X1-054 (2008/08/27)

نور ِ سیاره‌ها

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

شدت ِ نسبی یِ نور ِ بازتاب‌یده از یک سیاره، بر حسب ِ وضعیت ِ سیاره، خورشید، و زمین بررسی می‌شود.

0 مقدمه

نور ِ خورشید نیم ی از سطح ِ یک سیاره را روشن می‌کن‌د. توان ِ دریافت‌شده در یک ناحیه، با مساحت ِ تصویر ِ آن ناحیه بر صفحه یِ عمود بر راستا یِ فرود (خط ِ واصل ِ خورشید و آن سیاره) متناسب است. بخش ی از این نور باز می‌تاب‌د. یک مدل ِ ساده برا یِ بازتاب‌ش این است که چگال‌ی یِ شار ِ بازتاب‌یده را در جهت‌ها یِ بالا یِ سطح یک‌نواخت، و در جهت‌ها یِ زیر ِ سطح صفر ب‌گیریم (مدل ِ I). اما اگر مدل ِ بازتاب‌ش را شبیه ِ مثلاً فتون‌ها یی که از یک روزنه در یک کاواک بیرون می‌روند (تاب‌ش ِ جسمِ‌سیاه) ب‌گیریم، چگال‌ی یِ شار ِ بازتاب‌یده با تصویر ِ مساحت ِ ناحیه یِ بازتاب‌نده بر صفحه یِ عمود بر راستا یِ بازتاب‌ش متناسب است (مدل ِ II). توان ی که به سیاره می‌تاب‌د با عکس ِ مجذور ِ فاصله یِ سیاره از خورشید متناسب است. اما این فاصله برا یِ بیش‌تر ِ سیاره‌ها عملَن ثابت است. شدت ِ بازتاب‌یده در زمین هم با عکس ِ مجذور ِ فاصله یِ سیاره تا زمین متناسب است، و این فاصله ثابت نیست. با

درنظرگرفتن ِ این‌ها شدت ِ نسبی ي ِ نور ِ بازتاب‌یده در زمین را بر حسب ِ وضعیت ِ سیاره، خورشید، و زمین به دست می‌آوریم. در مثلث ی که رئس‌ها یَش سیاره (P)، خورشید (S)، و زمین (E) اند، زاویه ي ِ رئس ِ P را با α، و زاویه ي ِ رئس ِ S را با β نشان می‌دهیم. مدارها ي ِ سیاره و زمین را دایره‌ها یی هم‌صفحه با مرکز ِ خورشید، و به شعاع‌ها ي ِ به‌ترتیب $r_{\rm P}$ و $r_{\rm E}$ می‌گیریم. فاصله ي ِ سیاره تا زمین را با r نشان می‌دهیم. هدف محاسبه ي ِ شدت ِ نسبی ي ِ نور ِ بازتابیده بر حسب ِ ثابت‌ها ي ِ $r_{\rm P}$ و $r_{\rm E}$ و متغیر ِ β است.

1 توان ِ نسبی ي ِ بازتابیده از سیاره

جهت ِ مکان ِ خورشید و زمین نسبت به سیاره را با به‌ترتیب $\hat{\mathbf{n}}'_{\rm S}$ و $\hat{\mathbf{n}}'_{\rm E}$ نشان می‌دهیم. مختصات ِ دِکَرت‌ی ي ِ (x,y,z) که مبدئ َش سیاره است را چن‌ان می‌گیریم که

$$\hat{\mathbf{n}}'_{\rm S} = \hat{\mathbf{x}}\,\cos\frac{\alpha}{2} + \hat{\mathbf{y}}\,\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\hat{\mathbf{n}}'_{\rm E} = \hat{\mathbf{x}}\,\cos\frac{\alpha}{2} - \hat{\mathbf{y}}\,\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

توان ِ بازتاب‌یده از بخش ی از سطح ِ سیاره که در جهت ِ $\hat{\mathbf{n}}'$ نسبت به مرکز ِ سیاره است، در مدل ِ i با f_i متناسب است، که

$$\begin{aligned} f_{\rm I} &= f_{\rm S}, \\ f_{\rm II} &= f_{\rm S}\, f_{\rm E}, \end{aligned} \tag{2}$$

