X1-051 (2008/04/29)

پیش‌روی ِ تامِس

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تحول ِ نسبیتی ِ اسپین ِ یک ذره بررسی می‌شود.

0 قراردادها

منظور از جرم جرم ِ سکون است،

$$r^0 := t, \tag{1}$$

و

$$\eta_{\mu\,\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{2}$$

که r^μ ها مئلفه‌ها ی ِ چاربردار ِ مکان اند، و t زمان و η متریک (ِ مینکُسکی [a]) است. بردارها ی ِ سه‌مئلفه‌ای (با مئلفه‌ها ی ِ فضایی) را با حروف ِ سیاه نمایش می‌دهیم. ویژه‌زمان را با τ نمایش می‌دهیم. شاخص‌ها یی که مقدارها ی ِ فضازمانی (از 0 تا 3) را می‌گیرند را با حروف ِ یونانی و شاخص‌ها یی که فقط مقدارها ی ِ فضایی (از 1 تا 3) را می‌گیرند را با حروف ِ لاتین نمایش می‌دهیم. متناظر با سرعت ِ $\mathbf{v}$،

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

یک کمیت ـِ چهارمئلفه‌ای (v) ساخته می‌شود

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}r^\mu}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$v^0 = 1. \tag{5}$$

چاربردار ـِ سرعت (u) را چنین تعریف می‌کنیم

$$u := \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \tag{6}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$u = \gamma\, v, \tag{7}$$

که γ ضریب ـِ لُرِنتس [b] است:

$$\gamma := \left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

مانسته یِ قانون ـِ دوم ـِ نیوتُن [c]

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = f \tag{9}$$

است، که f چاربردار ـِ نیرو است و

$$\begin{aligned} p &= m\, u, \\ &= m\, \gamma\, v. \end{aligned} \tag{10}$$

F تانسور ـِ شدت ـِ میدان است، تانسور ی پادمتقارن که مئلفه‌ها یِ آن

$$\begin{aligned} F_{i\,0} &= E_i, \\ F_{i\,j} &= \varepsilon^k{}_{i\,j}\, B_k \end{aligned} \tag{11}$$

است. $\mathbf{E}$ میدان ـِ الکتریکی، $\mathbf{B}$ میدان ـِ مغناطیسی، و ε تانسور ـِ لِوی‌ـ چیویتا [d] است.

1 گشت‌آور و اسپین

برا یِ یک ذره یِ ساکن، تکانه یِ زاویه‌ای یک بردار ِ سه‌مئلفه‌ای است که آن را با $\mathbf{s}$ نمایش می‌دهیم. به $\mathbf{s}$ اسپین ِ (تکانه یِ زاویه‌ای یِ ذاتی یِ) ذره می‌گوییم. مشتق ِ زمانی یِ این بردار (لحظه ای که ذره ساکن است) چنین است.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{T}, \tag{12}$$

که $\mathbf{T}$ گشت‌آور ِ وارد بر ذره (یِ ساکن) است. از اسپین ِ ذره یک چاربردار می‌سازیم. به این شکل که برا یِ ذره یِ ساکن تعریف می‌کنیم

$$s^0 := 0, \tag{13}$$

و برا یِ ذره ای که با سرعت ِ $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند،

$$S := [\Lambda(\mathbf{v})]\, s, \tag{14}$$

که $\Lambda(\mathbf{v})$ خیزِلُرِنتس [b]ِ متناظر با سرعت ِ $\mathbf{v}$ است، و s چاربردار ِ اسپین ِ ذره یِ ساکن ی است که اگر این ذره را با سرعت ِ $\mathbf{v}$ بخیزانیم به ذره یِ موردِنظر می‌رسیم.

از (13) و (14) دیده می‌شود برا یِ یک ذره یِ ساکن

$$u \cdot S = 0. \tag{15}$$

با توجه به تعریف ِ S، ضمناً دیده می‌شود (15) با خیزاندن هم تغییر نمی‌کند. پس (15) برا یِ همه یِ ذره‌ها درست است. به این ترتیب چاربردار ِ اسپین هم مثل ِ چاربردار ِ سرعت سه مئلفه یِ مستقل دارد:

$$S^0 = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{S}}{c^2}. \tag{16}$$

این رابطه یا هم‌ارز با آن (15)، بر مشتق ِ S یک قید می‌گذارد:

$$u \cdot \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\cdot S = 0. \tag{17}$$

با استفاده از این قید، می‌شود رابطه یِ (12) را به شکل ِ چاربرداری نوشت. برا یِ این کار (12) را به این شکل می‌نویسیم.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = T + \xi\, u, \tag{18}$$

