X1-048 (2007/11/23)

انتشار ِ موج در محیط‌ها یِ متحرک

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

مشخصه‌ها يِ موج (بس‌آمد، بردار ِ موج، معادله يِ پاشنده‌گی، و سرعت ِ موج) در محیط‌ها يِ متحرک بررسی می‌شود.

1 فاز، بس‌آمد، و بردار ِ موج

بس‌آمد (ω) و بردار ِ موج ($\mathbf{k}$) به این شکل از فاز (ϕ) به دست می آیند:

$$\omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$\mathbf{k} = \nabla \phi. \tag{1}$$

این رابطه را می‌شود به این شکل خلاصه کرد

$$k_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial r^\mu}, \tag{2}$$

که تعریف کرده ایم

$$r^0 := t, \tag{3}$$

و

$$k_0 := -\omega. \tag{4}$$

قرارداد ی که در این متن به کار می‌رود این است که شاخص‌ها یِ لاتین فقط مقدارها یِ فضایی (غیرِصفر) را می‌گیرند و شاخص‌ها یِ یونانی صفر و مقدارها یِ فضایی را. به زوج ِ ω و $\mathbf{k}$ چاربردار ِ موج می‌گوییم و آن را با k نمایش می‌دهیم.

2 معادله یِ پاشنده‌گی و سرعت ِ انتشار ِ موج

معادله یِ پاشنده‌گی یک رابطه بین ِ بردار ِ موج و بس‌آمد است:

$$\mathcal{D}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \tag{5}$$

یا

$$\mathcal{D}(k) = 0. \tag{6}$$

سرعت (سرعت ِ گروه) برا یِ موج را مشتق ِ بس‌آمد نسبت به بردار ِ موج تعریف می‌کنیم:

$$u^i := \frac{\partial \omega}{\partial k_i}. \tag{7}$$

با استفاده از (6)، این را می‌شود نوشت

$$u^i = -\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_i}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \omega}\right)^{-1}, \tag{8}$$

و با تعریف ِ (4)،

$$u^i = \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_i}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_0}\right)^{-1}. \tag{9}$$

می‌شود u^0 هم تعریف کرد:

$$u^0 := 1, \tag{10}$$

و به این ترتیب،

$$u^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_\mu}\right)\,\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_0}\right)^{-1}. \tag{11}$$

3 محیط ِ متحرک

محیط ی را در نظر بگیرید که با سرعت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. موج ی که در این محیط منتشر می‌شود را می‌شود به این شکل بررسی کرد که ابتدا موج در محیط ِ ساکن (با چاربردارِموج ِ k) را در نظر بگیریم و بَعد این مجموعه (محیط و موج) را بخیزانیم. ϕ' (فاز ِ موج ِ خیزیده) رابطه یِ ساده ای با ϕ (فاز ِ موج ِ اولیه) دارد:

$$\phi'(r') = \phi(r), \tag{12}$$

که r' با یک تبدیل ِ پوانکَره [a] به x مربوط است:

$$r' = \Lambda\, r + a, \tag{13}$$

که Λ یک خیز ِ لُرِنتس [b] با پارامترِسرعت ِ $\mathbf{v}$ است و a یک چاربردار ِ ثابت (مثلاً [1]). از این‌جا معلوم می‌شود رابطه یِ k' (چاربردارِموج ِ موج ِ خیزیده) با k چنین است.

$$k'_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu\, k_\nu. \tag{14}$$

سرانجام، $\mathcal{D}'$ (تابع ِ پاشنده‌گی یِ موج ِ خیزیده) به این شکل به $\mathcal{D}$ (تابع ِ پاشنده‌گی یِ موج ِ اولیه) مربوط است.

$$\mathcal{D}'(k') = \mathcal{D}(k). \tag{15}$$

به این ترتیب سرعت ِ موج ِ خیزیده به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u'^\mu &= \left(\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial k'_\mu}\right)\,\left(\frac{\partial \mathcal{D}'}{\partial k'_0}\right)^{-1}, \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_\alpha}\,\frac{\partial k_\alpha}{\partial k'_\mu}\right)\,\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial k_\beta}\,\frac{\partial k_\beta}{\partial k'_0}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

از (14) دیده می‌شود

$$\frac{\partial k_\rho}{\partial k'_\sigma} = \Lambda^\sigma{}_\rho, \tag{17}$$

و به این ترتیب،

$$u'^\mu = (\Lambda^\mu{}_\alpha\, u^\alpha)\,(\Lambda^0_\beta\, u^\beta)^{-1}. \tag{18}$$

این رابطه نشان می‌دهد سرعت ِ موج ِ خیزیده همان ی است که از خیزاندن ِ سرعت ِ u به دست می‌آید. برا یِ دیدن ِ این، متحرک ی را در نظر بگیرید که سرعت ِ آن U است:

$$U^\mu = \frac{\mathrm{d}R^\mu}{\mathrm{d}T}, \tag{19}$$

که R مکان (و زمان) ِ ذره، و $R^0 = T$ زمان ِ ذره است. این ذره را با سرعت ِ $\mathbf{v}$ می‌خیزانیم. داریم،

$$\mathrm{d}R'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha\, \mathrm{d}R^\alpha, \tag{20}$$

که R' مکان و (زمان) ِ ذره یِ خیزیده است. از (20) می‌شود U' (سرعت ِ ذره یِ خیزیده) را حساب کرد:

$$\begin{aligned}
U' &= \frac{\mathrm{d}R'^\mu}{\mathrm{d}T'},\\
&= \frac{\mathrm{d}R'^\mu}{\mathrm{d}R'^0},\\
&= (\Lambda^\mu{}_\alpha\, \mathrm{d}R^\alpha)\,(\Lambda^0{}_\beta\, \mathrm{d}R^\beta)^{-1},\\
&= \left(\Lambda^\mu{}_\alpha\, \frac{\mathrm{d}R^\alpha}{\mathrm{d}T}\right)\,\left(\Lambda^0{}_\beta\, \frac{\mathrm{d}R^\beta}{\mathrm{d}T}\right)^{-1},\\
&= (\Lambda^\mu{}_\alpha\, U^\alpha)\,(\Lambda^0{}_\beta\, U^\beta)^{-1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

دیده می‌شود این همان رابطه یِ (18) است.

4 مرجع

[1] Steven Weinberg; "Gravitation and cosmology", (John Wiley & Sons, 1972) chapter 2

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Poincaré

[b] Lorentz