X1-052 (2008/05/29)

امواج ـِ سطحی یِ مایع‌ها

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

امواج ـِ سطحی یِ مایع‌ها ناشی از گرانش و کشش ـِ سطحی اند. این امواج و پاشیده‌گی یِ آن‌ها بررسی می‌شود.

0 مقدمه

یک مایع با چگالی یِ ρ و کشش ـِ سطحی یِ τ را در نظر بگیرید که در یک میدان ـِ گرانشی یِ یک‌نواخت با شتاب ـِ g است. در حالت ـِ تعادل سطح ـِ بالایی یِ این مایع افقی است. اگر سطح ـِ آزاد از حالت ـِ افقی خارج شود، نیروها یِ بازدارنده ای به مایع وارد می‌شود که ناشی از گرانش و کشش ـِ سطحی اند. به این ترتیب سطح ـِ آزاد ـِ مایع حول ـِ حالت ـِ تعادل نوسان می‌کند. اگر عمق ـِ مایع یک‌نواخت و دامنه یِ نوسان‌ها کم باشد (سیستم خطی و مستقل از مکان باشد) سیستم جواب‌ها یی به شکل ـِ موج ـِ تخت هم داریم که هدف محاسبه یِ شکل ـِ این جواب‌ها (به ویژه رابطه یِ بس‌آمد و عدد ـِ موج برا یِ آن‌ها، یعنی معادله یِ پاشنده‌گی) است. برا یِ این کار می‌شود انرژی یِ پتانسیل و انرژی یِ جنبشی یِ متناظر با یک طولِ‌موج را حساب کرد. از نسبت ـِ این‌ها بس‌آمد (و در واقع معادله یِ پاشنده‌گی) به دست می‌آید.

در ادامه یِ کار (x, y, z) مختصات ـِ دِکَرتی اند، و محور ـِ z عمودی و روبه بالا است.

عمق ِ مایع را با h نشان می‌دهیم و سطح ِ مایع در حالت ِ تعادل را $z = 0$ می‌گیریم. ارتفاع ِ سطح ِ آزاد ِ مایع را با ψ نشان می‌دهیم، که تابع ِ x و y و t (زمان) است. بردار ِ دوبُعدی یِ $\mathbf{s}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{s} := \hat{\mathbf{x}}\, x + \hat{\mathbf{y}}\, y, \tag{1}$$

به این ترتیب ψ تابع ِ $\mathbf{s}$ و t است. برا یِ یک موج ِ تخت با بس‌آمد ِ زاویه‌ای یِ ω و بردارِموج ِ $\mathbf{k}$ داریم

$$\psi = \Psi\, \cos(-\omega\, t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}). \tag{2}$$

در کل ِ این متن، منظور از ∇ هم مشتق نسبت به $\mathbf{s}$ است.

1 انرژی یِ پتانسیل

U_{g} (انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی نسبت به حالت ِ تعادل) می‌شود

$$U_{\mathrm{g}} = \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\; \rho\, g\, \psi\, \left(\frac{1}{2}\, \psi\right). \tag{3}$$

با جاگذاری یِ (2) در این رابطه نتیجه می‌شود

$$\tilde{U}_{\mathrm{g}} = \frac{1}{4}\, \rho\, g\, \Psi^2, \tag{4}$$

که $\tilde{U}_{\mathrm{g}}$ میان‌گین ِ انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی بر مساحت است.

انرژی یِ پتانسیل ِ سطحی برابر است با حاصلِ‌ضرب ِ مساحت در کشش ِ سطحی. داریم

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + \nabla\psi \cdot \nabla\psi}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \tag{5}$$

که $\mathrm{d}A$ دیفرانسیل ِ مساحت است. به این ترتیب U_{t} (انرژی یِ پتانسیل ِ سطحی نسبت به حالت ِ تعادل) می‌شود

$$U_{\mathrm{t}} = \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\; \tau\, (\sqrt{1 + \nabla\psi \cdot \nabla\psi} - 1), \tag{6}$$

که برا یِ انحراف‌ها یِ کوچک می‌شود

$$U_{\rm t} = \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ \frac{1}{2}\,\tau\,\nabla\psi\cdot\nabla\psi. \tag{7}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\tilde{U}_{\rm t} = \frac{1}{4}\,\tau\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\,\Psi^2, \tag{8}$$

که $\tilde{U}_{\rm t}$ میان‌گین ِ انرژی ِ پتانسیل ِ سطحی بر مساحت است.

2 انرژی ِ جنبشی

برا ی ِ محاسبه ی ِ انرژی ی ِ جنبشی باید $\mathbf{v}$ (سرعت ِ مایع) در همه جا را بدانیم. مایع را تراکم‌ناپذیر می‌گیریم. در این صورت دیورژانس ِ سرعت صفر می‌شود:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \nabla\cdot\mathbf{v}_{\rm h} = 0, \tag{9}$$

که $\mathbf{v}_{\rm h}$ مئلفه ی ِ افقی ی ِ سرعت است. جریان را ناچرخشی می‌گیریم. نتیجه می‌شود سرعت مشتق ِ یک پتانسیل (ϕ) است:

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$\mathbf{v}_{\rm h} = \nabla\phi, \tag{10}$$

و با گذاشتن ِ این‌ها در (9)،

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nabla^2\phi = 0. \tag{11}$$

به این معادله باید شرایط ِ مرزی در سطح ($z=\psi$) و کف ($z=-h$) را هم اضافه کرد. در سطح، شرط ِ مرزی می‌شود

$$(v_z - \mathbf{v}_{\rm h}\cdot\nabla\psi)(\mathbf{s}, z=\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{12}$$

که به این ترتیب به دست می‌آید که از معادله ی ِ سطح نسبت به زمان مشتق بگیریم و به جا ی ِ مشتق ِ زمانی ی ِ مکان سرعت بگذاریم. البته این معادله رو ی ِ سطح برقرار است.

