزن ِ استوانه را خنثا می‌کند.
ناحیه یِ I: در این حالت داریم

$$\theta < \chi, \qquad (76)$$

که یعنی در این حالت سطح ِ مایع در نزدیکی یِ استوانه بالا یِ سطح ِ مایع در جاها یِ دور از استوانه است.
ناحیه‌ها یِ II تا VI: در این حالت

$$\theta > \chi, \qquad (77)$$

که یعنی در این حالت سطح ِ مایع در نزدیکی یِ استوانه زیر ِ سطح ِ مایع در جاها یِ دور از استوانه است.
ناحیه‌ها یِ III تا VI: در این حالت شرط ِ وجود ِ جواب برا یِ θ این است که a از $\bar{a}$ کم‌تر نباشد. در χ یِ ثابت، $\bar{a}$ تابع ی صعودی از X است و داریم

$$\lim_{X\to 1^+}\bar{a} = 0, \qquad (78)$$

و

$$\lim_{X\to\infty} \bar{a} = \infty. \tag{79}$$

هم‌چنین،

$$\lim_{X\to 1^+} \theta_2 = \pi. \tag{80}$$

ناحیه‌ها ی ِ III تا V: در این حالت

$$\theta_2 < \pi. \tag{81}$$

ناحیه‌ها ی ِ III و IV: در این حالت

$$\lim_{X\to\infty} \theta_2 = \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{82}$$

ناحیه ی ِ III: در این حالت θ_2 تابع ی نزولی از X است و داریم

$$\theta_2 > \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{83}$$

ناحیه‌ها ی ِ IV و V: در این حالت یک مقدار ِ $X_2(\chi)$ هست که

$$\theta_2[X_2(\chi), \chi] := \tilde{\theta}(\chi). \tag{84}$$

در χ ی ِ ثابت، θ_2 به ازا ی ِ $1 < X < X_2$ نزولی و به ازا ی ِ $X_2 < X$ صعودی است.
ناحیه ی ِ IV: در این حالت یک مقدار ِ $X_1(\chi)$ هست که

$$\theta_2[X_1(\chi), \chi] = \chi + \frac{\pi}{2}. \tag{85}$$

روشن است که

$$1 < X_1 < X_2. \tag{86}$$

ناحیه ی ِ V: در این حالت

$$\lim_{X\to v(\chi)} \theta_2 = \pi. \tag{87}$$

ناحیه ی ِ VI: در این حالت θ_2 مقدار ِ ثابت ِ π است و $\bar{a}$ هم از (56) به دست می‌آید.

5 رفتار ِ جواب بر حسب ِ پارامترها

θ جواب ِ معادله ي (24) با شرط ِ (33) است. برا ي بررسی ي رفتار ِ θ بر حسب ِ X، a، و χ، به علامت ِ مشتق‌ها ي پاره‌ای ي h نیاز داریم:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{a,\chi} = \frac{\pi}{\mathrm{D}_2 h(a,\theta,\chi)}, \tag{88}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)_{X,\chi} = -\frac{\mathrm{D}_1 h(a,\theta,\chi)}{\mathrm{D}_2 h(a,\theta,\chi)}, \tag{89}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial \chi}\right)_{X,a} = -\frac{\mathrm{D}_3 h(a,\theta,\chi)}{\mathrm{D}_2 h(a,\theta,\chi)}. \tag{90}$$

شرط ِ (33) نتیجه می‌دهد

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)_{a,\chi} > 0. \tag{91}$$

پس با افزایش ِ چگالی ي استوانه، زاویه ي بخش ِ ترشده بیش‌تر می‌شود.

از (25) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{D}_1 h(a,\theta,\chi) = 4\,a\,\sin(\theta-\chi) + 4\,\sin\theta\,\sin\frac{\theta-\chi}{2}, \tag{92}$$

$$\mathrm{D}_3 h(a,\theta,\chi) = -2\,a^2\,\cos(\theta-\chi) - 2\,a\,\sin\theta\,\cos\frac{\theta-\chi}{2}. \tag{93}$$

رابطه ي (92) نشان می‌دهد علامت ِ $\mathrm{D}_1 h$ همان علامت ِ $(\theta-\chi)$ است. از ترکیب ِ این با (89) و (33) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)_{X,\chi} &< 0, \qquad \theta > \chi,\\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)_{X,\chi} &> 0, \qquad \theta < \chi.\end{aligned} \tag{94}$$

این یعنی در ناحیه ي **I** (که استوانه مایع را بالا می‌کشد) با بزرگ‌شدن ِ استوانه زاویه ي بخش ِ ترشده کم می‌شود، در حال ی که در ناحیه‌ها ي دیگر (که استوانه مایع را به پایین هل می‌دهد) با بزرگ‌شدن ِ استوانه زاویه ي بخش ِ ترشده زیاد می‌شود.

سرانجام، نشان می‌دهیم

$$\mathrm{D}_3 h(a,\theta,\chi) < 0. \qquad (95)$$

برا یِ این کار توجه می‌کنیم که در X ِ ثابت، به ازا یِ a ها یِ بزرگ θ به χ می‌گراید و در نتیجه در این حالت (95) برقرار است. $\mathrm{D}_3 h$، اگر بخواهد تغییرِعلامت بدهد باید جا یی صفر شود. نشان می‌دهیم در این حالت شرط ِ (33) نقض می‌شود. فرض کنید

$$\mathrm{D}_3 h = 0. \qquad (96)$$

از این،

$$a = -\frac{\sin\theta}{\cos(\theta-\chi)}\,\cos\frac{\theta-\chi}{2}. \qquad (97)$$

این را در (34) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_2 h &= \frac{-2\,\sin\theta\,\cos\theta}{\cos(\theta-\chi)}\,\sin(\theta-\chi)+1-\cos 2\,\theta,\\ &= \frac{2\sin\theta\,\sin\chi}{\cos(\theta-\chi)}. \qquad (98)\end{aligned}$$

از (96) ضمناً نتیجه می‌شود

$$\cos(\theta-\chi) < 0, \qquad (99)$$

که از ترکیب ِ آن با (98) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{D}_2 h < 0. \qquad (100)$$

پس (96) شرط ِ (33) را نقض می‌کند. بنابراین در ناحیه یِ تعادل ِ پای‌دار $\mathrm{D}_3 h$ تغییرِعلامت نمی‌دهد و (95) هم‌واره برقرار است. از ترکیب ِ (33)، (90)، و (95) نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\chi}\right)_{X,a} > 0. \qquad (101)$$

یعنی با افزایش ِ چسبنده‌گی یِ استوانه با مایع، زاویه یِ بخش ِ ترشده بیش‌تر می‌شود.