X1-044 (2007/04/19)

پدیده یِ سانیَک

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

یک چشمه یِ نور و یک آشکارگر در یک تار ِ اپتیکی یِ بسته را در نظر بگیرید. نور ِ چشمه از دو مسیر به آشکارگر می‌رسد و یک نقش ِ تداخل می‌سازد. اگر تار بچرخد، اختلافِ‌فاز ِ نورها یی که از دومسیر به آشکارگر می‌رسند تغییر می‌کند و نقش ِ تداخل جابه‌جا می‌شود. تغییر ِ این اختلافِ‌فاز برا یِ شکل ِ دل‌بخواه ِ تار محاسبه می‌شود.

0 مقدمه

یک تار ِ اپتیکی یِ بسته و یک چشمه و یک آشکارگر در آن را در نظر بگیرید. نور ِ چشمه از دو مسیر به آشکارگر می‌رسد و آن‌جا یک نقش ِ تداخل می‌سازد. اگر تار بچرخد مسافت ی که نور در این دومسیر می‌پیماید تغییر می‌کند: در یک ی کم و در دیگری زیاد می‌شود. به همین خاطر اختلاف ِ مسافت ی که نور در این دومسیر پیموده تغییر می‌کند. هم‌چنین سرعت ِ نور در تار ِ ساکن و تار ِ متحرک فرق می‌کند و این تغییرِسرعت به جهت ِ انتشار ِ نور بسته‌گی دارد. این هم باعث می‌شود عدد ِ موج تغییر کند و این تغییر (که تابع ِ مکان است) برا یِ دومسیر ِ مختلف یک‌سان نیست. این دوعامل باعث می‌شود تغییرِفاز ِ نور در اثر ِ حرکت ِ تار، در این دومسیر یک‌سان نباشد و در نتیجه اختلافِ‌فاز ِ نورها یی که از دومسیر به آشکارگر می‌رسند تغییر می‌کند. به این پدیده پدیده یِ

سانیَک [a] می‌گویند.

در بیش‌تر ِ موارد ِ عملی، سرعت ِ نقطه‌ها ی تار خیل ی کم‌تر از سرعت ِ نور است. به همین خاطر می‌شود محاسبات را تا مرتبه ی یک نسبت به سرعت ِ نقطه‌ها ی تار (یا تا مرتبه ی یک نسبت به سرعت ِ زاویه‌ای ی تار) انجام داد.

1 سرعت ِ نور و بردار ِ موج در محیط ِ متحرک

یک محیط ِ هم‌سان‌گرد با ضریبِ‌شکست ِ n را در نظر بگیرید. معادله ی پاشنده‌گی برا ی نور در این محیط (ِساکن) چنین است.

$$-\omega'^2 + \frac{c^2}{n^2}\,\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}' = 0, \tag{1}$$

که ω' بس‌آمد ِ زاویه‌ای ی موج و $\mathbf{k}'$ بردار ِ موج است. این رابطه موج ی را توصیف می‌کند که سرعت ِ انتشار ِ آن در همه ی جهت‌ها مقدار ِ یک‌سان ِ u' است، که

$$u' = \frac{c}{n}. \tag{2}$$

فرض کنید همین محیط با سرعت ِ $\mathbf{v}$ حرکت کند. $(c^{-2}\,\omega, \mathbf{k})$ یک چاربردار است، پس رابطه ی ω و $\mathbf{k}$ با ω' و $\mathbf{k}'$ به این شکل است (مثلاً [1]).

$$\omega = \gamma\,(\omega' + \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'),$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}'}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} + \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c^2}\,\omega', \tag{3}$$