اما تا مرتبه یِ یک نسبت به ψ می‌شود در آن z را صفر گذاشت، چون خود ِ مئلفه‌ها یِ سرعت نسبت به ψ (در واقع نسبت به مشتق ِ زمانی یِ ψ) از مرتبه یِ یک اند. ضمناً جمله یِ دوم ِ پرانتز هم تا این مرتبه صفر است. به این ترتیب (12) تا مرتبه یِ یک می‌شود

$$v_z(\mathbf{s}, z=0) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{s}) = 0. \tag{13}$$

شرط ِ مرزی در کف هم می‌شود

$$v_z(\mathbf{s}, z=-h) = 0. \tag{14}$$

این‌ها را می‌شود بر حسب ِ پتانسیل ِ ϕ نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z=0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(z=-h) = 0. \tag{16}$$

هدف حل ِ معادله یِ (12) با شرایط ِ مرزی یِ (15) و (16) است. برا یِ ϕ جواب ی به شکل ِ

$$\phi(\mathbf{s}, z, t) = \Phi(z)\, \sin(-\omega\, t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{s}) \tag{17}$$

در نظر می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}z^2} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\,\Phi = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}(z=0) = \omega\,\Psi, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}(z=-h) = 0. \tag{20}$$

جواب ِ این‌ها

$$\Phi(z) = \frac{\cosh[k\,(z+h)]}{k\,\sinh(k\,h)}\,\omega\,\Psi \tag{21}$$

است، که

$$k := \sqrt{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}. \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left\{\frac{\cosh[k\,(z+h)]}{\sinh(k\,h)}\right\}^2 \sin^2(-\omega\,t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{s})\,\omega^2\,\Psi^2 + \left\{\frac{\sinh[k\,(z+h)]}{\sinh(k\,h)}\right\}^2 \cos^2(-\omega\,t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{s})\,\omega^2\,\Psi^2, \tag{23}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \frac{1}{4}\,\rho\,\omega^2\,\Psi^2\,\int_{-h}^{0}\mathrm{d}z\;\frac{\cosh^2[k\,(z+h)]+\sinh^2[k\,(z+h)]}{\sinh(k\,h)},\\ &= \frac{1}{4}\,\rho\,\frac{\coth(k\,h)}{k}\,\omega^2\,\Psi^2,\end{aligned} \tag{24}$$

که $\tilde{K}$ میان‌گین ِ انرژی ِ جنبشی بر مساحت است.

3 رابطه ی ِ پاشنده‌گی

رابطه‌ها ی ِ (4)، (8)، و (24) انرژی ِ پتانسیل و انرژی ِ جنبشی را می‌دهند. با این‌ها می‌شود بس‌آمد ِ طبیعی ِ حرکت ی متناظر با بردارِموج ِ $\mathbf{k}$ را حساب کرد:

$$\omega^2 = \frac{k\,\tanh(k\,h)}{\rho}\,(\rho\,g+\tau\,k^2). \tag{25}$$

این معادله ی ِ پاشنده‌گی (رابطه ی ِ بس‌آمد با عدد ِ موج) است. دیده می‌شود در طولِ‌موج‌ها ی ِ کوتاه کشش ِ سطحی مهم است و در طولِ‌موج‌ها ی ِ بلند گرانش. طول ِ مشخصه ی ِ تعیین‌کننده ی ِ این تغییرِرفتار

$$L = \sqrt{\frac{\tau}{\rho\,g}} \tag{26}$$

است. عمق ِ مایع هم یک پارامترِطول ِ دیگر است. بسته به این که L کوچک‌تر باشد یا h، رابطه ی ِ پاشنده‌گی در این حالت‌ها ساده‌تر می‌شود. در حالت ی که $L \ll h$،

$$\omega^2 = (g\,h)\,k^2, \qquad (h\,k) \ll 1 \tag{27}$$

$$\omega^2 = g\,k, \qquad (L\,k) \ll 1 \ll (h\,k) \tag{28}$$

$$\omega^2 = \frac{\tau}{\rho}\,k^3, \qquad 1 \ll (L\,k). \tag{29}$$

در حالت ی که $h \ll L$،

$$\omega^2 = (g\,h)\,k^2, \qquad (L\,k) \ll 1 \tag{30}$$

$$\omega^2 = \frac{\tau\,h}{\rho}\,k^4, \qquad (h\,k) \ll 1 \ll (L\,k) \tag{31}$$

$$\omega^2 = \frac{\tau}{\rho}\,k^3, \qquad 1 \ll (h\,k). \tag{32}$$

دیده می‌شود در هردووضعیت در طولِ‌موج‌ها یِ بلند محیط ناپاشنده است، یعنی c (سرعت ِ موج) مستقل از بس‌آمد است:

$$c = \sqrt{g\,h}. \tag{33}$$

برا یِ آب در دما یِ اتاق داریم [1]

$$\rho = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},$$

$$\tau = 0.07\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}. \tag{34}$$

در سطح ِ زمین،

$$g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{35}$$

به این ترتیب،

$$L \approx 3\,\mathrm{mm}, \qquad (36)$$

که نشان می‌دهد برا یِ امواج ِ دریاها، رودها، و حتا جوی‌ها $h \ll L$ است.

4 مرجع

[1] "CRC handbook of chemistry and physics", 80th edition (The Chemical Rubber Company, 1999) (6-3)