X1-055 (2008/10/25)

رابطه يِ پاش‌نده‌گی يِ امواج ِ برداری

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

رابطه يِ پاش‌نده‌گی يِ امواج ِ برداری در محیط‌ها يِ خطی و هم‌گن، و قطب‌ش‌ها يِ این امواج در محیط‌ها يِ خطی، هم‌گن، و هم‌سان‌گرد بررسی می‌شود.

1 معادله يِ موج در یک محیط ِ خطی و هم‌گن

تابعِ‌موج ِ ψ (با متغیرها يِ زمان و فضا) را در نظر ب‌گیرید که یک معادله يِ پاره‌ای را بر می آوَرَد:

$$[\Xi(\psi)](r) = S(r). \tag{1}$$

r یک چندتایی است که بخش ِ فضایی يِ آن زمان ($t =: r^0$)، و بخش ِ فضایی يِ آن مکان ($\mathbf{r}$) است. Ξ چن‌ان است که اگر ψ صفر باش‌د، ($\Xi\,\psi$) هم صفر است. S یک تابع ِ داده‌شده است، که به آن چشمه می‌گوییم. اگر Ξ خطی باش‌د، می‌گوییم محیط خطی است. اگر Ξ نسبت به انتقال تقارن داشته باش‌د، می‌گوییم محیط نسبت به انتقال تقارن دارد. البته ممکن است Ξ نسبت به انتقال در راستا يِ خاص ی تقارن داشته باش‌د. این که Ξ نسبت به انتقال در راستا يِ e تقارن دارد، یعنی برا يِ همه يِ s ها يِ حقیق ی،

$$\Xi\{[T(s\,e)]\,\psi\} = [T(s\,e)]\,[\Xi(\psi)], \tag{2}$$

که

$$\{[T(s\,e)]\,\psi\}(r) := \psi(r - s\,e). \tag{3}$$

e یک چندتایی (یِ مستقل از فضا و زمان) است که بخش ِ زمان‌ی یِ آن e^0، و بخش ِ فضایی یِ آن $\mathbf{e}$ است. تقارن نسبت به انتقال در راستا یِ e یعنی اگر ψ پاسخ به چشمه یِ S باش‌د، $\{[T(s\,e)]\,\psi\}$ هم پاسخ به چشمه یِ $\{[T(s\,e)]\,S\}$ است: موج ِ منتقل‌شده پاسخ به چشمه یِ منتقل‌شده است.

روشن است که اگر محیط نسبت به انتقال در چند راستا (e_a ها) تقارن داشته باش‌د، رابطه یِ (3) می‌شود این که به ازا یِ همه یِ s^a ها یِ حقیق‌ی

$$\Xi\{[T(s^a\,e_a)]\,\psi\} = [T(s^a\,e_a)]\,[\Xi(\psi)]. \tag{4}$$

می‌گوییم محیط فضاهم‌گن است، اگر محیط نسبت به انتقال در همه یِ راستاها یِ فضا تقارن داشته باش‌د، یعنی اگر (2) برا یِ e ها یِ با e^0 برابر ِ صفر برقرار باش‌د. می‌گوییم محیط زمان‌هم‌گن است، اگر محیط نسبت به انتقال در زمان تقارن داشته باش‌د، یعنی اگر (2) برا یِ e ها یِ با $\mathbf{e}$ برابر ِ صفر برقرار باش‌د. می‌گوییم محیط فضازمان هم‌گن (یا هم‌گن) است اگر (2) برا یِ همه یِ e ها برقرار باش‌د.

وقت‌ی محیط خط‌ی است، (1) می‌شود

$$\int \mathrm{d}^d r'\,\Xi(r;r')\,\psi(r') = S(r), \tag{5}$$

که d بُعد ِ فضازمان است. اگر علاوه بر این، محیط نسبت به انتقال در راستاها یِ e_a تقارن داشته باش‌د، از (4) نتیجه می‌شود

