X1-053 (2008/07/25)

اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی معرفی و با اصطکاک ِ لغزش‌ی مقایسه می‌شود.

0 مقدمه

یک گوی یا یک چرخ که رو یِ سطح ی افق‌ی حرکت می‌کن‌د، سرانجام می‌ایستد. این توقف ناشی از اصطکاک ِ لغزش‌ی نیست، چون وقت ی حرکت غلت‌ش ِ محض می‌شود باید نیرو یِ اصطکاک ِ لغزش‌ی صفر شود و سرعت و سرعت ِ زاویه‌ای یِ جسم ثابت ب‌مان‌ند. علت ِ کندشدن ِ حرکت این است که جا یِ تماس ِ جسم با سطح ِ زیرین ِ آن نقطه‌ای نیست و به هم‌ین خاطر گشت‌آور ِ نیرو یِ عمودبرسطح حول ِ مرکزِجرم لزومَن صفر نیست. به این پدیده اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی می‌گویند. اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی با فاصله یِ مرکزِجرم تا راستا یِ مئثر ِ نیرو یِ عمودبرسطح مشخص می‌شود. این پارامتر (δ) بُعد ِ طول دارد، بر خلاف ِ μ (ضریب ِ اصطکاک ِ لغزش‌ی) که بی‌بُعد است. مثل ِ اصطکاک ِ لغزش‌ی، این‌جا هم دو نوع اصطکاک تعریف می‌شود. اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی یِ ایستایی مربوط به زمان ی است که جسم نسبت به سطح ن‌می‌چرخ‌د. در این حالت δ معین نیست و از حد ِ معین ی ($\delta_{\rm s}$) بیش‌تر نیست. به $\delta_{\rm s}$ پارامتر ِ اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی یِ ایستایی می‌گوییم. اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی یِ جنب‌ش‌ی مربوط به زمان ی

است که جسم نسبت به سطح می‌چرخ‌د. در این حالت δ معین و برابر ِ δ_{k} است. به δ_{k} پارامتر ِ اصطکاک ِ غلتش‌ی ِ جنبش‌ی می‌گوییم. هردوشکل ِ اصطکاک ِ غلتش‌ی با چرخ‌ی‌دن ِ جسم نسبت به سطح مخالفت می‌کن‌ند، چنان که اصطکاک ِ لغزش‌ی با لغزش ِ جسم نسبت به سطح مخالفت می‌کن‌د.

1 حرکت ِ یک چرخ بر یک سطح ِ افق‌ی

چرخ ی را در نظر بگیرید که رو ی ِ یک سطح ِ افقی می‌غلت‌د. اگر این چرخ و سطح کاملَ‌ن صلب باش‌ند، نیرو ی ِ عمودبرسطح حول ِ مرکزِجرم ِ چرخ گشت‌آور ن‌دارد. نیرو ی ِ وزن هم هم‌ین طور. در این حالت اصطکاک صفر می‌شود و سرعت و سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ چرخ ثابت می‌مان‌ند. اما در واقع δ_{k} صفر نیست و نیرو ی ِ عمودبرسطح حول ِ مرکزِجرم گشت‌آور دارد. جرم ِ چرخ را با m، لخت‌ی ی ِ دوران‌ی ی ِ جسم حول ِ مرکزِجرم را با I، نیرو ی ِ عمودبرسطح را با N، و اصطکاک را با f نمایش می‌دهیم. از تعادل ِ نیروها در راستا ی ِ عمود بر سطح داریم

$$N = m\,g, \tag{1}$$

که g شتاب ِ گران‌ش است. قانون ِ دوم ِ نیوتُن [a] در راستا ی ِ افق‌ی می‌دهد

$$f = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

که v سرعت ِ چرخ و t زمان است. سرانجام، رابطه ی ِ گشت‌آور با تغییر ِ تکانه ی ِ زاویه‌ای می‌شود

$$-\,N\,\delta - f\,r = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \tag{3}$$