و

$$\begin{aligned} f_{\rm S} &= \hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\rm S}, \\ &= \sin\theta\,\left(\cos\phi\,\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\phi\,\sin\frac{\alpha}{2}\right), \\ f_{\rm E} &= \hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{n}}'_{\rm E}, \\ &= \sin\theta\,\left(\cos\phi\,\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\phi\,\sin\frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

که (θ, ϕ) زاویه‌ها یِ کروی یِ متناظر با $\hat{\mathbf{n}}'$ و مختصات ِ دِکَرتی یِ (x, y, z) اند. البته در هردو مدل فقط بخش ی از سطح ِ سیاره در بازتاب‌ش ی که در زمین دریافت می‌شود سهم دارد که

$$\begin{aligned} &f_{\mathrm{S}} \geq 0, \\ &f_{\mathrm{E}} \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

شرط‌ها یِ (4) هم‌ارز اند با

$$-\frac{\pi-\alpha}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi-\alpha}{2}. \tag{5}$$

به این ترتیب توان ِ بازتاب‌یده از سطح ِ سیاره با مدل ِ i می‌شود

$$P_i = P \int_{-(\pi-\alpha)/2}^{(\pi-\alpha)/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ \sin\theta\, f_i, \tag{6}$$

که P مستقل از α است. به این ترتیب،

$$\frac{P_{\mathrm{I}}}{P} = \frac{\pi}{2}\,(1+\cos\alpha), \tag{7}$$

$$\frac{P_{\mathrm{II}}}{P} = \frac{2}{3}\,[(\pi-\alpha)\ \cos\alpha + \sin\alpha]. \tag{8}$$

هردو یِ این عبارت‌ها در $0 \leq \alpha \leq \pi$ نسبت به α نزول‌ی اند، یعنی (چن‌ان که انتظار می‌رود) با افزایش ِ زاویه یِ رئس ِ P توان ی که به زمین باز می‌تابد کم می‌شود. توان‌ها یِ ب‌هنجارشده به توان ِ بیش‌ین‌ه می‌شوند

$$\tilde{P}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\,(1+\cos\alpha), \tag{9}$$

$$\tilde{P}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\pi}\,[(\pi-\alpha)\ \cos\alpha + \sin\alpha], \tag{10}$$

که

$$\tilde{P}_i := \frac{P_i}{P_i(0)}. \tag{11}$$

2 هندسه یِ سیاره، خورشید، و زمین

مثلث ِ PSE را می‌شود بر حسب ِ $r_{\rm P}$، $r_{\rm E}$، و β حل کرد. داریم

$$r^2 := r_{\rm P}^2 + r_{\rm E}^2 - 2\, r_{\rm P}\, r_{\rm E}\, \cos\beta, \tag{12}$$

و

$$\cos\alpha = \frac{r_{\rm P}^2 - r_{\rm E}^2 + r^2}{2\, r_{\rm P}\, r}. \tag{13}$$

با معرف‌ی یِ پارامترها یِ بی‌بُعد ِ

$$\rho := \frac{r_{\rm P}}{r_{\rm E}}, \tag{14}$$

$$x := \frac{r}{r_{\rm E}}, \tag{15}$$

رابطه‌ها یِ (12) و (13) می‌شوند

$$x^2 = \rho^2 + 1 - 2\, \rho\, \cos\beta, \tag{16}$$

$$\cos\alpha = \frac{\rho^2 - 1 + x^2}{2\, \rho\, x}. \tag{17}$$

از (16) دیده می‌شود x یک تابع ِ صعودی از β است، که کم‌ین‌ه و بیش‌ین‌ه یِ آن به‌ترتیب $|\rho - 1|$ و $(\rho + 1)$ اند. از (17) هم دیده می‌شود رفتار ِ $\cos\alpha$ بر حسب ِ x به این بسته‌گی دارد که ρ بزرگ‌تر از یک است یا کوچک‌تر از یک:

i $\rho > 1$

در این حالت $\cos\alpha$ به ازا یِ $x = \rho \pm 1$ برابر ِ 1 است. کم‌ین‌ه یِ $\cos\alpha$ در $x = \sqrt{\rho^2 - 1}$ رخ می‌دهد و برابر با $\sqrt{1 - \rho^{-2}}$ است. به این ترتیب، α یک تابع ِ دوبه‌یک از x است.

ii $\rho < 1$

در این حالت $\cos\alpha$ بر حسب ِ x صعودی است. کم‌ین‌ه و بیش‌ین‌ه یِ آن هم به‌ترتیب (-1) و 1 است. $\cos\alpha$ در $x = \sqrt{1 - \rho^2}$ صفر می‌شود.

