X1-042 (2007/01/29)

تحول ِ متغیرها یِ تصادفی یِ پی‌وسته

امیر آقامحمدی a_aghamohammadi@yahoo.com
محمد خرمی mamwad@mailaps.org

تحول ِ موضعی یِ متغیرها یِ تصادفی یِ پی‌وسته بررسی می‌شود و شکل ِ کلی یِ معادله یِ تحول ِ چنین‌متغیرها یی به دست می‌آید.

1 حالت ِ متغیرها یِ تصادفی یِ پی‌وسته

حالت ِ یک متغیر ِ تصادفی یِ پی‌وسته با بردار ِ Ψ (بردار ِ احتمال ِ سیستم) مشخص می‌شود. این بردار از $\Psi(\mathbf{x})$ ها ساخته می‌شود، که $\Psi(\mathbf{x})$ چگالی یِ احتمال ِ آن است که سیستم در حالت ِ $\mathbf{x}$ باشد:

$$\Psi = \int \mathrm{d}^n x\ \Psi(\mathbf{x})\, e(\mathbf{x}), \tag{1}$$

که $\{e(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\}$ پایه یِ فیزیکی یِ فضا یِ حالت ِ سیستم است. با استفاده از پایه یِ دوگان ِ $\{e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x}\}$،

$$[e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x})]\,[e(\mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{2}$$

داریم

$$\Psi(\mathbf{x}) = [e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x})]\,\Psi. \tag{3}$$

داریم

$$\forall \mathbf{x}\ :\ \Psi(\mathbf{x}) \geq 0, \tag{4}$$

و

$$\int \mathrm{d}^n x\ \Psi(\mathbf{x}) = 1. \tag{5}$$

رابطه یِ اخیر را می‌شود چنین نوشت

$$S\,\Psi = 1, \tag{6}$$

که

$$S := \int \mathrm{d}^n x\ e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

این رابطه‌ها کاملاً شبیه چیزها یی اند که در [1] به دست آمده اند. تنهاتفاوت این است که این‌جا شاخص ِ حالت‌ها پی‌وسته است.

2 تحول ِ متغیرها یِ تصادفی یِ پی‌وسته

تحول ِ متغیرها یِ تصادفی یِ مارکُفی برا یِ زمان ِ پی‌وسته با

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) = H(t)\,\Psi(t) \tag{8}$$

داده می‌شود، که H همیلتنی یِ تحول است. این تحول باید این ویژه‌گی را داشته باشد که در اثر ِ آن شرط‌ها یِ (4) و (6) عوض نشود. با نوشتن ِ (8) به شکل ِ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\mathbf{x}) = \int \mathrm{d}^n\mathbf{y}\ H(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,\Psi(t,\mathbf{y}), \tag{9}$$

که

$$H(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) := e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x})\,H(t)\,e(\mathbf{y}), \tag{10}$$

معلوم می‌شود شرط ِ لازم و کافی برا یِ برقرارماندن ِ شرط‌ها یِ (4) و (6) این است که

$$[\forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{x}\neq\mathbf{y}]\ :\ H(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\geq 0, \tag{11}$$

و

$$\int \mathrm{d}^n x\; H(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{12}$$

رابطه یِ اخیر را می‌شود نوشت

$$S\, H(t) = 0. \tag{13}$$

اما در بسیار ی از موارد $H(t)$ یک توزیع است و با $H(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$ نمی‌شود مثل ِ عددها یِ معمولی رفتار کرد. در این حالت به‌تر است شرط ِ (4) را مستقیماً بررسی کرد.

می‌گوییم تحول ِ حالت ِ سیستم موضعی است، اگر همیلتنی یک عمل‌گر ِ دیفرانسیل (نسبت به $\mathbf{x}$) باشد. در این حالت معادله یِ تحول می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\mathbf{x}) = \left[\sum_{a=0}^{b}(-1)^a\, g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t,\mathbf{x})\,\partial_{l_1}\cdots\partial_{l_a}\right]\,\Psi(t,\mathbf{x}). \tag{14}$$