که r شعاع ِ چرخ و ω سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ آن است. چون چرخ می‌چرخ‌د، اصطکاک ِ غلتش‌ی از نوع ِ جنبش‌ی است. پس

$$\delta = \delta_{\mathrm{k}}. \tag{4}$$

شرط ِ غلتش این است که

$$v = \omega\,r. \tag{5}$$

$r_{\rm g}$ (شعاع ِ چرخ‌ش ِ چرخ) را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$I =: m\, r_{\rm g}^2. \tag{6}$$

به این ترتیب، از معادله‌ها یِ (1) تا (5) نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\delta_{\rm k}}{r}\, \frac{g}{1+(r_{\rm g}/r)^2}, \tag{7}$$

$$f = -\frac{\delta_{\rm k}}{r}\, \frac{m\, g}{1+(r_{\rm g}/r)^2}. \tag{8}$$

از جمله، از مقایسه یِ (1) با (8) معلوم می‌شود شرط ِ باقی‌ماندن ِ غلت‌ش این است که

$$\frac{\delta_{\rm k}}{r} \leq \left[1+\left(\frac{r_{\rm g}}{r}\right)^2\right]\, \mu_{\rm s}, \tag{9}$$

که $\mu_{\rm s}$ ضریب ِ اصطکاک ِ (لغزش‌ی یِ) ایستایی است.

دیده می‌شود برا یِ چرخ‌ها یِ با شکل ِ یک‌سان (که برا یِ آن‌ها نسبت ِ شعاع ِ چرخ‌ش به شعاع ثابت است) هر چه شعاع کوچک‌تر شود شتاب ِ کندکن‌نده بیش‌تر می‌شود. یعنی چرخ‌ها یِ کوچک‌تر زودتر می‌ایستند. لغزش هم در شعاع‌ها یِ کوچک رخ می‌دهد. در واقع پارامتر ِ بی‌بُعد ِ مئثر ی که از اصطکاک ِ غلتش‌ی وارد شده $(\delta_{\rm k}/r)$ است. در این حالت اصطکاک ِ غلتش‌ی است که شتاب ِ کندکن‌نده را تعیین می‌کند.

یک حالت ِ دیگر این است که چرخ نچرخد، یعنی سرعت ِ زاویه‌ای یَش صفر باشد. در این حالت اصطکاک ِ لغزش‌ی از نوع ِ جنبش‌ی، و اصطکاک ِ غلتش‌ی از نوع ِ ایستایی است. معادله‌ها یِ (1) تا (3) هنوز برقرار اند، اما به جا یِ (4) و (5) داریم

$$\omega = 0, \tag{10}$$

و

$$f = -\mu_{\rm k}\, N, \tag{11}$$

که $\mu_{\rm k}$ ضریب ِ اصطکاک ِ (لغزش‌ی یِ) جنبش‌ی است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu_{\rm k}\, g, \tag{12}$$

$$\delta = \mu_{\rm k}\, r. \tag{13}$$

رابطه ي (13) ضمناً نشان می‌دهد شرط ِ رخ‌دادن ِ این حالت آن است که

$$\frac{\delta_{\rm s}}{r} \geq \mu_{\rm k}. \tag{14}$$

به این ترتیب معلوم می‌شود این حالت (که چرخ نچرخد) در شعاع‌ها يِ کوچک رخ می‌دهد و اگر رخ داد شتاب ِ کندکن‌نده را اصطکاک ِ لغزش‌ی تعیین می‌کند.

سرانجام، اگر هردونوع ِ اصطکاک جنبش‌ی باش‌ند، (4) و (11) برقرار اند. البته فرض شده

$$\omega > 0, \tag{15}$$

و

$$v - \omega\, r > 0. \tag{16}$$

در این صورت،

$$\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = -\mu_{\rm k}\, g, \tag{17}$$

$$\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t} = \frac{1}{r}\, \left(\mu_{\rm k} - \frac{\delta_{\rm k}}{r}\right)\, \left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\, g. \tag{18}$$

از این‌ها ضمنَن نتیجه می‌شود

$$\frac{{\rm d}(v-\omega\, r)}{{\rm d}t} = \left\{\left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\, \frac{\delta_{\rm k}}{r} - \left[1 + \left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\right]\, \mu_{\rm k}\right\}\, g. \tag{19}$$