که T چاربردار ی است که بخش ِ فضایی ِ آن $\mathbf{T}$ است. ξ باید چنان باشد که (17) برقرار شود. برا ِی به‌دست‌آوردن ِ ξ، ابتدا (18) را برا ِی یک ذره ِی دل‌بخواه (نَه لزوماً ساکن) می‌نویسیم. با توجه به این که برا ِی یک ذره ِی ساکن t همان τ است، نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = T + \xi\, u. \tag{19}$$

به این ترتیب، (17) می‌شود

$$u \cdot T - \xi\, c^2 + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \cdot S = 0, \tag{20}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\xi = \frac{1}{c^2}\left(u \cdot T + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} \cdot S\right), \tag{21}$$

و (19) می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau} = T + u\,\frac{1}{c^2}\left(u \cdot T + \frac{1}{m}\, f \cdot S\right), \tag{22}$$

که در آن (9) و (10) به کار رفته است. توجه داریم که

$$f \cdot u = 0. \tag{23}$$

رابطه ِی (22) به ازا ِی هر چاربردار ِ دل‌بخواه ِ T شرط ِ (17) را بر می‌آورَد. البته می‌شود دید که فقط سه مئلفه ِی T در مشتق ِ S وارد می‌شوند. در واقع اگر

$$T' = T + \zeta\, u, \tag{24}$$

که ζ یک اسکالر ِ دل‌بخواه است، آن‌گاه طرف ِ راست ِ (22) در اثر ِ تبدیل ِ T به T' تغییر نمی‌کند. از جمله می‌شود T را چنان گرفت که u بر آن عمود شود. به این معنی گشت‌آور هم فقط سه مئلفه ِی مستقل دارد. این مطالب را می‌شود در مثلاً [1] یافت.

رابطه ِی (22) تحول ِ چاربردار ِ اسپین را می‌دهد، که فقط سه مئلفه ِی مستقل دارد. می‌شود این رابطه را به شکل ِی نوشت که در آن مستقیماً تحول ِ بردار ِ سه‌مئلفه‌ای ِی اسپین وارد شود. برا ِی این کار (14) را به کار می‌بریم. نتیجه می‌شود

$$[\Lambda(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\,s=T+u\,\frac{1}{c^2}\,\left(u\cdot T+\frac{1}{m}\,f\cdot S\right),\tag{25}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}=T_{\mathrm{r}}+u_{\mathrm{r}}\,\frac{1}{c^2}\,\left(u_{\mathrm{r}}\cdot T_{\mathrm{r}}+\frac{1}{m}\,f_{\mathrm{r}}\cdot S_{\mathrm{r}}\right)-[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\,s,\tag{26}$$

که در آن به ازا یِ چاربردار ِ دل‌بخواه ِ X، چاربردار ِ X_{r} به این شکل تعریف شده است.

$$X=:[\Lambda(\mathbf{v})]\,X_{\mathrm{r}}.\tag{27}$$

در رسیدن به (26) از این استفاده شده که با خیزاندن ِ دو چاربردار، حاصلِ‌ضرب ِ درونی یِ آن‌ها تغییر نمی‌کند.

بخش ِ فضایی یِ (26) می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}\tau}=\mathbf{T}_{\mathrm{r}}-[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{s}.\tag{28}$$

$\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ گشت‌آور ِ وارد بر یک ذره یِ مشابه در سکون است. رابطه یِ بالا نشان می‌دهد مشتق ِ اسپین نسبت به ویژه‌زمان (زمان ِ چارچوب ِ سکون ِ آنی) علاوه بر این گشت‌آور یک جمله یِ دیگر هم دارد، که ناشی از شتاب ِ ذره است.

داریم

$$\begin{aligned}
\Lambda^0{}_0(\mathbf{v})&=\gamma,\\
\Lambda^0{}_j(\mathbf{v})&=\frac{\gamma\,v_j}{c^2},\\
\Lambda^i{}_0(\mathbf{v})&=\gamma\,v^i,\\
\Lambda^i{}_j(\mathbf{v})&=\delta^i_j+\frac{(\gamma-1)\,v^i\,v_j}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}},\\
&=\delta^i_j+\frac{\gamma^2\,v^i\,v_j}{c^2\,(\gamma+1)},
\end{aligned}\tag{29}$$