که γ ضریب ِ لُرِنتس [b]ِ متناظر با $\mathbf{v}$ است:

$$\gamma := \left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{4}$$

می‌خواهیم سرعت ِ انتشار ِ موج در محیط ی که با سرعت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند را حساب کنیم. این را می‌شود از رابطه‌ها ی سینماتیکی یا از رو ی رابطه ی پاشنده‌گی به دست آورد. برا ی به‌دست‌آوردن ِ رابطه ی پاشنده‌گی در محیط ی که با سرعت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند، وارون ِ رابطه‌ها ی (3) را حساب می‌کنیم:

$$\omega' = \gamma\,(\omega - \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + (\gamma-1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} - \gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c^2}\,\omega, \tag{5}$$

این‌ها را در رابطه ‌ی پاشنده‌گی ‌ی (1) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$-\gamma^2\,\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{n^2\,c^2}\right)\,\omega^2+\frac{c^2}{n^2}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}-\gamma^2\,\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2+2\,\gamma^2\,\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,\omega\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=0. \tag{6}$$

معادله ‌ی (6) رابطه ‌ی پاشنده‌گی برا ‌ی نور در محیط ی با ضریبِ‌شکست ِ n (در حالت ِ سکون) است که با سرعت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. این رابطه تا مرتبه ‌ی یک نسبت به سرعت می‌شود

$$-\,\omega^2+\frac{c^2}{n^2}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}+2\,\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,\omega\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=0. \tag{7}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\omega = \frac{c}{n}\,k + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}. \tag{8}$$

$\mathbf{u}$ (سرعت ِ انتشار ِ موج) مشتق ِ ω نسبت به $\mathbf{k}$ است:

$$\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega. \tag{9}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\mathbf{u} = \frac{c}{n}\,\frac{\mathbf{k}}{k} + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,\mathbf{v}, \tag{10}$$

و به این ترتیب،

$$u = \frac{c}{n} + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{k}. \tag{11}$$

2 جابه‌جایی یِ اختلافِ‌فاز ـِ نور در مسیرها یِ مختلف

یک تار ـِ اپتیکی را در نظر بگیرید که به شکل ـِ خم ـِ بسته یِ C است و از ماده ای با ضریبِ‌شکست ـِ n (در حالت ـِ سکون) ساخته شده. یک چشمه یِ نور در نقطه یِ $\mathbf{r}_{\rm s}$، و یک آشکارگر در نقطه یِ $\mathbf{r}_{\rm o}$ است. چشمه و آشکارگر، نسبت به تار ساکن اند. نور از طریق ـِ دو مسیر ـِ C_1 و C_2، از چشمه به آشکارگر می‌رسد. قرارداد می‌کنیم که جهت ـِ مثبت رو یِ خم ـِ C همان جهت ـِ C_1 باشد.

اول حالت ی را در نظر بگیریم که تار ساکن است. در این حالت نور با سرعت ـِ (c/n) مسیرها یِ C_1 و C_2 را می‌پیماید. زمان یِ لازم برا یِ این که نور C_i بپیماید، $t_{\rm i}$ است:

$$t_i = \frac{n}{c}\int_{C_i} |{\rm d}\mathbf{r}|, \tag{12}$$

که $\mathbf{r}$ بردار ـِ مکان برا یِ تار است. نور ی که در زمان ـِ صفر از طریق ـِ C_i به آشکارگر رسیده، در زمان ـِ $(-t_i)$ در چشمه بوده. فاز ـِ نور حاصل از C_i در آشکارگر در زمان ـِ صفر را ϕ_i می‌نامیم. این فاز برابر ـِ فاز ـِ نور در چشمه در زمان ـِ $(-t_i)$ است. پس،

$$\phi_1 - \phi_2 = \omega_0\,(t_1 - t_2), \tag{13}$$

که ω_0 بس‌آمد ـِ چشمه است. از آن‌جا،

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{n\,\omega_0}{c}\left(\int_{C_1}|{\rm d}\mathbf{r}| - \int_{C_2}|{\rm d}\mathbf{r}|\right). \tag{14}$$

فرض کنید تار حرکت می‌کند. در این حالت نور ی که در زمان ـِ صفر به آشکارگر رسیده و از C_i آمده، در زمان ـِ $(-t_i - \Delta t_i)$ در چشمه بوده. روی‌داد ـِ E_i را گسیل ـِ نور از چشمه می‌گیریم، چنان که این نور پس از طی ـِ C_i در زمان ـِ صفر به آشکارگر برسد. به این ترتیب،

$$t(E_i) = -t_i - \Delta t_i, \tag{15}$$

که $t(E_i)$ زمان ـِ روی‌داد ـِ E_i است.