$$\Xi(r - s^a\,e_a; r' - s^a\,e_a) = \Xi(r;r'). \tag{6}$$

از جمله اگر محیط خط‌ی و هم‌گن باش‌د،

$$\Xi(r;r') = \Xi(r - r';0), \tag{7}$$

و با تعریف ِ

$$\Xi(r) := \Xi(r;0), \tag{8}$$

رابطه یِ (5) می‌شود

$$\int \mathrm{d}^d r' \, \Xi(r-r') \, \psi(r') = S(r). \tag{9}$$

وقت ی محیط خطی است و نسبت به انتقال در راستاها یِ e_a تقارن دارد، (4) می‌شود

$$\Xi \, [T(s^a \, e_a)] = [T(s^a \, e_a)] \, \Xi. \tag{10}$$

این رابطه به ازا یِ همه یِ s^a ها یِ حقیقی برقرار است. پس ویژه‌فضا یِ مشترک ِ همه یِ $[T(s^a \, e_a)]$ ها یک زیرفضا یِ ناوردا یِ Ξ هم هست. این حل ِ معادله یِ (5) را ساده‌تر می‌کند. به این شکل که ψ و S را در ویژه‌فضا یِ مشترک ِ همه یِ $[T(s^a \, e_a)]$ ها ب‌گیریم، و جواب ِ کل‌ی را با ترکیب ی از جواب‌ها یِ خاص ی که به این طریق به دست می‌آیند ب‌سازیم.

2 ویژه‌بردارها یِ انتقال

u را ویژه‌بردار ِ $[T(s \, e)]$ می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$u(r - e \, s) = \lambda(s) \, u(r). \tag{11}$$

این که این رابطه به ازا یِ همه یِ s ها یِ حقیقی برقرار است، نتیجه می‌دهد

$$\lambda(s + s') = \lambda(s) \, \lambda(s'), \tag{12}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\lambda(s) = \exp(\kappa \, s), \tag{13}$$

که κ یک ثابت است.

چندتایی یِ f را چنان می‌گیریم که

$$f \cdot e = 1, \tag{14}$$

که

$$f \cdot e := f_\alpha\, e^\alpha. \tag{15}$$

تعریف می‌کنیم

$$r_f := r - e\,(f \cdot r). \tag{16}$$

دیده می‌شود

$$f \cdot r_f = 0, \tag{17}$$

که نتیجه می‌دهد تعداد ِ مئلفه‌ها یِ مستقل ِ r_f یک ی کم‌تر از تعداد ِ مئلفه‌ها یِ مستقل ِ r است. داریم

$$r = r_f + e\,(f \cdot r), \tag{18}$$

که نتیجه می‌دهد بین ِ r و زوج ِ $(r_f, f \cdot r)$ یک رابطه یِ یک‌به‌یک هست. پس،

$$u(r) =: \tilde{u}(r_f, f \cdot r). \tag{19}$$

به این ترتیب، از (11) نتیجه می‌شود

$$\tilde{u}(r_f, f \cdot r - s) = \lambda(s)\,\tilde{u}(r_f, f \cdot r), \tag{20}$$

که نشان می‌دهد

$$\tilde{u}(r_f, f \cdot r) = \lambda(-f \cdot r)\,\tilde{u}(r_f, 0). \tag{21}$$

از این‌جا معلوم می‌شود یک تابع ِ u_f هست که

$$u(r) = \lambda(-f \cdot r)\,u_f(r_f), \tag{22}$$

و با استفاده از (13)،

$$u(r) = \exp(-\kappa\, f \cdot r)\,u_f(r_f). \tag{23}$$

متناظر با چندتایی‌ها یِ e_a که نسبت به هم خطی مستقل اند، چندتایی‌ها یِ f^a را چن‌ان می‌گیریم که

$$f^a \cdot e_b = \delta^a{}_b \tag{24}$$

و از رو یِ آن،

$$r_f := r - e_a\,(f^a \cdot r), \tag{25}$$

که نشان می‌ده‌د

$$f^a \cdot r_f = 0. \tag{26}$$

این نتیجه می‌ده‌د تعداد ِ مئلفه‌ها یِ مستقل ِ r_f به تعداد ِ چندتایی‌ها یِ e_a کم‌تر از تعداد ِ مئلفه‌ها یِ مستقل ِ r است. با استدلال‌ها یی مشابه با آن چه برا یِ یافت‌ن ِ ویژه‌بردارها یِ $[T(s\,e)]$ به کار رفت، معلوم می‌شود u ویژه‌بردار ِ $[T(s^a\,e_a)]$ ها است اگر و تنها اگر

$$u(r) = \exp(-\kappa_a\,f^a \cdot r)\,u_f(r_f), \tag{27}$$

که هر یک از κ_a ها ثابت اند.

