X1-058 (2009/02/26)

مکانیک ِ آماری یِ دوران‌گر

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

سیستم‌ها یی بررس‌ی می‌شوند که فقط درجه‌ها یِ آزادی یِ دوران‌ی دارند. حالت‌ها یِ کوانتم‌ی یِ چن‌ین سیستم‌ها یی و نیز مکانیک ِ آماری یِ آن‌ها مطالعه می‌شوند.

1 جبر ِ گروه

گروه ِ فشرده یِ $\mathbb{G}$ را در نظر ب‌گیرید. متناظر با این گروه یک فضا یِ هیلبِرت [a] می‌سازند که یک پایه یِ آن $\{\mathfrak{e}(U) \mid U \in \mathbb{G}\}$ است. این فضا را با $\mathcal{A}(\mathbb{G})$ نشان می‌دهیم. حاصل‌ِضرب ِ درون‌ی در این فضا با این رابطه تعریف می‌شود.

$$[\mathfrak{e}(U)] \cdot [\mathfrak{e}(V)] = \delta(U\,V^{-1}), \tag{1}$$

که δ توزیع ی با این ویژه‌گی است که برا یِ تابع‌ها یِ هم‌وار ِ تعریف‌شده بر گروه،

$$\int \mathrm{d}U\;\delta(U)\,f(U) = f(\mathbf{1}), \tag{2}$$

که $\mathbf{1}$ هم‌ان‌ی یِ گروه و $\mathrm{d}U$ اندازه یِ هار [b] است. برا یِ گروه‌ها یِ گسسته، به جا یِ انتگرال‌گیری جمع رو یِ عنصرها یِ گروه به کار می‌رود. برا یِ گروه‌ها یِ فشرده

(گسسته یا پی‌وسته)، اندازه ِ هار [b] تحت ِ انتقال از چپ، انتقال از راست، و وارون‌کردن ناوردا است (مثلَن [1]):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(V\,U) &= \mathrm{d}U, \\ \mathrm{d}(U\,V) &= \mathrm{d}U, \\ \mathrm{d}(U^{-1}) &= \mathrm{d}U. \end{aligned} \tag{3}$$

از این‌جا دیده می‌شود

$$\delta(V\,U\,V^{-1}) = \delta(U). \tag{4}$$

1.1 تعامد ِ بزرگ

تعریف می‌کنیم

$$I_{\lambda\,\mu}{}^{a\,b}{}_{c\,d} := \int \mathrm{d}U\;[\mathrm{r}_\lambda(U)]^a{}_c\,[\mathrm{r}_\mu(U^{-1})]^b{}_d, \tag{5}$$

که r_λ نمایش ِ λ است. V را یک عضو ِ دل‌بخواه ِ $\mathbb{G}$ می‌گیریم. از ناوردایی ِ اندازه ِ هار [b] تحت ِ انتقال از چپ معلوم می‌شود

$$[\mathrm{r}_\lambda(V)]^{a'}{}_a\,I_{\lambda\,\mu}{}^{a\,b}{}_{c\,d}\,[\mathrm{r}_\mu(V^{-1})]^d{}_{d'} = I_{\lambda\,\mu}{}^{a'\,b}{}_{c\,d'}. \tag{6}$$

از لم ِ دوم ِ شور [c] نتیجه می‌شود I صفر است، مگر λ با μ برابر باش‌د [2]. پس

$$I_{\lambda\,\mu}{}^{a\,b}{}_{c\,d} = \delta_{\lambda\,\mu}\,A_\lambda{}^{a\,b}{}_{c\,d}. \tag{7}$$

از (6) و (7) نتیجه می‌شود

$$[\mathrm{r}_\lambda(V)]^{a'}{}_a\,A_\lambda{}^{a\,b}{}_{c\,d}\,[\mathrm{r}_\lambda(V^{-1})]^d{}_{d'} = A_\lambda{}^{a'\,b}{}_{c\,d'}. \tag{8}$$

