X1-049 (2008/01/31)

نسبیت و سیستم‌ها یِ با جرم ِ متغیر

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

معادله یِ حرکت برا یِ سیستم‌ها یِ با جرم ِ متغیر (از جمله موشک ِ نوری) در نسبیت ِ خاص بررسی می‌شود.

0 قراردادها

منظور از جرم جرم ِ سکون است،

$$r^0 := t, \tag{1}$$

و

$$\eta_{\mu\,\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{2}$$

که r^μ ها مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ مکان اند، و t زمان و η متریک (ِ مینکُسکی [a]) است. بردارها یِ سه‌مئلفه‌ای (با مئلفه‌ها یِ فضایی) را با حروف ِ سیاه نمایش می‌دهیم. ویژه‌زمان را با τ نمایش می‌دهیم. شاخص‌ها یی که مقدارها یِ فضازمانی (از 0 تا 3) را می‌گیرند را با حروف ِ یونانی و شاخص‌ها یی که فقط مقدارها یِ فضایی (از 1 تا 3) را می‌گیرند را با حروف ِ لاتین نمایش می‌دهیم. متناظر با سرعت ِ $\mathbf{v}$،

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

یک کمیت ِ چهارمئلفه‌ای (v) ساخته می‌شود

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$v^0 = 1. \tag{5}$$

1 معادله یِ حرکت برا یِ سیستم‌ها یِ با جرم ِ متغیر

سیستم ی را در نظر بگیرید که جرم ِ آن m، سرعت ِ آن v، و چاربردار ِ تکانه یِ آن p است:

$$p = m\,\gamma\,v, \tag{6}$$

که γ ضریب ِ لُرِنتس [b] است:

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7}$$

و

$$\beta := \sqrt{(\mathbf{v}/c)\cdot(\mathbf{v}/c)}. \tag{8}$$

اگر بخش ی از این سیستم جدا شود (یا چیز ی به این سیستم افزوده شود) جرم و سرعت تغییر می‌کنند. سرعت ِ چیز ی که وارد ِ سیستم شده یا از آن بیرون رفته را با $\mathbf{s}$ نمایش می‌دهیم. چارتکانه یِ این چیز Δp یا $(-\Delta p)$ است (اولی برا یِ ورود و دومی برا یِ خروج). در هردوحالت،

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{s}\,\Delta p^0. \tag{9}$$

ضمناً داریم

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}\, p^0, \tag{10}$$

که $\mathbf{v}$ سرعت ِ سیستم است. اگر تغییرات ِ سیستم هم‌وار باشد، معادله یِ (9) را می‌شود نوشت

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}p^0} = \mathbf{s}. \tag{11}$$

با استفاده از (10)، می‌شود این معادله را بر حسب ِ سرعت نوشت:

$$p^0\, \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}p^0} = \mathbf{s} - \mathbf{v}. \tag{12}$$

فرق ِ رابطه‌ها یِ (11) و (12) با مانسته‌ها یِ غیرِنسبیتی پِشان این است که در رابطه‌ها یِ نسبیتی، به جا یِ m در رابطه‌ها یِ غیرِنسبیتی p^0 ظاهر شده. با توجه به

$$p^0 = m\, \gamma, \tag{13}$$

روشن است که در حد ِ سرعت‌ها یِ کم (نسبت به سرعت ِ نور) رابطه‌ها یِ (11) و (12) به مانسته‌ها یِ نسبیتی پِشان تبدیل می‌شوند.

2 موشک ِ نوری

اگر چیز ی که از سیستم بیرون می‌رود جرم َ ش صفر باشد، اندازه یِ سرعت ِ این چیز ثابت (همان سرعت ِ نور) است. از جمله، اگر چیز ی که از سیستم بیرون می‌رود نور باشد چنین است. به چنین‌سیستم ی موشک ِ نوری می‌گویند. اگر چیز ی که از سیستم بیرون می‌رود جرم َ ش صفر و جهت ِ حرکت َ ش هم ثابت باشد، آن‌گاه بردار ِ $\mathbf{s}$ ثابت و اندازه یِ آن c می‌شود. فرض کنید چنین است. در این حالت جواب ِ معادله یِ (11) می‌شود

$$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{s}\,(p^0 - \tilde{p}^0), \tag{14}$$

که ابرو مشخص‌کننده یِ یک حالت ِ مرزی (مثلاً حالت ِ اولیه) است. از این‌جا می‌شود سرعت ِ سیستم را به دست آورد. از (10) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{v} = (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s})\,\frac{\tilde{p}^0}{p^0} + \mathbf{s}. \tag{15}$$

از این رابطه ممکن است این تصور پیش آید که اندازه یِ سرعت ِ سیستم می‌تواند به طور ِ نامحدود زیاد شود. اما چنین نیست: p^0 به طور ِ نامحدود کم نمی‌شود چون جا یی می‌رسد که جرم ِ سیستم صفر می‌شود، و از آن پس سیستم دیگر نمی‌تواند چیز ی از دست بدهد. جرم ِ سیستم را می‌شود از تکانه و انرژی یِ آن به دست آورد:

$$m^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p}/c)\cdot(\mathbf{p}/c), \tag{16}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$m^2 = (p^0)^2 - [(\tilde{\mathbf{p}}/c)\cdot(\tilde{\mathbf{p}}/c) + (p^0 - \tilde{p}^0)^2 + 2\,\hat{\mathbf{s}}\cdot(\tilde{\mathbf{p}}/c)\,(p^0 - \tilde{p}^0)], \tag{17}$$