این‌ها زمان‌ها یی اند که در چارچوب ـِ آزمایش‌گاه سنجیده می‌شوند. زمان ـِ روی‌داد ـِ E_i از دید ـِ ساعت ـِ هم‌راه ـِ چشمه را با $t'(E_i)$ نمایش می‌دهیم. $[t'(E_1) - t'(E_2)]$

ویژه‌زمان ِ متناظر با جهان‌خط ِ چشمه از روی‌داد ِ E_2 تا روی‌داد ِ E_1 است. تفاوت ِ این ویژه‌زمان با زمان ی که در چارچوب ِ آزمایش‌گاه بین ِ این دوروی‌داد سنجیده می‌شود از مرتبه یِ دو نسبت به سرعت ِ چشمه است. پس تا مرتبه یِ یک نسبت به سرعت ِ تار،

$$t'(E_1) - t'(E_2) = t(E_1) - t(E_2), \tag{16}$$

و از آن‌جا،

$$(\phi_1 - \phi_2) + (\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2) = \omega_0\,[(t_1 - t_2) + (\Delta t_1 - \Delta t_2)], \tag{17}$$

که ω_0 بس‌آمد ِ زاویه‌ای یِ نور ِ حاصل از چشمه یِ ساکن است. به این ترتیب،

$$\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = \omega_0\,(\Delta t_1 - \Delta t_2). \tag{18}$$

تار ی را در نظر بگیرید که با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ثابت ِ $\mathbf{\Omega}$ می‌چرخد. در این چرخش شکل ِ تار عوض نمی‌شود. نقاط ِ تار را با پارامتر ِ λ مشخص می‌کنیم. مسیر ِ نور بین ِ نقطه‌ها یِ متناظر با پارامترها یِ λ و $(\lambda + \mathrm{d}\lambda)$ را در نظر بگیرید. نور در زمان ِ t در $\mathbf{r}(\lambda, t)$، و در زمان ِ $(t + \mathrm{d}t)$ در $\mathbf{r}(\lambda + \mathrm{d}\lambda, t + \mathrm{d}t)$ است. داریم

$$\mathbf{r}(\lambda + \mathrm{d}\lambda, t + \mathrm{d}t) - \mathbf{r}(\lambda, t) = \mathbf{u}\,\mathrm{d}t, \tag{19}$$

که $\mathbf{u}$ بردار ِ سرعت ِ نور طی ِ این بازه است. از این‌جا،

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda + \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \mathbf{u}\,\mathrm{d}t, \tag{20}$$

که $\mathbf{v}$ سرعت ِ تار است:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \tag{21}$$

رابطه یِ (10) را در (20) می‌گذاریم:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{n^2}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{n}\,\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}t. \tag{22}$$

اندازه یِ دوطرف را تا مرتبه یِ یک نسبت به v می‌نویسیم. نتیجه می‌شود

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right| + \frac{1}{n^2}\,\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right|^{-1}\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}t = \frac{c}{n}\,\mathrm{d}t. \tag{23}$$

چون این نتیجه تا مرتبه یِ یک نسبت به v درست است، در طرف ِ چپ می‌شود به جا یِ ضریب ِ v مقدار ِ مرتبه‌یِ‌صفر (نسبت به v) گذاشت. از این‌جا،

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right| + \frac{1}{n\,c}\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{c}{n}\,\mathrm{d}t, \tag{24}$$

یا

$$\mathrm{d}t = \frac{n}{c}\,\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right| + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{25}$$