این معادله باید چنان باشد که در هر نقطه ای چگالی یِ احتمال صفر شود، مشتق ِ چگالی یِ احتمال نامنفی باشد. Ψ را چنان می‌گیریم که در نقطه یِ $\mathbf{x}$ تابع ِ چگالی یِ احتمال صفر شود و در هم‌سایه‌گی یِ این نقطه چگالی هم‌وار باشد. در این صورت در این نقطه مشتق ِ اول چگالی صفر است. فرض کنید در این نقطه همه یِ مشتق‌ها یِ با رتبه‌یِ‌بیش‌ازدو یِ چگالی صفر اند، جز احتمالاً یک ی $(\partial_{l_1}\cdots\partial_{l_a}\Psi=\lambda)$، و ماتریس ِ مشتق ِ دوم ِ چگالی در این نقطه مثبت ِ معین است. از این‌جا معلوم می‌شود مستقل از مقدار ِ λ، یک هم‌سایه‌گی از $\mathbf{x}$ هست که در آن Ψ نامنفی است. بیرون ِ این هم‌سایه‌گی هم Ψ را می‌شود مثبت کرد، بی آن که مقدار ِ Ψ و مشتق‌ها یَش در این هم‌سایه‌گی تغییر کند. به این ترتیب طرف ِ راست ِ (14) باید مثبت باشد، یعنی

$$\forall\lambda\ :\ g_{(2)}^{l\,m}(t,\mathbf{x})\,\partial_l\,\partial_m\psi(\mathbf{x}) + \lambda\, g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t,\mathbf{x})\geq 0. \tag{15}$$

این نتیجه می‌دهد ضریب ِ λ باید صفر باشد. به این ترتیب معلوم می‌شود ضریب‌ها یِ همه یِ مشتق‌ها یِ با رتبه یِ بیش از دو در طرف ِ راست ِ (14) باید صفر باشد. ضمناً با ازا یِ ماتریس ِ مثبت ِ شبهِ‌معین ِ M باید داشته باشیم

$$M_{l\,m}\, g_{(2)}^{l\,m}(t,\mathbf{x}) \geq 0. \tag{16}$$

این نتیجه می‌دهد $g_{(2)}^{l\,m}(t,\mathbf{x})$ باید یک ماتریس ِ مثبت ِ شبهَ‌معین باشد.

به این ترتیب، معادله ی ِ تحول می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\mathbf{x}) = [g_{(0)}(t,\mathbf{x}) - g_{(1)}^{j}(t,\mathbf{x})\,\partial_j + g_{(2)}^{j\,k}(t,\mathbf{x})\,\partial_j\,\partial_k]\,\Psi(t,\mathbf{x}). \tag{17}$$

این نتیجه را می‌شود به شکل ِ بسته بر حسب ِ همیلتنی و تکانه‌ها نوشت:

$$H(t) = g_{(0)}(t) + g_{(1)}^{j}(t)\,P_j + g_{(2)}^{j\,k}(t)\,P_j\,P_k, \tag{18}$$

که $g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t)$ ها عمل‌گرها یی اند که در پایه ی ِ فیزیکی قطری اند:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x})\, g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t) &= g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t,\mathbf{x})\, e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x}),\\ g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t)\, e(\mathbf{x}) &= e(\mathbf{x})\, g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}(t,\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{19}$$

و تکانه‌ها (P_j ها) این رابطه‌ها را بر می آورند.

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x})\, P_j &= -\partial_j e^{\mathrm{d}}(\mathbf{x}),\\ P_j\, e(\mathbf{x}) &= \partial_j e(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{20}$$

این‌ها از جمله نتیجه می‌دهند

$$S\,P_j = 0. \tag{21}$$

همیلتنی یی به شکل ِ (17) هنوز هم لزوماً شرط ِ (6) یا (13) را بر نمی آوَرَد. برا ی ِ بررسی ی ِ این شرط، یک راه این است که جا ی ِ تابع‌ها ی ِ $g_{(a)}^{l_1\cdots l_a}$ و مشتق‌گیری‌ها را عوض کنیم. به این ترتیب می‌شود همیلتنی را نوشت

$$H(t) = f_{(0)}(t) + P_j\, f_{(1)}^{j}(t) + P_j\, P_k\, f_{(2)}^{j\,k}(t). \tag{22}$$

که $f_{(a)}^{l_1\cdots l_a}$ ها در پایه ی ِ فیزیکی قطری اند. رابطه‌ها ی ِ (13) و (21) نتیجه می‌دهند

$$S\,f_{(0)}(t) = 0, \tag{23}$$

که نتیجه می‌دهد

$$f_{(0)} = 0. \tag{24}$$

به این ترتیب،

$$H(t) = P_j\, f^{j}_{(1)}(t) + P_j\, P_k\, f^{j\,k}_{(2)}(t). \tag{25}$$

از مقایسه یِ این رابطه با (18) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} g_{(0)}(t,\mathbf{x}) &= -\partial_j f^{j}_{(1)}(t,\mathbf{x}) + \partial_j \partial_k f^{j\,k}_{(2)}(t,\mathbf{x}),\\ g^{j}_{(1)}(t,\mathbf{x}) &= f^{j}_{(1)}(t,\mathbf{x}) - 2\,\partial_k f^{j\,k}_{(2)}(t,\mathbf{x}),\\ g^{j\,k}_{(2)}(t,\mathbf{x}) &= f^{j\,k}_{(2)}(t,\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{26}$$

