X1-050 (2008/02/29)

نسبیت و شتاب ِ ثابت

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

معادله یِ حرکت ِ ذره ای بررسی می‌شود که شتاب ِ آن در چارچوب ِ سکون ِ آنی یَش ثابت است.

0 قراردادها

منظور از جرم جرم ِ سکون است،

$$r^0 := t, \tag{1}$$

و

$$\eta_{\mu\,\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{2}$$

که r^μ ها مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ مکان اند، و t زمان و η متریک (ِ مینکُسکی [a]) است. بردارها یِ سه‌مئلفه‌ای (با مئلفه‌ها یِ فضایی) را با حروف ِ سیاه نمایش می‌دهیم. ویژه‌زمان را با τ نمایش می‌دهیم. شاخص‌ها یی که مقدارها یِ فضازمانی (از 0 تا 3) را می‌گیرند را با حروف ِ یونانی و شاخص‌ها یی که فقط مقدارها یِ فضایی (از 1 تا 3) را می‌گیرند را با حروف ِ لاتین نمایش می‌دهیم. متناظر با سرعت ِ $\mathbf{v}$،

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

یک کمیت ِ چهارمئلفه‌ای (v) ساخته می‌شود

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$v^0 = 1. \tag{5}$$

چاربردار ِ سرعت (u) را چنین تعریف می‌کنیم

$$u := \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \tag{6}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$u = \gamma\, v, \tag{7}$$

که γ ضریب ِ لُرِنتس [b] است:

$$\gamma := \left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

مانسته یِ قانون ِ دوم ِ نیوتُن [c] با سه‌بردار ِ نیرو $(\mathbf{F})$ و سه‌بردار ِ تکانه $(\mathbf{p})$ نوشته می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}, \tag{9}$$

که

$$\begin{aligned} p &= m\, u, \\ &= m\,\gamma\, v. \end{aligned} \tag{10}$$

با تعریف ِ f به شکل ِ

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = f, \tag{11}$$

معلوم می‌شود

$$\mathbf{f} = \gamma\,\mathbf{F}, \tag{12}$$

و

$$f^0 = \gamma\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}}{c^2}. \tag{13}$$

برا یِ رسیدن به رابطه یِ اخیر از این استفاده شده که

$$u\cdot u = -c^2, \tag{14}$$

و در نتیجه

$$-\,c^2\,p^0\,\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}\tau} + \mathbf{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{15}$$

به f چاربردار ِ نیرو می‌گوییم.

1 شتاب ِ ثابت

شتاب ($\mathbf{a}$) مشتق ِ سرعت ($\mathbf{v}$) نسبت به زمان است:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{16}$$

نسبیت ِ خاص حرکت ِ یک ذره با جرم ِ حقیقی با شتاب ِ ثابت به مدت ِ نامحدود را ناممکن می‌کند، چون اگر حرکت با شتاب ِ ثابت انجام شود، سرانجام اندازه یِ سرعت ِ ذره از سرعت ِ نور بیش‌تر می‌شود. اما این که شتاب در چارچوب ِ سکون ِ آنی یِ ذره ای ثابت باشد اشکال ی ندارد. در واقع اگر عامل ِ سازنده یِ نیرو چنین باشد که نیرو یِ وارد بر ذره از دید ِ آزمایش‌گاه، در اثر ِ خیزاندن ِ ذره تغییر نکند، و به مکان هم بسته‌گی نداشته باشد، آن‌گاه نیرو یِ وارد بر ذره در چارچوب ِ سکون ِ آنی یِ آن ثابت خواهد بود. این بردار ِ ثابت را با $\mathbf{G}$ نمایش می‌دهیم. از این‌جا نتیجه می‌شود در لحظه ای که سرعت ِ ذره صفر است،

$$m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{G}. \tag{17}$$

برا ي ِ به‌دست‌آوردن ِ معادله ي ِ حرکت برا ي ِ سرعت‌ها ي ِ دل‌بخواه، کافی است معادله ي ِ بالا را بخیزانیم. برا ي ِ این کار اول معادله ي ِ بالا را بر حسب ِ ویژه‌زمان و چاربردار ِ سرعت می‌نویسیم. معلوم می‌شود در لحظه ای که سرعت ِ ذره صفر است،

$$m\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=G, \tag{18}$$

که

$$G^0=0. \tag{19}$$

حالا لحظه ای (t_0) را در نظر بگیرید که سرعت ِ ذره صفر نیست. u (چاربردار ِ سرعت ِ ذره) را می‌شود با یک خیز ِ لُرِنتس [b] به چاربردارِسرعت ِ u' مربوط کرد، که در t_0 متناظر با سرعت ِ صفر است:

$$u=\{\Lambda[\mathbf{v}(t_0)]\}\,u', \tag{20}$$

که

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu}{}_0(\mathbf{v})&=\gamma\,v^{\mu},\\
\Lambda^{0}{}_j(\mathbf{v})&=\gamma\,\frac{v_j}{c^2},\\
\Lambda^{i}{}_j(\mathbf{v})&=\delta^{i}{}_j+(\gamma-1)\,\frac{v^i\,v_j}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}.
\end{aligned} \tag{21}$$