از این که تار با سرعت ِ زاویه‌ای یِ $\mathbf{\Omega}$ می‌چرخد معلوم می‌شود

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}, \tag{26}$$

و با جاگذاری یِ آن در (25)،

$$\mathrm{d}t = \frac{n}{c}\,\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\right| + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{27}$$

چون تار با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ثابت دوران می‌کند، $\mathbf{r}$ و مشتق ِ آن نسبت به λ دوران‌یافته یِ این کمیت‌ها برا یِ تار ِ ساکن اند. پس عبارت ِ طرف ِ راست ِ (27) مستقل از زمان است و داریم

$$t_i + \Delta t_i = \frac{n}{c}\,\int_{C_i} |\mathrm{d}'\mathbf{r}| + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{\Omega}\cdot\int_{C_i} \mathbf{r}\times\mathrm{d}'\mathbf{r}, \tag{28}$$

که $\mathrm{d}'\mathbf{r}$ یعنی $\mathrm{d}\mathbf{r}$ در زمان ِ ثابت:

$$\mathrm{d}'\mathbf{r} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$\Delta t_i = \frac{1}{c^2}\,\mathbf{\Omega}\cdot\int_{C_i} \mathbf{r}\times\mathrm{d}'\mathbf{r}, \tag{30}$$

و از آن‌جا،

$$\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = \frac{\omega_0}{c^2}\,\mathbf{\Omega}\cdot\oint_C \mathbf{r}\times\mathrm{d}'\mathbf{r}. \tag{31}$$

دیده می‌شود این مقدار به جا یِ چشمه و آشکارگر بسته‌گی ندارد و ضریبِ‌شکست ِ محیط هم در آن ظاهر نمی‌شود.

این عبارت را می‌شود بر حسب ِ یک انتگرال ِ دوبُعدی هم نوشت:

$$\oint_C \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}=\int_S \mathrm{d}'\mathbf{S}\cdot[\nabla\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})],$$

$$=\int_S \mathrm{d}'\mathbf{S}\cdot(\mathbf{\Omega}\,\nabla\cdot\mathbf{r}-\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\mathbf{r}),$$

$$=2\,\mathbf{\Omega}\cdot\int_S \mathrm{d}'\mathbf{S}, \tag{32}$$

که S ناحیه ای است که مرز ِ آن C است. به این ترتیب،

$$\Delta\phi_1-\Delta\phi_2=\frac{2\,\omega_0}{c^2}\,\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{S}, \tag{33}$$

که $\mathbf{S}$ بردار ِ مساحت ِ ناحیه یِ S است.

مثلاً اگر تار به شکل ِ دایره ای به شعاع ِ R باشد که با سرعت ِ زاویه‌ای یِ Ω حول ِ محور ی می‌چرخد که بر صفحه یِ دایره عمود است و از مرکز ِ دایره می‌گذرد،

$$\Delta\phi_1-\Delta\phi_2=\frac{2\,\pi\,R^2\,\omega_0\,\Omega}{c^2}. \tag{34}$$

3 سرعت‌ها یِ نَه‌چندان کم

تار ی را در نظر بگیرید که به طور ِ صلب می‌چرخد، یعنی فاصله یِ دو نقطه یِ آن از هم (به طور ِ هم‌زمان) از دید ِ چارچوب ِ آزمایش‌گاه برابر ِ فاصله یِ دو نقطه یِ متناظر برا یِ تار ِ ساکن است. نور ی را در نظر بگیرید که در زمان ِ t در پارامتر ِ λ است. از دید ِ F' (چارچوب ِ لخت ی که سرعت ِ آن برابر ِ سرعت ِ نقطه یِ با پارامتر ِ λ در زمان ِ t است)، مدت ی که طول می‌کشد تا این نور به پارامتر ِ $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ برسد $\mathrm{d}t'$ است، که

$$\mathrm{d}t'=\frac{n}{c}\,|\mathrm{d}\mathbf{r}'|. \tag{35}$$

$\mathrm{d}\mathbf{r}'$ بردار ِ مکان ِ نقطه یِ با پارامتر ِ $(\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ نسبت به نقطه یِ با پارامتر ِ λ، از دید ِ F' است. داریم

$$\mathrm{d}\mathbf{r}' = \mathrm{d}'\mathbf{r} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}}{v^2}, \tag{36}$$