اگر پهن‌ه یِ e_a ها کل ِ فضا باش‌د، می‌شود e_a ها و f^a ها را چن‌ین گرفت.

$$\begin{aligned} {e_a}^\alpha &= \delta^\alpha_a, \\ {f^a}_\alpha &= \delta^a_\alpha, \end{aligned} \tag{28}$$

که a مقدارها یِ 1 تا D (بُعد ِ فضا) را می‌پذیرد. در این حالت مئلف‌ه‌ها یِ فضایی یِ r_f صفر می‌شوند و

$$u(r) = \exp(-\kappa_a\,r^a)\,u_f(t). \tag{29}$$

اگر پهن‌ه یِ e_a ها کل ِ فضازمان باش‌د، می‌شود e_a ها و f^a ها را مثل ِ (28) گرفت، که این بار a مقدارها یِ 0 تا D را می‌پذیرد. در این حالت r_f صفر می‌شود و

$$u(r) = \exp(-\kappa_a\,r^a)\,u_f, \tag{30}$$

که u_f یک ثابت است. به موج ی که بسته‌گی‌به‌فضازمان ِ آن به این شکل باش‌د یک موج ِ تک‌فام (یا تخت) می‌گوییم.

3 تقارن و کاهش ِ تعداد ِ متغیرها

یک محیط ِ خطی در نظر ب‌گیرید که نسبت به انتقال در راستاها یِ e_a تقارن دارد. u را ویژه‌بردار ِ مشترک ِ انتقال در این راستاها می‌گیریم. از این که (10) برقرار است، نتیجه می‌شود $(\Xi\, u)(r)$ هم ویژه‌بردار ِ مشترک ِ انتقال در این راستاها، یعنی به شکل ِ (27) است:

$$(\Xi\, u)(r) = \exp(-\kappa_a\, f^a \cdot r)\, w_f(r_f|\kappa), \tag{31}$$

که

$$w_f(r_f|\kappa) = \int \mathrm{d}^d r'\ \Xi(r;r')\ \exp[\kappa_a\, f^a \cdot (r - r')]\, u_f(r'_f). \tag{32}$$

طرف ِ راست اثر ِ یک نگاشت ِ خطی بر u_f است، که می‌شود آن را چن‌ین نوشت.

$$w_f(r_f|\kappa) = \int \mathrm{d}^\delta r'_f\ \Xi_f(r_f;r'_f|\kappa)\, u_f(r'_f). \tag{33}$$

δ برابر است با d منها یِ تعداد ِ e_a ها. به این ترتیب اگر چشمه یِ طرف ِ راست ِ معادله یِ (5) ویژه‌بردار ِ انتقال در راستاها یِ e_a باش‌د:

$$S(r) = \exp(-\kappa_a\, f^a \cdot r)\, S_f(r_f), \tag{34}$$

آن‌گاه یک جواب برا یِ ψ هم به این شکل خواهد بود

$$\psi(r) = \exp(-\kappa_a\, f^a \cdot r)\, \psi_f(r_f), \tag{35}$$

و داریم

$$\int \mathrm{d}^\delta r'_f\ \Xi_f(r_f;r'_f|\kappa)\, \psi_f(r'_f) = S_f(r_f). \tag{36}$$

دیده می‌شود تعداد ِ متغیرها یی که در این رابطه وارد شده اند δ است، که به تعداد ِ e_a ها یِ خطی‌مستقل کم‌تر از d است.

برا یِ محاسبه یِ مستقیم ـ Ξ_f، چندتاییها یِ g^a را چنان مییابیم که

$$g^a \cdot e_b = 0. \tag{37}$$

بیشینه یِ تعداد ـ g^a ها یِ خطیمستقل ی که این رابطه را بر میآورند δ است. $(g^1 \cdot r, \dots, g^\delta \cdot r)$ را مختصات ـ r_f میگیریم. اگر به این مجموعه $(f^a \cdot r)$ ها را اضافه کنیم، مختصات ی برا یِ r به دست میآید. این مختصات را در (32) میگذاریم و انتگرالگیری رو یِ $(f^a \cdot r)$ ها را انجام میدهیم. نتیجه میشود

$$\Xi_f(r_f; r'_f|\kappa) = \int \mathrm{d}^{d-\delta}\tilde{r}'_f\, \frac{1}{\Delta}\, \Xi(r; r')\, \exp[\kappa_a\, f^a \cdot (r - r')], \tag{38}$$