از معادله ي ِ (18) که برا ي ِ لحظه ي ِ سکون ِ ذره نوشته شده معلوم می‌شود در زمان ِ t_0،

$$m\,\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}\tau}=G, \tag{22}$$

که در آن از این استفاده شده که تغییرات ِ ویژه‌زمان، در اثر ِ خیز عوض نمی‌شود. این رابطه را با $\Lambda[\mathbf{v}(t_0)]$ می‌خیزانیم. نتیجه می‌شود

$$m\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=[\Lambda(\mathbf{v})]\,G, \tag{23}$$

که در آن از این استفاده شده که رابطه ي ِ حاصل برا ي ِ همه ي ِ زمان‌ها ي ِ t_0 درست است. به این ترتیب،

$$f = [\Lambda(\mathbf{v})]\, G. \tag{24}$$

بخش ـِ فضایی یِ (23) می‌شود

$$m\,\frac{\mathrm{d}(\gamma\,\mathbf{v})}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{G} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{G}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}. \tag{25}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود $\mathbf{a}$ یک ترکیب ـِ خطی از $\mathbf{v}$ و $\mathbf{G}$ است. چون $\mathbf{G}$ ثابت است، نتیجه می‌شود $\mathbf{v}$ در یک صفحه یِ ثابت می‌ماند، صفحه ای که شامل ـِ $\mathbf{v}_0$ (سرعت ـِ اولیه) و $\mathbf{G}$ است.

2 جواب ـِ معادله یِ حرکت

محورها یِ 1 و 2 و 3 را متعامد و راست‌گرد می‌گیریم، چنان که محور ـِ 1 در جهت ـِ $\mathbf{G}$ و صفحه یِ شامل ـِ محورها یِ 1 و 2 همان صفحه یِ شامل ـِ $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{G}$ باشد. در این صورت بردار ـِ سرعت در صفحه یِ شامل ـِ محورها یِ 1 و 2 است و با دو پارامتر مشخص می‌شود: α (پارامتر ـِ تندی) با تعریف ـِ

$$\alpha := \tanh^{-1}\frac{|\mathbf{v}|}{c}, \tag{26}$$

و θ که دوران به اندازه یِ آن حول ـِ محور ـِ 3 جهت ـِ محور ـِ 1 را به جهت ـِ بردار ـِ سرعت تبدیل می‌کند:

$$\hat{\mathbf{v}} = [R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)]\,\hat{\mathbf{e}}_1. \tag{27}$$

$\hat{\mathbf{e}}_i$ بردار ـِ یکه در جهت ـِ محور ـِ i، و $R(\theta\,\hat{\mathbf{n}})$ دوران به اندازه یِ θ حول ـِ محور ـِ $\hat{\mathbf{n}}$ است. به این ترتیب،

$$\Lambda(\mathbf{v}) = [R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)]\,[\Lambda(|\mathbf{v}|\,\hat{\mathbf{e}}_1)]\,[R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)]^{-1}. \tag{28}$$

داریم

$$R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3) = \exp(\theta\,J_3), \tag{29}$$

و

$$\Lambda(|\mathbf{v}|\,\hat{\mathbf{e}}_1) = \exp(\alpha\,\tilde{K}_1), \tag{30}$$

که

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

و

$$\tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

با تعریف ِ چاربردار ِ w به شکل ِ

$$w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

داریم،

$$\begin{aligned} u &= [\Lambda(\mathbf{v})]\,w \\ &= [R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)]\,[\Lambda(|\mathbf{v}|\,\hat{\mathbf{e}}_1)]\,[R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)]^{-1}\,w, \\ &= [R(\theta\,\hat{\mathbf{e}}_3)]\,[\Lambda(|\mathbf{v}|\,\hat{\mathbf{e}}_1)]\,w. \end{aligned} \tag{34}$$

به این ترتیب معادله ي (23) می‌شود

$$\begin{aligned} &m\,[\exp(-\alpha\,\tilde{K}_1)]\;\;[\exp(-\theta\,J_3)] \\ &\qquad\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\{[\exp(\theta\,J_3)]\,[\exp(\alpha\,\tilde{K}_1)]\}\,w = [\exp(-\theta\,J_3)]\,G, \end{aligned} \tag{35}$$

یا

$$m\left\{\tilde{K}_1\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau} + [\exp(-\alpha\,\tilde{K}_1)]\,J_3\,[\exp(\alpha\,\tilde{K}_1)]\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right\}\,w = [\exp(-\theta\,J_3)]\,G. \tag{36}$$