رابطه‌ها يِ (18) و (19) دو مقدار برا يِ r را خاص می‌کن‌ند:

$$r_1 := \left[1 + \left(\frac{r_{\rm g}}{r}\right)^2\right]^{-1}\, \frac{\delta_{\rm k}}{\mu_{\rm k}},$$

$$r_2 := \frac{\delta_{\rm k}}{\mu_{\rm k}}. \tag{20}$$

بر اساس ِ این دومقدار، سه ناحیه برا يِ r مشخص می‌شود:

i $r < r_1$

در این حالت اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی حاکم است. تحول چن‌ان است که چرخ‌ش را کم و لغزش را زیاد می‌کن‌د.

ii $r_1 < r < r_2$

در این حالت نَه اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی حاکم است و نَه اصطکاک ِ لغزش‌ی. تحول چن‌ان است که هم چرخ‌ش و هم لغزش کم می‌شوند.

iii $r_2 < r$

در این حالت اصطکاک ِ لغزش‌ی حاکم است. تحول چن‌ان است که چرخ‌ش را زیاد و لغزش را کم می‌کن‌د.

2 حرکت ِ یک چرخ بر یک سطح ِ شیب‌دار

چرخ ی را در نظر بگیرید که ابتدا بر یک سطح ِ شیب‌دار ساکن است. نیروها یی که به این چرخ وارد می‌شوند وزن، نیرو یِ عمودبرسطح، و اصطکاک اند. چرخ چه ساکن ب‌مان‌د و چه رو یِ سطح پایین بی‌یای‌د، از سطح جدا ن‌می‌شود. پس تصویر ِ برآیند ِ نیروها در راستا یِ عمود بر سطح صفر است:

$$N = m\,g\,\cos\theta, \tag{21}$$

که θ زاویه یِ سطح ِ شیب‌دار با افق است. قانون ِ دوم ِ نیوتُن [a] در راستا یِ موازی با سطح ِ شیب‌دار می‌دهد

$$f + m\,g\,\sin\theta = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{22}$$

رابطه یِ گشت‌آور با تغییر ِ تکانه یِ زاویه‌ای هم همان رابطه یِ (3) است. دیده می‌شود در $\theta = 0$، رابطه‌ها یِ (21) و (22) به رابطه‌ها یِ به‌ترتیب (1) و (2) تبدیل می‌شوند. شرط ِ این که چرخ ساکن ب‌مان‌د این است که سرعت و سرعت ِ زاویه‌ای صفر ب‌مان‌ند. در این حالت،

$$f = -m\,g\,\sin\theta, \tag{23}$$

$$\delta = -\frac{f}{m\,g\,\cos\theta}\,r. \tag{24}$$

به این ترتیب چرخ ساکن می‌ماند به این شرط که

$$\tan\theta \le \mu_{\rm s}, \tag{25}$$

$$\tan\theta \le \frac{\delta_{\rm s}}{r}. \tag{26}$$

یک حالت ِ دیگر این است که چرخ رو یِ سطح پایین بی‌یاید، اما حرکت َ ش غلت‌ش باش‌د. در این حالت اصطکاک ِ لغزش‌ی ایستایی است و (4) و (5) برقرار اند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = \left(\sin\theta - \frac{\delta_{\rm k}}{r}\,\cos\theta\right)\,\frac{g}{1+(r_{\rm g}/r)^2}, \tag{27}$$

$$f = -\left[\left(\frac{r_{\rm g}}{r}\right)^2\,\sin\theta + \frac{\delta_{\rm k}}{r}\,\cos\theta\right]\,\frac{m\,g}{1+(r_{\rm g}/r)^2}. \tag{28}$$

شرط ِ رخ‌دادن ِ این حالت آن است که شتاب نامنفی باش‌د و اصطکاک هم از بیش‌ین‌ه یِ اصطکاک ِ ایستایی بیش‌تر ن‌شود. این‌ها می‌شوند

$$\tan\theta \ge \frac{\delta_{\rm k}}{r}, \tag{29}$$

$$\left[1+\left(\frac{r_{\rm g}}{r}\right)^2\right]\,\mu_{\rm s}\,\cos\theta \ge \left(\frac{r_{\rm g}}{r}\right)^2\,\sin\theta + \frac{\delta_{\rm k}}{r}\,\cos\theta. \tag{30}$$