که $\tilde{r}_f$ یک $(d-\delta)$ تایی است که مئلفهها یَش $(f^a \cdot r)$ ها یند. همچنین

$$\Delta := |\det(g, f)|, \tag{39}$$

که (g, f) ماتریس ی است که ستونها یَش چندتاییها یِ g^a و f^a اند. اگر Ξ نسبت به متغیرها یِ $\tilde{r}_f$ و $\tilde{r}'_f$ دیفرانسیلی باشد:

$$\Xi(r; r') = \sum_{(a^1,\dots)} \Xi^{(a^1,\dots)}(r_f; r'_f)\, \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_f^{a_1}}\cdots\right) \delta(\tilde{r}_f - \tilde{r}'_f), \tag{40}$$

آنگاه

$$(\Xi\,\psi)(r) = \sum_{(a^1,\dots)} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_f^{a_1}}\cdots\right) \int \mathrm{d}^{\delta} r'_f\, \frac{1}{\Delta}\, \Xi^{(a^1,\dots)}(r_f; r'_f)\, \psi(r'_f, \tilde{r}_f), \tag{41}$$

و

$$\Xi_f(r_f; r'_f|\kappa) = \sum_{(a^1,\dots)} [(-\kappa_{a_1})\cdots]\, \frac{1}{\Delta}\, \Xi^{(a^1,\dots)}(r_f; r'_f), \tag{42}$$

که نشان میدهد Ξ_f از Ξ به این شکل به دست میآید که به جا یِ مشتقگیری نسبت به $\tilde{r}_f^a$ ضربکردن در $(-\kappa_a)$ بگذاریم.

اگر محیط همگن باشد، δ صفر میشود و w_f و Ξ_f تابع ـ فقط κ میشوند. در این حالت (33) میشود

$$w_f(\kappa) = \Xi_f(\kappa)\, u_f, \tag{43}$$

که

$$\Xi_f(\kappa) = \int \mathrm{d}^d r'\ \Xi(r;r')\ \exp[\kappa_a\, f^a \cdot (r - r')]. \tag{44}$$

سرانجام، در این حالت (36) می‌شود

$$\Xi_f(\kappa)\,\psi_f = S_f, \tag{45}$$

که یک رابطه يِ جبری (نه انتگرال‌ی یا دیفرانسیل‌ی) است. از جمله، اگر Ξ نسبت به متغیرها يِ r و r' دیفرانسیل‌ی باش‌د:

$$\Xi(r;r') = \sum_{(a^1,\dots)} \Xi^{(a^1,\dots)} \left(\frac{\partial}{\partial r^{a_1}}\ \cdots\right) \delta(r - r'), \tag{46}$$

آن‌گاه

$$(\Xi\,\psi)(r) = \sum_{(a^1,\dots)} \Xi^{(a^1,\dots)} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}_f^{a_1}}\ \cdots\right) \psi(r), \tag{47}$$

و

$$\Xi_f(\kappa) = \sum_{(a^1,\dots)} [(-\kappa_{a_1})\cdots]\,\Xi^{(a^1,\dots)}. \tag{48}$$

4 رابطه يِ پاش‌نده‌گی

یک محیط ِ هم‌گن در نظر ب‌گیرید. اگر چشمه يِ طرف ِ راست ِ معادله يِ (5) صفر باش‌د، (45) برا يِ موج ِ تک‌فام ِ ψ می‌شود

$$\Xi_f(\kappa)\,\psi_f = 0. \tag{49}$$

به این معادله رابطه يِ پاش‌نده‌گی می‌گوییم. در حالت ِ کل‌ی، از این معادله یک رابطه بین ِ κ_a ها به دست می‌آید و راستا يِ ψ_f هم (بر حسب ِ κ) به دست می‌آید. به راستا يِ ψ_f قطبش ِ موج ِ (تک‌فام ِ) ψ می‌گوییم. اگر بر r^a محدودیت ی ن‌باش‌د و آن ویژه‌بردارها يِ Ξ را بررس‌ی کن‌یم که مقدار ِشان باپایان ب‌مان‌د، κ_a باید موهوم‌ی يِ خالص باش‌د. سنت این بوده که می‌گیرند

$$\kappa_a = \begin{cases} -\mathrm{i}\, k_a, & a \neq 0 \\ \mathrm{i}\, \omega, & a = 0 \end{cases}. \tag{50}$$