3 شدت ِ نور در زمین

شدت ِ نور ِ بازتاب‌یده در زمین، با توان ِ بازتاب‌یده تقسیم بر مجذور ِ فاصله (یِ سیاره تا زمین) متناسب است. از این‌جا تابع ِ I_i (متناظر با مدل ِ i برا یِ بازتاب‌ش) به دست می‌آید که شدت ِ نور ِ بازتاب‌یده در زمین، با آن متناسب است:

$$I_i := \frac{\tilde{P}_i}{x^2}. \tag{18}$$

در این رابطه می‌شود همه چیز را بر حسب ِ x جاگذاری کرد، که خود ِ x هم یک تابع ِ صعودی از β است. رفتار ِ این تابع‌ها بر حسب ِ x به مقدار ِ ρ بسته‌گی دارد. داریم

$$\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x^3}\,\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_i}{\mathrm{d}\cos\alpha}\,\left(\frac{x}{2}\,\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}x} - \tilde{P}_i\,\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}\tilde{P}_i}\right), \tag{19}$$

که با استفاده از

$$\tilde{P}_{\mathrm{I}}\,\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}\tilde{P}_{\mathrm{I}}} = \cos\alpha + 1, \tag{20}$$

$$\tilde{P}_{\mathrm{II}}\,\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}\tilde{P}_{\mathrm{II}}} = \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}, \tag{21}$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{x^3}\,\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_i}{\mathrm{d}\cos\alpha}\,\left(\frac{x}{2}\,\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}x} - \cos\alpha - g_i\right), \tag{22}$$

که

$$g_{\mathrm{I}} = 1, \tag{23}$$

$$g_{\mathrm{II}} = \frac{\sin\alpha}{\pi-\alpha}. \tag{24}$$

از (20) و (21) ضمنَن معلوم می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}_i}{\mathrm{d}\cos\alpha} \geq 0. \tag{25}$$

برا یِ $i = \mathrm{II}$ از این استفاده شده که

$$-\cos\gamma + \frac{\sin\gamma}{\gamma} \geq 0, \qquad 0 \leq \gamma \leq \pi. \tag{26}$$

پس علامتِ مشتقِ I_i نسبت به x همان علامتِ عبارتِ درونِ پرانتز در (22) است. این عبارت را با h_i نشان می‌دهیم.

$$h_i := \frac{x}{2}\,\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}x} - \cos\alpha - g_i. \tag{27}$$

با جاگذاریِ $\cos\alpha$ بر حسبِ x،

$$h_i = -\frac{x}{4\,\rho} - \frac{3\,(\rho^2-1)}{4\,\rho\,x} - g_i, \tag{28}$$

که نشان می‌دهد در $\rho > 1$ مقدارِ h_i هم‌واره منفی است. این یعنی در $\rho > 1$ تابعِ I_i بر حسبِ x (و در نتیجه β) نزولی است. بیشینه‌یِ شدتِ بازتابیده در زمین به ازایِ $\beta = 0$ یعنی $x = (\rho - 1)$، و کمینه‌یِ شدتِ بازتابیده در زمین به ازایِ $\beta = \pi$ یعنی $x = (\rho + 1)$ به دست می‌آید.

در $\rho < 1$ تنوعِ بیش‌تری داریم. در این حالت x تابعِ $\cos\alpha$ است:

$$x = \rho\,\cos\alpha + \sqrt{1 - \rho^2\,\sin^2\alpha}, \tag{29}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$h_i = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \sin^2\alpha} - \cos\alpha - g_i. \tag{30}$$

صفرشدنِ h_i در α هم‌ارز است با

$$H_i(\alpha) = \frac{1}{\rho^2}, \tag{31}$$

که

$$H_i(\alpha) := \sin^2\alpha + 4\,(\cos\alpha + g_i)^2. \tag{32}$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\alpha} &= 2\,\sin\alpha\,(-4 - 3\,\cos\alpha),\\ &\leq 0,\end{aligned} \tag{33}$$