و $\Lambda^{-1}(\mathbf{v})$ هم $\Lambda(-\mathbf{v})$ است. از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود

$$\left\{[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\right\}^{0}{}_{0}=0,$$

$$\left\{[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\right\}^{0}{}_{j}=\frac{1}{c^2}\,\left[\gamma\,\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}\tau}+\frac{v_j}{\gamma+1}\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau}\right],$$

$$\left\{[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\right\}^{i}{}_{0}=\gamma\,\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}\tau}+\frac{v^i}{\gamma+1}\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau},$$

$$\left\{[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]\,\frac{\mathrm{d}[\Lambda(\mathbf{v})]}{\mathrm{d}\tau}\right\}^{i}{}_{j}=\frac{\gamma^2}{c^2\,(\gamma+1)}\,\left(\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}\tau}\,v_j-v^i\,\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}\tau}\right). \tag{30}$$

در (28) فقط آخرین رابطه وارد می‌شود. با گذاشتن ِ آن در (28) نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\gamma}\,\mathbf{T}_{\mathrm{r}}+\mathbf{T}_{\mathrm{T}}, \tag{31}$$

که

$$\mathbf{T}_{\mathrm{T}}=-\frac{\gamma^2}{c^2\,(\gamma+1)}\,\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{s}-\mathbf{v}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{s}\right),$$

$$=-\mathbf{s}\times\left[\frac{\gamma^2}{c^2\,(\gamma+1)}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{v}\right]. \tag{32}$$

حتا اگر $\mathbf{T}_{\mathrm{r}}$ صفر باشد، $\mathbf{T}_{\mathrm{T}}$ باعث ِ چرخش ِ (پیش‌روی یِ) اسپین می‌شود. به $\mathbf{T}_{\mathrm{T}}$ گشت‌آور ِ تامِس [e]، و به پیش‌روی یِ حاصل از آن پیش‌روی یِ تامِس [e] می‌گوییم. دیده می‌شود وجود ِ این گشت‌آور یک پدیده یِ نسبیتی است، به این معنی که اگر c به بی‌نهایت بگراید، این گشت‌آور صفر می‌شود.

2 نیرو و گشت‌آور ِ الکترومغناطیسی

یک ذره یِ باردار با جرم ِ m و بار ِ q را در نظر بگیرید که اسپین ِ آن در حالت ِ سکون $\mathbf{s}$ است. دوقطبی یِ مغناطیسی یِ این ذره در حالت ِ سکون می‌شود

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{g}{2\,m}\,\mathbf{s}, \tag{33}$$

که g نسبتِ ژیرومغناطیسی یِ ذره است. گشت‌آورِ وارد بر این ذره، در حالتِ سکون می‌شود

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B},$$

$$= \frac{g\,q}{2\,m}\,\mathbf{s} \times \mathbf{B}, \tag{34}$$

یا

$$T^i = \frac{g\,q}{2\,m}\,F^i{}_j\,s^j, \tag{35}$$

که چون s^0 صفر است، می‌شود آن را نوشت

$$T^i = \frac{g\,q}{2\,m}\,F^i{}_\beta\,s^\beta. \tag{36}$$

از این‌جا چاربردارِ گشت‌آور را چنین تعریف می‌کنیم.

$$T^\alpha = \frac{g\,q}{2\,m}\,F^\alpha{}_\beta\,S^\beta, \tag{37}$$

یا

$$T = \frac{g\,q}{2\,m}\,F\,S. \tag{38}$$

به این ترتیب،

$$T_\mathrm{r} = \frac{g\,q}{2\,m}\,F_\mathrm{r}\,S_\mathrm{r}, \tag{39}$$

که

$$F =: [\Lambda(\mathbf{v})]\,F_\mathrm{r}\,[\Lambda^{-1}(\mathbf{v})]. \tag{40}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود

$$\mathbf{T}_\mathrm{r} = \frac{g\,q}{2\,m}\,\mathbf{s} \times \mathbf{B}_\mathrm{r}, \tag{41}$$

که $\mathbf{E}_\mathrm{r}$ و $\mathbf{B}_\mathrm{r}$ مثلِ (11) به دست می‌آیند، اما با F_r به جا یِ F. $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بخش‌ها یِ فضایی یِ دو چاربردار نیستند، بل که مئلفه‌ها یِ تانسورِ پادمتقارنِ F اند. به همین خاطر مثلاً رابطه یِ $\mathbf{B}_\mathrm{r}$ با $\mathbf{B}$ شبیهِ رابطه یِ $\mathbf{T}_\mathrm{r}$ با $\mathbf{T}$ نیست. در واقع داریم

$$\mathbf{B}_{\mathrm{r}} = \mathbf{B} + \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)\,c^2}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v} + \frac{\gamma}{c^2}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{v}),$$

$$= \frac{\gamma}{c^2}\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v} + \mathbf{B} - \frac{\gamma}{(\gamma+1)\,c^2}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v}. \tag{42}$$