اگر ψ اسکالر باش‌د، آن‌گاه رابطه ‌ي پاش‌نده‌گی به این شکل ِ ساده است.

$$\Xi_f(\kappa) = 0. \tag{51}$$

این رابطه یک معادله ‌ي جبری بین ِ κ_a ها است. اگر ψ و S بردار با بُعد ِ یک‌سان باش‌ند، آن‌گاه (49) برا ‌ي ψ_f جواب ِ ناصفر دارد اگر و تنها اگر

$$\det[\Xi_f(\kappa)] = 0. \tag{52}$$

این یک معادله ‌ي جبری بین ِ κ_a ها است.

5 هم‌سان‌گردی، تقارن تحت ِ تبدیل‌ها ‌ي متعامد

حالت ‌ی را بررس‌ی می‌کن‌یم که بخش ِ فضایی ‌ي فضازمان یک فضا ‌ي اقلیدس‌ی است. تبدیل‌یافته ‌ي میدان ِ Φ با تبدیل ِ متعامد ِ R را با $(R_*\,\Phi)$ نشان می‌ده‌یم و آن را به این شکل تعریف می‌کن‌یم.

$$(R_*\,\Phi)(t, \mathbf{r}) := \tilde{R}\,[\Phi(t, R^{-1}\,\mathbf{r})], \tag{53}$$

که $\tilde{R}$ یک نمایش ِ R است. دو حالت ِ خاص وقت ‌ی است که $\tilde{R}$ همان‌ی است (میدان ِ اسکالر) یا خود ِ R (میدان ِ برداری).

می‌گوییم محیط فضاهم‌سان‌گرد است (تحت ِ دوران متقارن است)، اگر از این که ψ و S رابطه ‌ي (5) را بر می‌آورند نتیجه شود به ازا ‌ي هر دوران ِ R میدان‌ها ‌ي $(R_*\,\psi)$ و $(R_*\,S)$ هم رابطه ‌ي (5) را بر می‌آورند. می‌گوییم محیط تحت ِ همه ‌ي تبدیل‌ها ‌ي متعامد متقارن است، اگر از این که ψ و S رابطه ‌ي (5) را بر می‌آورند نتیجه شود به ازا ‌ي هر تبدیل ِ متعامد ِ R میدان‌ها ‌ي $(R_*\,\psi)$ و $(R_*\,S)$ هم رابطه ‌ي (5) را بر می‌آورند. از

$$\mathbf{k}\cdot(R^{-1}\,\mathbf{r}) = (R\,\mathbf{k})\cdot\mathbf{r} \tag{54}$$

به ازا ‌ي تبدیل‌ها ‌ي متعامد نتیجه می‌شود شرط ِ تقارن ِ محیط تحت ِ دوران (یا همه ‌ي تبدیل‌ها ‌ي متعامد) هم‌ارز است با برقراری ‌ي

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]\,R_{(1)} = R_{(2)}\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})] \tag{55}$$

به ازا ي همه ي دوران‌ها ي R (یا همه ي تبدیل‌ها ي متعامد ِ R)، که $R_{(1)}$ و $R_{(2)}$ همان $\tilde{R}$ متناظر با به‌ترتیب موج و چشمه اند. یک نتیجه ي هم‌سان‌گردی (برقراری ي (55) با همه ي دوران‌ها ي R) این است که (49) اگر به ازا ي یک زوج ِ $(\omega, \mathbf{k})$ و یک ψ_f برقرار باش‌د، به ازا ي $(\omega, R\,\mathbf{k})$ و $[R_{(1)}\,\psi_f]$ هم برقرار است، که R یک دوران ِ دل‌ب‌خواه است. پس در رابطه ي بین ِ ω و $\mathbf{k}$ جهت ِ $\mathbf{k}$ ظاهر ن‌می‌شود و در نتیجه سرعت ِ انتشار ِ موج به جهت ِ انتشار بسته‌گی ندارد.