که نتیجه می‌دهد H_{I} نسبت به α نزولی است. شرط ِ این که (31) برا یِ α_0 جواب داشته باش‌د این است که ρ^{-2} بین ِ کم‌ین‌ه و بیش‌ین‌ه یِ H_{I} باش‌د (و البته بزرگ‌تر از یک باش‌د). کم‌ین‌ه یِ H_{I} صفر است. بیش‌ین‌ه یِ H_1 در $\alpha = 0$ به دست می آید و

$$H_{\mathrm{I}}(0) = 16. \tag{34}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود اگر $\rho < 0.25$، آن‌گاه I_{I} بر حسب ِ x (و در نتیجه β) صعودی است. اگر $\rho > 0.25$، آن‌گاه برا یِ α در (31) و به ازا یِ $i = \mathrm{I}$ جواب هست. این جواب را α_{I}، و مقدارها یِ متناظر برا یِ x و β را به‌ترتیب x_{I} و β_{I} می‌نام‌یم. نتیجه می‌شود

$$\cos\alpha_{\mathrm{I}} = -\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{\rho^2+3}}{3\,\rho},$$

$$x_{\mathrm{I}} = \sqrt{\rho^2+3} - 2\,\rho,$$

$$\cos\beta_{\mathrm{I}} = 2\,\sqrt{\rho^2+3} - 2\,\rho - \frac{1}{\rho}. \tag{35}$$

I_{I} در این نقطه بیش‌ین‌ه می‌شود.

در مورد ِ H_{II} داریم

$$H_{\mathrm{II}}(0) = 4,$$
$$H_{\mathrm{II}}(\pi) = 0, \tag{36}$$

و

$$\frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}\alpha}(0) = \frac{4}{\pi}, \tag{37}$$

پس بیش‌ین‌ه یِ H_{II} در $\alpha = 0$ رخ ن‌می‌ده‌د. جا یی که H_{II} بیش‌ین‌ه می‌شود را α_0 می‌نام‌یم. با محاسبه معلوم می‌شود

$$\alpha_0 = 0.5335, \tag{38}$$

$$H_{\mathrm{II}}(\alpha_0) = 4.7197, \tag{39}$$

که متناظر است با

$$\rho_0 := 0.4603. \qquad (40)$$

اگر ρ از ρ_0 کوچک‌تر باشد، $I_{\rm II}$ بر حسب ِ x صعودی است. وقت ی ρ از ρ_0 بزرگ‌تر می‌شود، برا یِ $I_{\rm II}$ یک بیش‌ین‌ه در x_1 (متناظر با α_1) و یک کم‌ین‌ه در x_2 (متناظر با α_2) درست می‌شود، که x_1 کوچک‌تر از x_2 است. ابتدا $I_{\rm II}(x_1)$ کوچک‌تر از $I_{\rm II}(\rho+1)$ است. اما به ازا یِ $\rho > \rho'_0$ با

$$\rho'_0 := 0.4644, \qquad (41)$$

$I_{\rm II}(x_1)$ بزرگ‌تر از $I_{\rm II}(\rho+1)$ می‌شود، پس بیش‌ین‌ه یِ سراسری یِ $I_{\rm II}$ در x_1 رخ می‌دهد. در $\rho = 0.5$ مقدار ِ x_2 به $(\rho+1)$ می‌گراید و در $\rho > 0.5$، تابع ِ $I_{\rm II}$ در $(\rho+1)$ یک کم‌ین‌ه یِ موضع‌ی می‌گیرد.

4 جمع‌بندی

i $\rho > 1$

در این حالت (سیاره‌ها یِ برون‌ی) شدت ِ نور ِ بازتاب‌یده در زمین، بر حسب ِ x (و در نتیجه β) نزولی است. کم‌ین‌ه در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho+1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه) رخ می‌دهد. بیش‌ین‌ه در $\beta = 0$ متناظر با $x = (\rho - 1)$ و $\alpha = 0$ (مقابله) رخ می‌دهد.

ii $\rho < 1$

در این حالت (سیاره‌ها یِ درون‌ی) رفتار ِ کیفی یِ شدت ِ بازتاب‌یده در زمین به مدل بسته‌گی دارد.

ii-I در مدل ِ I دو حالت رخ می‌دهد.