این را در (41) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\mathbf{T}_{\mathrm{r}} = \frac{g\,q}{2\,m}\,\mathbf{s}\times\left[\frac{\gamma}{c^2}\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v} + \mathbf{B} - \frac{\gamma}{(\gamma+1)\,c^2}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v}\right]. \tag{43}$$

چاربردار ِ نیرو ي ِ وارد بر این ذره هم

$$f = q\,F\,u \tag{44}$$

است، که در واقع همان نیرو ي ِ لُرِنتس [b] را می‌دهد:

$$\frac{\mathrm{d}\,(\gamma\,\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{45}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\gamma\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{v} = \frac{q}{m}\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v}. \tag{46}$$

از این‌جا (32) می‌شود

$$\mathbf{T}_{\mathrm{T}} = -\frac{\gamma\,q}{c^2\,(\gamma+1)\,m}\,\mathbf{s}\times[(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v}]. \tag{47}$$

این رابطه و (43) را در (31) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{2\,m}\,\mathbf{s}\times\left\{\frac{1}{c^2}\,\left[\left(g - \frac{2\,\gamma}{\gamma+1}\right)\,(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{v} - \frac{g}{\gamma+1}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\times\mathbf{v}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{g}{\gamma}\,\mathbf{B}\right\}. \tag{48}$$

در حد ِ غیرِنسبیتی، جمله ي اول ِ درون ِ آکلاد صفر می‌شود و جمله ي دوم هم همان گشت‌آور ِ معمول ی را می‌دهد که یک میدان ِ مغناطیسی به یک دوقطبی ِ مغناطیسی

وارد می‌کند. البته وقت ی میدان ـِ مغناطیسی نداشته باشیم این جمله صفر است. وقت ی میدان ـِ مغناطیسی نباشد، (48) می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \left(g - \frac{2\,\gamma}{\gamma + 1}\right)\, \frac{q}{2\,m\,c^2}\,\mathbf{s}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{v}). \tag{49}$$

این یک تصحیح ـِ نسبیتی بر گشت‌آور ـِ وارد بر یک دوقطبی یِ مغناطیسی است. معلوم می‌شود میدان ـِ الکتریکی هم بر یک دوقطبی یِ مغناطیسی یِ متحرک گشت‌آور وارد می‌کند. از جمله، حد ـِ عبارت ـِ بالا در سرعت‌ها یِ کم و زیاد چنین است.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = (g-1)\,\frac{q}{2\,m\,c^2}\,\mathbf{s}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{v}), \qquad |\mathbf{v}| \ll c, \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = (g-2)\,\frac{q}{2\,m\,c^2}\,\mathbf{s}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{v}), \qquad |\mathbf{v}| \approx c. \tag{51}$$

در حد ـِ غیرِنسبیتی (سرعت‌ها یِ کم) می‌شود همیلتنی یِ یک اسپین در یک میدان ـِ الکتریکی را به شکل ـِ همیلتنی یِ یک اسپین در یک میدان ـِ مغناطیسی نوشت، به شرط ـِ این که به جا یِ میدان ـِ مغناطیسی میدان ـِ مغناطیسی در چارچوب ـِ سکون ـِ اسپین و به جا یِ g مقدار ـِ $(g-1)$ را بگذاریم. در حد ـِ فرانسبیتی (سرعت‌ها یِ نزدیک به سرعت ـِ نور) گشت‌آور ـِ ناشی از میدان ـِ الکتریکی با $(g-2)$ متناسب است. برا یِ یک ذره یِ باردار ـِ بی‌ساختار ـِ اسپین‌یک‌دوم (مثل ـِ الکترون) g نزدیک به 2 است. در واقع آن چه از معادله یِ دیرَک [f] به دست می‌آید g دقیقاً برابر با 2 است، اما به خاطر ـِ تصحیح‌ها یِ تابشی مقدار ـِ g اندک ی از 2 منحرف می‌شود [2]. به این ترتیب، در حد ـِ غیرِنسبیتی g عملاً نصف می‌شود، چون $(g-2)$ تقریباً نصف ـِ g است. در حد ـِ فرانسبیتی هم با سنجش ـِ گشت‌آور ـِ وارد بر اسپین در یک میدان ـِ الکتریکی یِ خارجی می‌شود انحراف ـِ g از 2 را دقیقاً سنجید.

3 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 11

[2] Claude Itzykson & Jean-Bernard Zuber; “Quantum field theory (McGraw-Hill, 1988) chapter 7

4 اسم‌ها ی ِ خاص

[a] Poincaré

[b] Lorentz

[c] Newton

[d] Levi-Civita

[e] Thomas

[f] Dirac