X1-047 (2007/09/13)

کنش و زمان ِ گسسته

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

کنش، معادله یِ حرکت، و تقارن‌ها برا یِ یک سیستم ِ زمان‌گسسته بررسی می‌شود.

0 مقدمه

بر اساس ِ فرمول‌بندی یِ کنش در مکانیک ِ کلاسیک، متناظر با هر سیستم یک کنش هست که تابع ی از مسیر در یک بازه یِ زمانی و آن بازه یِ زمانی است. مسیر ِ کلاسیک (جواب ِ معادله یِ حرکت) آن مسیر ی است که وردش ِ کنش نسبت به آن در زمان‌ها یِ درونی صفر شود. می‌گویند سیستم در زمان موضعی است، اگر این کنش انتگرال ِ یک تابع (لَگرانژی) رو یِ بازه یِ زمانی باشد و این لَگرانژی تابع ِ زمان، مسیر در آن زمان، و تعداد ِ باپایان ی از مشتق‌ها یِ زمانی یِ مسیر در آن زمان باشد. اگر فقط مشتق ِ اول در لَگرانژی ظاهر شده باشد، می‌گویند کنش از مرتبه یِ یک است. تقارن ِ نُتِری به یک خانواده یِ یک‌پارامتری یِ تبدیل‌ها ی وارون‌پذیر (بر پیکربندی‌ها) می‌گویند که نسبت به پارامتر مشتق‌پذیر است و کنش را به یک کنش ِ هم‌ارز تبدیل می‌کند. چنین‌تقارن ی به یک ثابت ِ حرکت می‌انجامد. این‌ها را می‌شود در مثلاً [1] یافت. این‌جا قرار است همین موارد برا یِ سیستم‌ها یِ با زمان ِ گسسته بررسی شود.

1 کنش و معادله یِ حرکت

سیستم ی را در نظر بگیرید که با یک تابع از $\mathbb{Z}$ (مجموعه یِ عددها یِ صحیح) به یک مجموعه (فضا یِ پیکربندی) توصیف می‌شود. به هر یک از این تابع‌ها یک مسیر می‌گوییم. هر مسیر را می‌شود با مجموعه یِ $\{q^i(\tau) \mid (i,\tau)\}$ نشان داد. τ (زمان) پارامتر ِ گسسته یِ تحول است. به q^i ها متغیرها یِ دینامیکی یِ سیستم می‌گوییم. برا یِ این سیستم تحول ی با معادله یِ

$$\forall\ (i,\tau)\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=0 \tag{1}$$

(معادله یِ تحول یا معادله یِ حرکت) می‌نویسیم. $\mathbf{q}$ یک نماد ِ کلی برا یِ q^i ها است، و $\mathcal{E}_i$ ها تابعی‌ها یی از $\mathbf{q}$ و زمان اند. می‌گوییم این سیستم با کنش ِ S توصیف می‌شود، اگر

$$\forall\ (i,\tau,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=\frac{\partial S(\mathbf{q})}{\partial q^i(\tau)}, \tag{2}$$

که S در $\mathbb{R}$ (مجموعه یِ عددها یِ حقیقی) مقدار می‌گیرد.

می‌گوییم کنش موضعی و از مرتبه یِ n است اگر

$$\forall\ \mathbf{q}\ :\ S(\mathbf{q})=\sum_{\tau} S\left[\tau;\mathbf{q}\left(\tau-\frac{n}{2}\right),\dots,\mathbf{q}\left(\tau+\frac{n}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

برا یِ کنش ِ از مرتبه یِ یک، از (2) و (3) نتیجه می‌شود

$$\forall\ (i,\tau,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=\frac{\partial S[\tau+\iota;\mathbf{q}(\tau),\mathbf{q}(\tau+1)]}{\partial q^i(\tau)}+\frac{\partial S[\tau-\iota;\mathbf{q}(\tau-1),\mathbf{q}(\tau)]}{\partial q^i(\tau)}, \tag{4}$$

که

$$\iota:=\frac{1}{2}. \tag{5}$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} p_i^{+}(\tau)&:=+\frac{\partial S[\tau-\iota;\mathbf{q}(\tau-1),\mathbf{q}(\tau)]}{\partial q^i(\tau)},\\ p_i^{-}(\tau)&:=-\frac{\partial S[\tau+\iota;\mathbf{q}(\tau),\mathbf{q}(\tau+1)]}{\partial q^i(\tau)}. \end{aligned} \tag{6}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود

$$\forall\ (i,\tau,\mathbf{q})\ :\ \mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})=p_i^{+}(\tau)-p_i^{-}(\tau). \tag{7}$$

2 تقارن ِ نُتِری و ثابت ِ حرکت

می‌گوییم نگاشت ِ وارون‌پذیر ِ $\mathcal{O}$ از مجموعه يِ مسیرها به مجموعه يِ مسیرها یک تقارن ِ کنش است اگر

$$\begin{aligned}\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ S\{\tau;[\mathcal{O}(\mathbf{q})](\tau-\iota),[\mathcal{O}(\mathbf{q})](\tau+\iota)\} &= S[\tau;\mathbf{q}(\tau-\iota),(\mathbf{q})(\tau+\iota)]\\ &\quad+\Lambda(\tau+\iota)-\Lambda(\tau-\iota),\end{aligned} \tag{8}$$

که Λ در $\mathbb{R}$ مقدار می‌گیرد. می‌گوییم $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ِ نُتِری يِ سیستم است، اگر

$$\begin{aligned}\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ \left.\frac{\partial S[\tau;(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})(\tau-\iota)+(\mathbf{q}+s\,\mathbf{G})(\tau+\iota)]}{\partial s}\right|_{s=0} &= \lambda(\tau+\iota)\\ &\quad-\lambda(\tau-\iota),\end{aligned} \tag{9}$$

که λ در $\mathbb{R}$ مقدار می‌گیرد.