ii-I-1 $0 < \rho < 0.25$

در این حالت شدت ِ نور ِ بازتاب‌یده در زمین، بر حسب ِ x (و در نتیجه β) صعودی است. کم‌ین‌ه در $\beta = 0$ متناظر با $x = (1-\rho)$ و $\alpha = \pi$ (مقارنه یِ درون‌ی) رخ می‌دهد و صفر است. بیش‌ین‌ه در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho+1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه یِ برون‌ی) رخ می‌دهد.

ii-I-2 $0.25 < \rho < 1$

در این حالت شدت ـِ نور ـِ بازتابیده در زمین، در $\beta = 0$ متناظر با $x = (1-\rho)$ و $\alpha = \pi$ (مقارنه یِ درونی) صفر است؛ با افزایش ـِ β زیاد و در $\beta = \beta_{\rm I}$ متناظر با $x = x_{\rm I}$ و $\alpha = \alpha_{\rm I}$ بیشینه می‌شود؛ و با افزایش ـِ بیش‌تر ـِ β کم می‌شود و در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho+1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه یِ برونی) به یک کمینه یِ موضعی می‌رسد.

ii-II در مدل ـِ II چهار حالت رخ می‌دهد.

ii-II-1 $0 < \rho < \rho_0$

در این حالت شدت ـِ نور ـِ بازتابیده در زمین، بر حسب ـِ x (و در نتیجه β) صعودی است. کمینه در $\beta = 0$ متناظر با $x = (1-\rho)$ و $\alpha = \pi$ (مقارنه یِ درونی) رخ می‌دهد و صفر است. بیشینه در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho+1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه یِ برونی) رخ می‌دهد.

ii-II-2 $\rho_0 < \rho < \rho_0'$

در این حالت شدت ـِ نور ـِ بازتابیده در زمین، در $\beta = 0$ متناظر با $x = (1-\rho)$ و $\alpha = \pi$ (مقارنه یِ درونی) صفر است؛ با افزایش ـِ β تا $\beta = \beta_1$ متناظر با $x = x_1$ و $\alpha = \alpha_1$ زیاد می‌شود و در این نقطه به یک بیشینه یِ موضعی می‌رسد؛ با افزایش ـِ بیش‌تر ـِ β از این نقطه تا $\beta = \beta_2$ متناظر با $x = x_2$ و $\alpha = \alpha_2$ کم می‌شود و در این نقطه به یک کمینه یِ موضعی می‌رسد؛ و با افزایش ـِ بیش‌تر ـِ β از این نقطه کم می‌شود و در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho+1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه یِ برونی) به بیشینه یِ سراسری می‌رسد.

ii-II-3 $\rho_0' < \rho < 0.5$

در این حالت شدت ـِ نور ـِ بازتابیده در زمین، در $\beta = 0$ متناظر با $x = (1-\rho)$ و $\alpha = \pi$ (مقارنه یِ درونی) صفر است؛ با افزایش ـِ β تا $\beta = \beta_1$ متناظر با $x = x_1$ و $\alpha = \alpha_1$ زیاد می‌شود و در این نقطه به بیشینه یِ سراسری می‌رسد؛ با افزایش ـِ بیش‌تر ـِ β از این نقطه تا $\beta = \beta_2$ متناظر با $x = x_2$ و $\alpha = \alpha_2$ کم می‌شود و در این نقطه به یک کمینه یِ موضعی می‌رسد؛ و با افزایش ـِ بیش‌تر ـِ β از این نقطه کم

می‌شود و در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho + 1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه یِ برونی) به یک بیشینه یِ موضعی می‌رسد.

ii-II-4 $0.5 < \rho < 1$

در این حالت شدت ِ نور ِ بازتابیده در زمین، در $\beta = 0$ متناظر با $x = (1 - \rho)$ و $\alpha = \pi$ (مقارنه یِ درونی) صفر است؛ با افزایش ِ β تا $\beta = \beta_1$ متناظر با $x = x_1$ و $\alpha = \alpha_1$ زیاد می‌شود و در این نقطه به بیشینه یِ سراسری می‌رسد؛ و با افزایش ِ بیش‌تر ِ β از این نقطه کم می‌شود و در $\beta = \pi$ متناظر با $x = (\rho + 1)$ و $\alpha = 0$ (مقارنه یِ برونی) به یک کمینه یِ موضعی می‌رسد.