فرض کن‌ید محیط فضاهم‌سان‌گرد است، و موج و چشمه بردار اند. (55) می‌شود

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]\,R = R\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]. \tag{56}$$

S را دوران ی ب‌گیرید که $\mathbf{k}$ را ثابت می‌گذارد. از (56) نتیجه می‌شود Ξ_f با چن‌ین‌دوران ی جابه‌جا می‌شود:

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,S = [S\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})], \tag{57}$$

$\mathbf{w}$ را یک بردار ِ دل‌ب‌خواه ب‌گیرید. از این که S متعامد است نتیجه می‌شود

$$(S^{-1}\,\mathbf{w})\cdot\{[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,\mathbf{k}\} = \mathbf{w}\cdot\{[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,\mathbf{k}\}, \tag{58}$$

$$\mathbf{k}\cdot\{[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,\mathbf{w}\} = \mathbf{k}\cdot\{[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,S\,\mathbf{w}\}. \tag{59}$$

$\mathbf{e}$ را یک بردار ِ عمود بر $\mathbf{k}$ می‌گیریم. فرض کن‌ید بُعد ِ فضا دستِ‌کم 3 است. در این صورت می‌شود S را چن‌ان گرفت که $\mathbf{e}$ ویژه‌بردار ِ آن با ویژه‌مقدار ِ (-1) باش‌د. به این ترتیب نتیجه می‌شود

$$\mathbf{e}\cdot\{[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,\mathbf{k}\} = 0, \tag{60}$$

$$\mathbf{k}\cdot\{[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,\mathbf{e}\} = 0. \tag{61}$$

پس Ξ_f دو زیرفضا ي ناوردا دارد، زیرفضاها ي موازی با $\mathbf{k}$ و عمود بر $\mathbf{k}$. به این ترتیب، متناظر با بردار ِ دل‌بخواه ِ $\mathbf{w}$ داریم

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,\mathbf{w}=[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel\,\mathbf{w}_\parallel+[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp\,\mathbf{w}_\perp, \tag{62}$$

که $\mathbf{w}_\parallel$ بخش ِ موازی‌با $\mathbf{k}$ و $\mathbf{w}_\perp$ بخش ِ عمودبر $\mathbf{k}$ ِ بردار ِ $\mathbf{w}$ است، و تصویرها یِ $[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel$ و $[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp$ به‌ترتیب راستا یِ $\mathbf{k}$ و زیرفضا یِ عمود بر $\mathbf{k}$ است. از این‌جا معلوم می‌شود (49) برقرار است اگر و تنها اگر

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel\,(\psi_f)_\parallel=0, \tag{63}$$

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp\,(\psi_f)_\perp=0. \tag{64}$$

به این ترتیب، در یک محیط ِ فضاهم‌سان‌گرد (و البته هم‌گن) بخش‌ها یِ موازی‌با $\mathbf{k}$ و عمودبر $\mathbf{k}$ ِ موج از هم جدا می‌شوند. به موج ی که با $\mathbf{k}$ موازی است طول‌ی، و به موج ی که بر $\mathbf{k}$ عمود است عرض‌ی می‌گوییم.

از (56) و (62) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]\,(R\,\mathbf{w})=&\{R\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel\,R^{-1}\}\,[R\,(\mathbf{w}_\parallel)],\\&+\{R\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp\,R^{-1}\}\,[(R\,(\mathbf{w}_\perp)].\end{aligned} \tag{65}$$

اما

$$\begin{aligned}R\,(\mathbf{w}_\parallel)&=(R\,\mathbf{w})_{\parallel'},\\R\,(\mathbf{w}_\perp)&=(R\,\mathbf{w})_{\perp'},\end{aligned} \tag{66}$$

که در طرف ِ راست موازی و عمود نسبت به $(R\,\mathbf{k})$ تعریف شده. به این ترتیب از (65) نتیجه می‌شود

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]_\parallel=R\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel\,R^{-1}, \tag{67}$$

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]_\perp=R\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp\,R^{-1}. \tag{68}$$

اثر ِ $[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel$ بر $\mathbf{k}$ موازی یِ $\mathbf{k}$ است:

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel\,\mathbf{k}=[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\parallel\,\mathbf{k}, \tag{69}$$

که ξ_f عدد است. هم‌چن‌ین، با اثردادن ِ دوطرف ِ (67) بر $(R\,\mathbf{k})$ معلوم می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]_{\|}=[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\|}. \tag{70}$$

برا يِ یک موج ِ طول‌ی، (64) اتحاد است و رابطه يِ پاش‌نده‌گی (63) با $(\psi_f)_{\|}$ ِ ناصفر می‌شود. به این ترتیب، رابطه يِ پاش‌نده‌گی برا يِ موج‌ها يِ طول‌ی می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\|}=0. \tag{71}$$

برا يِ موج‌ها يِ عرض‌ی، رابطه يِ (68) را در نظر ب‌گیرید. S را دوران‌ی می‌گیریم که $\mathbf{k}$ را تغییر ن‌می‌دهد. نتیجه می‌شود

$$S\,[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}\,S^{-1}=[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}. \tag{72}$$

پس هر یک از ویژه‌فضاها يِ S یک زیرفضا يِ ناوردا يِ $[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}$ است. اگر بُعد ِ فضا دستِ‌کم 4 باش‌د، متناظر با هر بردار ِ $\mathbf{e}$ که بر $\mathbf{k}$ عمود باش‌د یک دسته دوران هست‌ند که ویژه‌فضا يِ ناوردا يِ مشترک ِشان پهن‌ه يِ $\{\mathbf{k},\mathbf{e}\}$ است. از این نتیجه می‌شود $\mathbf{e}$ ویژه‌بردار ِ $[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}$ است. پس اگر $\mathbf{e}$ بر $\mathbf{k}$ عمود باش‌د،

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}\,\mathbf{e}=[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}\,\mathbf{e}, \tag{73}$$

که $[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}$ عدد است. هم‌چن‌ین، با اثردادن ِ (72) بر $(S\,\mathbf{e})$ نتیجه می‌شود این عدد به $\mathbf{e}$ هم بسته‌گی ندارد. پس اثر ِ $[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}$ بر زیرفضا يِ عمود بر $\mathbf{k}$ متناسب با اثر ِ هم‌ان‌ی است. این را می‌شد از لم ِ اول ِ شور [a] هم نتیجه گرفت. مجموعه يِ دوران‌ها یی که $\mathbf{k}$ را ثابت می‌گذارند نمایش ِ تعریف‌کن‌نده يِ گروه ِ دوران‌ها يِ زیرفضا يِ عمود بر $\mathbf{k}$ است. اگر بُعد ِ این زیرفضا دستِ‌کم 3 باش‌د، این نمایش کاهش‌ناپذیر است و از لم ِ اول شور [a] نتیجه می‌شود هر چیز ی که با همه يِ این دوران‌ها جابه‌جا شود متناسب با هم‌ان‌ی است [1].

هم‌چن‌ین، با اثردادن ِ دوطرف ِ (68) بر $(R\,\mathbf{e})$ معلوم می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]_{\perp}=[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega,-\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_{\perp}. \tag{74}$$

رابطه يِ پاش‌نده‌گی برا يِ موج‌ها يِ عرض‌ی می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp = 0. \tag{75}$$

اگر بُعد ـِ فضا 3 باش‌د، دوران‌ها یی که $\mathbf{k}$ را تغییر ن‌می‌دهند دوران‌ها یِ حول ـِ $\mathbf{k}$ اند. چن‌ین‌دوران‌ها یی دو ویژه‌بردار (جز $\mathbf{k}$) دارند، که آن‌ها را با $\mathbf{e}_\pm$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{e}_\pm := \mathbf{e}_1 \pm \mathrm{i}\,\mathbf{e}_2, \tag{76}$$

که $(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ یک کنج ـِ متعامد ـِ راست‌گرد است و $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ یک‌ه اند. به این ترتیب،

$$[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\perp\, \mathbf{e}_\pm = [\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\pm\, \mathbf{e}_\pm, \tag{77}$$

که $[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_+$ و $[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_-$ عدد اند. با استدلال‌ها یی مشابه دیده می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,R\,\mathbf{k})]_\pm = [\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\pm. \tag{78}$$

در این حالت دو نوع موج ـِ عرض‌ی داریم (راست‌گرد و چپ‌گرد). رابطه‌ یِ پاش‌نده‌گی یِ متناظر با موج ـِ $(\pm)$ می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\pm = 0, \tag{79}$$

و باز هم $[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_\pm$ تابع ـِ جهت ـِ $\mathbf{k}$ نیست.