و

$$\mathrm{d}t = \gamma\,\left(\mathrm{d}t' + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}'}{c^2}\right). \tag{37}$$

از ترکیب ِ رابطه‌ها يِ (35) تا (37) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{d}t = \gamma\,\left[\frac{n}{c}\,\left|\mathrm{d}'\mathbf{r} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}}{v^2}\right| + \gamma\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}}{c^2}\right]. \tag{38}$$

به این ترتیب،

$$(t_1 + \Delta t_1) - (t_2 + \Delta t_2) = \frac{n}{c}\,\left(\int_{C_1} - \int_{C_2}\right)\,\left[\gamma\,\left|\mathrm{d}'\mathbf{r} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}}{v^2}\right|\right] + \oint_C \frac{\gamma^2}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}. \tag{39}$$

ضمناً داریم

$$(t_1' + \Delta t_1') - (t_2' + \Delta t_2') = \gamma_{\mathrm{s}}^{-1}\,[(t_1 + \Delta t_1) - (t_2 + \Delta t_2)], \tag{40}$$

که γ_{s} ضریب ِ لُرِنتس [b] برا يِ چشمه است. از این‌جا،

$$(\phi_1 + \Delta\phi_1) - (\phi_2 + \Delta\phi_2) = \frac{n\,\omega_0}{c\,\gamma_{\mathrm{s}}}\,\left(\int_{C_1} - \int_{C_2}\right)\,\left[\gamma\,\left|\mathrm{d}'\mathbf{r} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}}{v^2}\right|\right] + \frac{\omega_0}{\gamma_{\mathrm{s}}}\,\oint_C \frac{\gamma^2}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}, \tag{41}$$

یا

$$\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = \frac{n\,\omega_0}{c}\,\left(\int_{C_1} - \int_{C_2}\right)\,\left[\frac{\gamma}{\gamma_{\mathrm{s}}}\,\left|\mathrm{d}'\mathbf{r} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}}{v^2}\right| - |\mathrm{d}'\mathbf{r}|\right] + \frac{\omega_0}{\gamma_{\mathrm{s}}}\,\oint_C \frac{\gamma^2}{c^2}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}'\mathbf{r}, \tag{42}$$

دیده می‌شود تا مرتبه يِ یک نسبت به سرعت‌ها، جمله يِ اول صفر است و جمله يِ دوم هم همان عبارت ِ طرف ِ راست ِ (31) است.

برا یِ حالت ِ خاص ی که تار دایره ای به شعاع ِ R است که با سرعت ِ زاویه‌ای یِ Ω حول ِ محور ی می‌چرخد که بر صفحه یِ دایره عمود است و از مرکز ِ دایره می‌گذرد،

$$\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = (\gamma - 1)\,\frac{n\,\omega_0}{c}\,\left(\int_{C_1} - \int_{C_2}\right)|\mathrm{d}'\mathbf{r}| + \gamma\,\frac{2\,\pi\,R^2\,\omega_0\,\Omega}{c^2}, \qquad (43)$$

یا

$$\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 = (\gamma - 1)\,(\phi_1 - \phi_2)_0 + \gamma\,\frac{2\,\pi\,R^2\,\omega_0\,\Omega}{c^2}, \qquad (44)$$

که $(\phi_1 - \phi_2)_0$ اختلافِ‌فاز ِ ناشی از دومسیر برا یِ مدار ِ ساکن است و

$$\gamma = \left(1 - \frac{R^2\,\Omega^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (45)$$

روشن است که (44) هم تا مرتبه یِ یک نسبت به سرعت‌ها همان (34) است.

4 مرجع

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 11

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Sagnac

[b] Lorentz