رابطه یِ (30) را می‌شود نوشت

$$\tan\theta \le \left[1+\left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\right]\,\mu_{\rm s} - \left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\,\frac{\delta_{\rm k}}{r}. \tag{31}$$

از مقایسه یِ این با (29) معلوم می‌شود شرط ِ لازم برا یِ این که چن‌ین وضع ی رخ ده‌د آن است که

$$\frac{\delta_{\rm k}}{r} \le \mu_{\rm s}. \tag{32}$$

حالت ِ بعدی این است که چرخ پایین بی‌یای‌د، اما ن‌چرخ‌د. در این حالت، اصطکاک ِ غلت‌ش‌ی ایستایی است و (10)، (11)، و (13) برقرار اند. نتیجه می‌شود

$$\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = (\sin\theta - \mu_{\rm k}\,\cos\theta)\,g, \tag{33}$$

$$f = -\mu_{\rm k}\,m\,g\,\cos\theta. \tag{34}$$

شرط ِ رخ‌دادن ِ این حالت رابطه یِ (14) و

$$\tan\theta \ge \mu_{\rm k} \tag{35}$$

است.

سرانجام، حالت ِ آخر این است که چرخ پایین بی‌یای‌د، ب‌لغزد، و ب‌چرخ‌د. در این حالت اصطکاک ِ لغزش‌ی و غلت‌ش‌ی هردو جنب‌ش‌ی اند. (4) و (11) برقرار اند، و نتیجه می‌شود (33) و (34) برقرار اند و

$$\frac{{\rm d}\omega}{{\rm d}t} = \frac{1}{r}\,\left(\mu_{\rm k} - \frac{\delta_{\rm k}}{r}\right)\,\left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\,g\,\cos\theta. \tag{36}$$

به این ترتیب،

$$\frac{{\rm d}(v-\omega\,r)}{{\rm d}t} = g\,\sin\theta + \left\{\left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\,\frac{\delta_{\rm k}}{r} - \left[1+\left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\right]\,\mu_{\rm k}\right\}\,g\,\cos\theta. \tag{37}$$

شرط ِ این که اصطکاک‌ها جنب‌ش‌ی باش‌ند این است که طرف‌ها یِ چپ ِ (36) و (37) نامنفی باش‌ند. این یعنی

$$\frac{\delta_{\rm k}}{r} \le \mu_{\rm k}, \tag{38}$$

$$\tan\theta \ge \left[1+\left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\right]\,\mu_{\rm k} - \left(\frac{r}{r_{\rm g}}\right)^2\,\frac{\delta_{\rm k}}{r}. \tag{39}$$

اگر μ_{s} و μ_{k} با هم برابر و δ_{s} و δ_{k} هم با هم برابر باش‌ند، حالت‌ها یِ بالا را می‌شود به این شکل خلاصه کرد:

i $r < r_2$

a $\tan\theta < \mu_{\mathrm{k}}$

در این حالت چرخ ساکن می‌ماند.

b $\mu_{\mathrm{k}} < \tan\theta$

در این حالت چرخ پایین می آید و می‌لغزد، اما ن‌می‌چرخد.

ii $r_2 < r$

a $\tan\theta < \dfrac{\delta_{\mathrm{k}}}{r}$

در این حالت چرخ ساکن می‌ماند.

b $\dfrac{\delta_{\mathrm{k}}}{r} < \tan\theta < \dfrac{\delta_{\mathrm{k}}}{r}\,\dfrac{r-r_1}{r_2-r_1}$

در این حالت چرخ پایین می آید و می‌لغزد، اما ن‌می‌چرخد.

c $\dfrac{\delta_{\mathrm{k}}}{r}\,\dfrac{r-r_1}{r_2-r_1} < \tan\theta$

در این حالت چرخ پایین می آید، می‌لغزد، و می چرخد.

3 اسم ِ خاص

[a] Newton