سرانجام، اگر بُعد ـِ فضا 2 باش‌د (58) و (59) اتحاد اند. بردار ـِ یک‌ه یِ $\mathbf{e}$ را چنان می‌گیریم که $\{\mathbf{k}, \mathbf{e}\}$ یک کنج ـِ متعامد ـِ راست‌گرد باش‌د. تعریف می‌کن‌یم

$$(\mathbf{k}, \mathbf{e})\,\{\mathrm{mat}[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\} := [\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\,(\mathbf{k}, \mathbf{e}). \tag{80}$$

در این صورت از (56) نتیجه می‌شود مئلفه‌ها یِ $\{\mathrm{mat}[\Xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]\}$ به جهت ـِ $\mathbf{k}$ بسته‌گی ن‌دارند. در حالت ـِ کل‌ی دو راستا یِ ثابت‌نسبت‌به $\mathbf{k}$ هست‌ند که هر موج ـِ تک‌فام در یک ی از این راستاها است، و این راستاها لزومَن موازی با $\mathbf{k}$ یا عمود بر آن نیست‌ند.

اگر محیط تحت ـِ همه یِ تبدیل‌ها یِ متعامد متقارن باش‌د، وقت ی بعد ـِ فضا 3 یا 2 است وضع فرق می‌کن‌د. در این حالت می‌شود به جا یِ R ها یا S ها در رابطه‌ها یِ پیش انعکاس هم گذاشت. برا یِ فضا یِ 3 بُعدی، S را انعکاس ی می‌گیریم که

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{k}, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2). \tag{81}$$

(72) با این S برقرار است. این S را از چپ در دوطرف ِ (77) ضرب می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$[\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_- = [\xi_f(\mathrm{i}\,\omega, -\mathrm{i}\,\mathbf{k})]_+. \tag{82}$$

برا یِ فضا یِ 2 بُعدی، S را انعکاس ی می‌گیریم که

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{e}) = (\mathbf{k}, -\mathbf{e}). \tag{83}$$

در (58) و (59)، $\mathbf{e}$ را به جا یِ $\mathbf{w}$ می‌گذاریم و این S را به کار می‌بریم. (60) و (61) نتیجه می‌شوند. پس در این حالت هم، موج‌ها یِ طول‌ی و عرض‌ی داریم.

خلاصه، در مورد ِ موج‌ها یِ برداری یِ تک‌فام در محیط‌ها یِ هم‌گن و فضاهم‌سان‌گرد:

- اگر بُعد ِ فضا دستِ‌کم 4 باشد؛ در حالت ِ کل‌ی دو قطبش داریم: طول‌ی و عرض‌ی. راستا یِ قطبش ِ عرض‌ی هم در سرعت ِ موج وارد نمی‌شود.
- اگر بُعد ِ فضا 3 باشد؛ در حالت ِ کل‌ی سه قطبش داریم: طول‌ی، عرض‌ی یِ راست‌گرد، و عرض‌ی یِ چپ‌گرد. اگر علاوه بر این محیط نسبت به همه یِ تبدیل‌ها یِ متعامد تقارن داشته باشد، سرعت ِ انتشار برا یِ قطبش‌ها یِ راست‌گرد و چپ‌گرد یک‌سان می‌شود.
- اگر بُعد ِ فضا 2 باشد؛ در حالت ِ کل‌ی دو قطبش داریم. این دوقطبش نسبت به $\mathbf{k}$ ثابت اند، اما لزوماً موازی با $\mathbf{k}$ (طول‌ی) یا عمود بر آن (عرض‌ی) نیستند. اگر علاوه بر این محیط نسبت به همه یِ تبدیل‌ها یِ متعامد تقارن داشته باشد، دوقطبش طول‌ی و عرض‌ی می‌شوند.

6 مرجع

[1] Frederick W. Byron Jr. & Robert W. Fuller; "Mathematics of classical and quantum physics", (Dover, 1992) section 10.6

7 اسم ِ خاص

[a] Schur