به این ترتیب، تحول با فقط دو دسته تابع ـِ $f^{j}_{(1)}$ و $f^{j\,k}_{(2)}$ مشخص می‌شود، که بر دست یِ اول محدودیت ی نیست و تابع‌ها یِ دسته یِ دوم یک ماتریس ـِ مثبت ـِ شبهِ‌معین می‌سازند.

موضعی‌بودن ـِ تحول برا یِ این که به نتیجه یِ بالا برسیم مهم است. مثلاً این همیلتنی را در نظر بگیرید.

$$H = \alpha\,(\Psi_0\, S - 1), \tag{27}$$

که در آن Ψ_0 یک بردار ـِ احتمال است، یعنی شرط‌ها یِ (4) و (6) را بر می‌آورد، و α یک ثابت ـِ مثبت است. عنصرها یِ ماتریسی یِ این همیلتنی می‌شوند

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha\,[\Psi_0(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x},\mathbf{y})]. \tag{28}$$

دیده می‌شود این همیلتنی شرط‌ها یِ (11) و (12) را دارد، اما عنصرهایِ‌ماتریسی یِ آن حول ـِ $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ جای‌گزیده نیستند، و تحول ـِ حالت ـِ سیستم نسبت به $\mathbf{x}$ دیفرانسیلی نیست، یا می‌شود گفت یک معادله یِ دیفرانسیل از مرتبه یِ باپایان نیست.

3 تحول ـِ تعینی

همیلتنی یی به شکل ـِ (25) را در نظر بگیرید که در آن $f_{(2)}$ صفر است. در این حالت،

$$H(t) = P_j\, f^j_{(1)}(t). \tag{29}$$

نشان می‌دهیم چنین‌همیلتنی یی یک تحول ِ تعینی را توصیف می‌کند، یعنی اگر چگالی ي ِ احتمال در زمان ِ t_0 تعینی باشد،

$$\Psi(t_0) = e(\mathbf{x}_0), \tag{30}$$

آن‌گاه در زمان‌ها ي ِ دیگر هم چگالی ي ِ احتمال تعینی خواهد بود. بردار ِ Ψ به این شکل را در نظر بگیرید.

$$\Psi(t) := e[\mathbf{x}(t)], \tag{31}$$

که $\mathbf{x}(t)$ جواب ِ این معادله ي ِ دیفرانسیل است.

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = f^j_{(1)}[t, \mathbf{x}(t)],$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{32}$$

روشن است که Ψ شرط ِ (30) را بر می‌آوَرَد. نشان می‌دهیم این بردار (8) را هم بر می‌آوَرَد. داریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\,\partial_j e[\mathbf{x}(t)],$$

$$= f^j_{(1)}[t, \mathbf{x}(t)]\,\partial_j e[\mathbf{x}(t)]. \tag{33}$$

هم‌چنین،

$$\begin{aligned} P_j\, f^j_{(1)}(t)\, e[\mathbf{x}(t)] &= P_j\, f^j_{(1)}[t, \mathbf{x}(t)]\, e[\mathbf{x}(t)], \\ &= f^j_{(1)}[t, \mathbf{x}(t)]\, P_j\, e[\mathbf{x}(t)], \\ &= f^j_{(1)}[t, \mathbf{x}(t)]\, \partial_j e[\mathbf{x}(t)]. \end{aligned} \tag{34}$$

(33) و (34) نشان می‌دهند (8) برقرار است.

در واقع در همیلتنی یی به شکل ِ (25)، جمله ی اول سوق و جمله ی دوم نوع ی پخش است. نبودن ِ جمله ی دوم پخش را حذف می‌کند. پس چگالی ی احتمال، اگر در حالت ِ اولیه دلتا باشد دلتا می‌مانَد.

4 مرجع

[1] محمد خرمی و فریناز روشنی؛ "فرآیندها ی تصادفی"، X1-006 (2001/12/21)