طرف ِ چپ ساده می‌شود و می‌رسیم به

$$m \left\{ \tilde{K}_1 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau} + [J_3 \cosh\alpha + \tilde{K}_2 \sinh\alpha] \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} \right\} w = [\exp(-\theta J_3)]\, G, \tag{37}$$

که

$$\tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

با توجه به انتخاب ِ محورها،

$$G = |\mathbf{G}| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

به این ترتیب معادله ي (37) می‌شود این دومعادله ي دیفرانسیل ِ جفت‌شده

$$m\, c \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau} = |\mathbf{G}| \cos\theta, \tag{40}$$

$$m\, c \sinh\alpha \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = -|\mathbf{G}| \sin\theta. \tag{41}$$

از (41) معلوم می‌شود با گذشت ِ زمان زاویه ي $\mathbf{v}$ با $\mathbf{G}$ کوچک می‌شود. (40) هم نشان می‌دهد با گذشت ِ زمان، اگر θ حاده باشد تندی زیاد و اگر θ منفرجه باشد تندی کم می‌شود. البته θ اگر منفرجه باشد هم با گذشت ِ زمان حاده می‌شود. پس سرانجام تندی زیاد می‌شود و به بی‌نهایت می‌گراید.

برا يِ حل ِ این معادله‌ها، می‌شود τ را حذف کرد و به این معادله رسید.

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} = -\sinh\alpha \cot\theta, \tag{42}$$

که یک معادله ي جداشدنی است و جواب َ ش می‌شود

$$\tanh\frac{\alpha}{2} \sin\theta = \tanh\frac{\alpha_0}{2} \sin\theta_0, \tag{43}$$

که شاخص ِ 0 نشان‌دهنده ي حالت ِ آغازین است. از جمله معلوم می‌شود در حد ِ تندی به بی‌نهایت زاویه صفر نمی‌شود بل‌که به مقدار ِ θ_∞ می‌گراید:

$$\sin\theta_\infty = \tanh\frac{\alpha_0}{2}\,\sin\theta_0. \tag{44}$$

به این ترتیب (43) می‌شود

$$\tanh\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\theta_\infty}{\sin\theta}. \tag{45}$$

با استفاده از این می‌شود (41) را بر حسب ِ فقط θ نوشت. داریم

$$\begin{aligned}\sinh\alpha &= \frac{2\,\tanh(\alpha/2)}{1-\tanh^2(\alpha/2)},\\ &= \frac{2\,\sin\theta_\infty\,\sin\theta}{\sin^2\theta-\sin^2\theta_\infty},\end{aligned} \tag{46}$$

و از آن‌جا،

$$m\,c\,\frac{2\,\sin\theta_\infty}{\sin^2\theta-\sin^2\theta_\infty}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = -|\mathbf{G}|. \tag{47}$$

بر حسب ِ متغیر ِ ζ با تعریف ِ

$$\zeta := \frac{\tan\theta_\infty}{\tan\theta}, \tag{48}$$

این معادله می‌شود

$$m\,c\,\frac{2}{1-\zeta^2}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau} = |\mathbf{G}|\,\cos\theta_\infty, \tag{49}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\tanh^{-1}\zeta = \frac{|\mathbf{G}|\,\cos\theta_\infty}{2\,m\,c}\,\tau + \tanh^{-1}\zeta_0. \tag{50}$$

این رابطه هم‌راه با تعریف ِ (48) مقدار ِ θ را بر حسب ِ τ می‌دهد. با استفاده از آن و با رابطه ي ِ (45)، مقدار ِ α هم بر حسب ِ زمان به دست می آید. با استفاده از

$$\gamma = \cosh\alpha, \tag{51}$$

و

$$\cosh\alpha = \frac{1+\tanh^2(\alpha/2)}{1-\tanh^2(\alpha/2)}, \tag{52}$$

می‌شود همه چیز را بر حسب ِ γ و θ نوشت. خلاصه ی ِ این‌ها می‌شود

$$\sin\theta_\infty := \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}}\,\sin\theta_0, \tag{53}$$

$$\xi := \frac{|\mathbf{G}|\,\cos\theta_\infty}{2\,m\,c}\,\tau, \tag{54}$$

$$\cot\theta = \cot\theta_\infty\,\frac{\cot\theta_0 + \cot\theta_\infty\,\tanh\xi}{\cot\theta_\infty + \cot\theta_0\,\tanh\xi}, \tag{55}$$

$$\gamma = \frac{\sin^2\theta + \sin^2\theta_\infty}{\sin^2\theta - \sin^2\theta_\infty}. \tag{56}$$

3 اسم‌ها ی ِ خاص

[a] Poincaré

[b] Lorentz

[c] Newton