که در آن از این استفاده شده که

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{s} = c^2. \tag{18}$$

$\tilde{\mathbf{p}}$ را بر حسب ِ $\tilde{\mathbf{v}}$ می‌نویسیم و (17) را ساده می‌کنیم. با تعریف ِ

$$\beta_{\mathrm{s}} = \hat{\mathbf{s}}\cdot(\mathbf{v}/c), \tag{19}$$

نتیجه می‌شود

$$m^2 = \tilde{m}^2 + 2\,\tilde{p}^0\,(1 - \tilde{\beta}_{\mathrm{s}})\,(p^0 - \tilde{p}^0), \tag{20}$$

یا

$$p^0 = \tilde{p}^0 - \frac{\tilde{m}^2 - m^2}{2\,\tilde{p}^0\,(1 - \tilde{\beta}_{\mathrm{s}})}. \tag{21}$$

با این رابطه و رابطه یِ (13) می‌شود ضریب ِ لُرِنتس [b] ِ سیستم را هم حساب کرد:

$$\gamma = \tilde{\gamma}\,\frac{\tilde{m}}{m}\,\left[1 - \frac{1 - (m/\tilde{m})^2}{2\,\tilde{\gamma}^2\,(1 - \tilde{\beta}_{\mathrm{s}})}\right]. \tag{22}$$

از (21) و (15) هم رابطه یِ سرعت بر حسب ِ m به دست می آید:

$$\mathbf{v} = (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s})\,\left[1 - \frac{1 - (m/\tilde{m})^2}{2\,\tilde{\gamma}^2\,(1 - \tilde{\beta}_{\mathrm{s}})}\right]^{-1} + \mathbf{s}. \tag{23}$$

این رابطه‌ها بسته‌گی یِ p^0، ضریب ِ لُرِنتس [b]، و سرعت به m را می‌دهند. از جمله معلوم می‌شود برا یِ p^0 یک حدِپایین ($p^0_{\rm m}$) هست. این حد متناظر با $m=0$ صفر است:

$$p^0_{\rm m} = \tilde{p}^0 - \frac{\tilde{m}^2}{2\,\tilde{p}^0\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})},$$
$$= \tilde{p}^0\,\frac{1-2\,\tilde{\beta}_{\rm s}+\tilde{\beta}^2}{2\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})}. \tag{24}$$

در $m=0$، ضریب ِ لُرِنتس بی‌نهایت می‌شود. در این حد سرعت به $\mathbf{v}_{\rm m}$ می‌گراید:

$$\mathbf{v}_{\rm m} = (\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{s})\,\frac{2\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})}{1-2\,\tilde{\beta}_{\rm s}+\tilde{\beta}^2}+\mathbf{s}. \tag{25}$$

اندازه یِ $\mathbf{v}_{\rm m}$ برابر ِ c است:

$$\mathbf{v}_{\rm m}\cdot\mathbf{v}_{\rm m} = (\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{s})\cdot(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{s})\,\frac{4\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})^2}{(1-2\,\tilde{\beta}_{\rm s}+\tilde{\beta}^2)^2}+\mathbf{s}\cdot(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{s})\,\frac{4\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})}{1-2\,\tilde{\beta}_{\rm s}+\tilde{\beta}^2}+c^2,$$
$$= c^2\,\left\{\frac{4\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})^2}{1-2\,\tilde{\beta}_{\rm s}+\tilde{\beta}^2}+(\tilde{\beta}_{\rm s}-1)\,\frac{4\,(1-\tilde{\beta}_{\rm s})}{1-2\,\tilde{\beta}_{\rm s}+\tilde{\beta}^2}+1\right\},$$
$$= c^2. \tag{26}$$

اما راستا یِ $\mathbf{v}_{\rm m}$ لزوماً همان راستا یِ $\mathbf{s}$ نیست. اگر $\tilde{\mathbf{v}}$ با $\mathbf{s}$ هم‌راستا باشد، آن‌گاه (25) ساده‌تر می‌شود. در این حالت،

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\beta}_{\rm s}\,\mathbf{s}, \tag{27}$$

و

$$\tilde{\beta}^2 = \tilde{\beta}_{\rm s}^2, \tag{28}$$

که از این‌ها نتیجه می‌شود

$$\mathbf{v}_{\rm m} = -\mathbf{s}. \tag{29}$$

برا یِ محاسبه یِ بسته‌گی یِ کمیت‌ها به زمان، بسته‌گی یِ جرم به زمان لازم است. برا یِ این کار کافی است بسته‌گی یِ جرم به ویژه‌زمان (زمان ی که ساعت ِ هم‌راه ِ سیستم می‌سنجد) را بدانیم. در این صورت،

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma, \tag{30}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$t = \tilde{t} + \int_{\tilde{m}}^{m} \mathrm{d}m \, \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}m} \, \tilde{\gamma} \, \frac{\tilde{m}}{m} \, \left[1 - \frac{1 - (m/\tilde{m})^2}{2\,\tilde{\gamma}^2\,(1 - \tilde{\beta}_{\mathrm{s}})}\right]. \tag{31}$$

با ترکیب ِ این رابطه با رابطه‌ها یِ (21) تا (23)، بسته‌گی یِ p^0، ضریب ِ لُرِنتس [b]، و سرعت به زمان به دست می‌آید.

3 اسم‌ها یِ خاص

[a] Poincaré

[b] Lorentz