فرض کنید $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ِ نُتِری يِ سیستم است. در این صورت از (9) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ \lambda(\tau+\iota)-\lambda(\tau-\iota) &= G^i(\tau-\iota)\,\frac{\partial S[\tau;\mathbf{q}(\tau-\iota),\mathbf{q}(\tau+\iota)]}{\partial q^i(\tau-\iota)}\\ &\quad+G^i(\tau+\iota)\,\frac{\partial S[\tau;\mathbf{q}(\tau-\iota),\mathbf{q}(\tau+\iota)]}{\partial q^i(\tau+\iota)},\end{aligned} \tag{10}$$

یا

$$\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ p_i^{+}(\tau+\iota)\,G^i(\tau+\iota)-\lambda(\tau+\iota)-p_i^{-}(\tau-\iota)\,G^i(\tau-\iota)+\lambda(\tau-\iota)=0. \tag{11}$$

از ترکیب ِ این با (7) نتیجه می‌شود

$$\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ (p_i^+\, G_i-\lambda)(\tau+\iota)-(p_i^+\, G_i-\lambda)(\tau-\iota) = -\mathcal{E}_i(\tau-\iota,\mathbf{q})\, G^i(\tau-\iota), \quad (12)$$

یا

$$\forall\ (\tau,\mathbf{q})\ :\ (p_i^-\, G_i-\lambda)(\tau+\iota)-(p_i^-\, G_i-\lambda)(\tau-\iota) = -\mathcal{E}_i(\tau+\iota,\mathbf{q})\, G^i(\tau+\iota). \quad (13)$$

این رابطه‌ها نشان می‌دهند رو یِ لاک (وقت ی معادله یِ حرکت برقرار است) کمیت ِ I ثابت ِ حرکت است، که

$$I := p_i\, G^i - \lambda. \quad (14)$$

در این رابطه p را می‌شود p^+ یا p^- گرفت. این‌دو رو یِ لاک یک‌سان اند.

3 حد ِ زمان‌پی‌وسته

زمان ِ t را از رو یِ زمان ِ گسسته یِ τ و تیکِ‌زمانی یِ Δ به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$t := \tau\,\Delta. \quad (15)$$

از تابع ِ $\mathbf{q}$ که رو یِ زمان ِ گسسته تعریف شده یک تابع ِ $\mathbf{Q}$ تعریف می‌کنیم که رو یِ زمان ِ پی‌وسته تعریف شده:

$$\mathbf{Q}(\tau\,\Delta) := \mathbf{q}(\tau). \quad (16)$$

به این ترتیب دیده می‌شود

$$\mathbf{Q}(\tau\,\Delta) = \frac{\mathbf{q}(\tau+\iota)+\mathbf{q}(\tau-\iota)}{2} + o(\Delta),$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(\tau\,\Delta) = \frac{\mathbf{q}(\tau+\iota)-\mathbf{q}(\tau-\iota)}{\Delta} + o(\Delta), \quad (17)$$

که $o(\Delta)$ کمیت ی است که سریع‌تر از Δ به صفر می‌گراید. برا یِ یک کنش ِ مرتبه‌یِ‌یک لَگرانژی تعریف می‌کنیم.

$$L(t;\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}) := \frac{S[\tau;\mathbf{Q}-\iota\,\Delta\,\dot{\mathbf{Q}},\mathbf{Q}+\iota\,\Delta\,\dot{\mathbf{Q}}]}{\Delta}. \tag{18}$$

از رابطه‌ها یِ (6) دیده می‌شود

$$\begin{aligned} p_i^+(\tau) &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right|_{t-\iota\,\Delta} + \frac{\partial L}{\partial Q^i}\,\iota\,\Delta,\\ p_i^-(\tau) &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right|_{t+\iota\,\Delta} - \frac{\partial L}{\partial Q^i}\,\iota\,\Delta. \end{aligned} \tag{19}$$

با تعریف ِ

$$P_i(t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}, \tag{20}$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} p_i^+(\tau) &= P_i(t) + \left[\frac{\partial L}{\partial Q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right)\right]\,\iota\,\Delta + o(\Delta),\\ p_i^-(\tau) &= P_i(t) - \left[\frac{\partial L}{\partial Q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right)\right]\,\iota\,\Delta + o(\Delta). \end{aligned} \tag{21}$$

به این ترتیب از (7) نتیجه می‌شود

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\mathcal{E}_i(\tau,\mathbf{q})}{\Delta} = \frac{\partial L}{\partial Q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}\right). \tag{22}$$

دیده می‌شود که طرف ِ راست وردش ِ کنش ی با لَگرانژی یِ L نسبت به مسیر است. یعنی معادله‌یِ‌حرکت ِ زمان‌گسسته، در حد ِ زمان ِ پی‌وسته به معادله‌یِ‌حرکت ِ زمان‌پی‌وسته تبدیل می‌شود.

از (14) و (21) ضمناً نتیجه می‌شود اگر $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ِ نُتِری باشد، در حد ِ زمان‌پی‌وسته ثابتِ‌حرکت ِ متناظر (I) می‌شود

$$I = P_i\,G^i - \lambda. \tag{23}$$

4 مرجع

[1] محمد خرمی؛ " تقارن و فرمول‌بندی یِ لَگرانژی I"، (2003/03/21) X1-015