از لم ِ اول ِ شور [c] نتیجه می‌شود [2]

$$A_\lambda{}^{a\,b}{}_{c\,d} = \delta^a_d\,B_\lambda{}^b{}_c. \tag{9}$$

سرانجام، از ناوردایی ِ اندازه ِ هار [b] تحت ِ انتقال از راست معلوم می‌شود

$$[\mathrm{r}_\lambda(V)]^c{}_{c'}\, A_\lambda{}^{a\,b}{}_{c\,d}\, [\mathrm{r}_\lambda(V^{-1})]^{b'}{}_b = A_\lambda{}^{a\,b'}{}_{c'\,d}, \tag{10}$$

و لم ِ اول ِ شور [c] نتیجه می‌دهد

$$A_\lambda{}^{a\,b}{}_{c\,d} = \delta^b_c\, C_\lambda{}^a{}_d. \tag{11}$$

از ترکیب ِ (7)، (9)، و (11) نتیجه می‌شود

$$I_{\lambda\,\mu}{}^{a\,b}{}_{c\,d} = D_\lambda\, \delta_{\lambda\,\mu}\, \delta^a_d\, \delta^b_c. \tag{12}$$

از (5) نتیجه می‌شود

$$I_{\lambda\,\lambda}{}^{a\,b}{}_{b\,d} = \int \mathrm{d}U\ [\mathrm{r}_\lambda(\mathbf{1})]^a{}_d,$$

$$= \mathrm{vol}(\mathbb{G})\, \delta^a_d, \tag{13}$$

که

$$\mathrm{vol}(\mathbb{G}) := \int \mathrm{d}V. \tag{14}$$

از ترکیب ِ (12) با (13)،

$$D_\lambda\, \dim_\lambda = \mathrm{vol}(\mathbb{G}), \tag{15}$$

که $\dim_\lambda$ بُعد ِ نمایش ِ λ است. به این ترتیب،

$$\int \mathrm{d}U\ [\mathrm{r}_\lambda(U)]^a{}_c\, [\mathrm{r}_\mu(U^{-1})]^b{}_d = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{G})}{\dim_\lambda}\, \delta_{\lambda\,\mu}\, \delta^a_d\, \delta^b_c. \tag{16}$$

این رابطه یِ تعامد ِ بزرگ است. از آن نتیجه می‌شود

$$\int \mathrm{d}U\ \chi_\lambda(U)\, \chi_\mu(U^{-1}) = \mathrm{vol}(\mathbb{G})\, \delta_{\lambda\,\mu}, \tag{17}$$

که

$$\chi_\lambda := \mathrm{tr}(\mathrm{r}_\lambda). \tag{18}$$

1.2 نمایش ِ منظم

نگاشت ِ reg با دامنه یِ $\mathbb{G}$ را چن‌ان تعریف می‌کن‌یم که اگر U عضو ِ $\mathbb{G}$ باش‌د، $\mathrm{reg}(U)$ نگاشت ی خط ی با دامنه یِ $\mathcal{A}(\mathbb{G})$ است و

$$[\mathrm{reg}(U)]\,[\mathfrak{e}(V)] = \mathfrak{e}(U\,V). \tag{19}$$

به ساده‌گی دیده می‌شود $\mathrm{reg}(U)$ یک‌ان‌ی است. عنصر ِ ماتریس‌ی یِ $\mathrm{reg}(U)$ را با $[\mathrm{reg}(U)](V,W)$ نمایش می‌ده‌یم. دیده می‌شود

$$[\mathrm{reg}(U)](V,W) = \delta(V^{-1}\,U\,W). \tag{20}$$

از (19) معلوم می‌شود نگاشت ِ reg یک نمایش (ِ خطی) است. این نمایش را می‌شود بر حسب ِ نمایش‌ها یِ (خطی یِ) کاهش‌ناپذیر ِ گروه بسط داد:

$$\mathrm{reg} = \bigoplus_{\lambda} n_\lambda\,\mathrm{r}_\lambda, \tag{21}$$

که n_λ تعداد ِ بارها یی که نمایش ِ λ در reg ظاهر شده. از (21) نتیجه می‌شود

$$\mathrm{tr}[\mathrm{reg}(U)] = \sum_{\lambda} n_\lambda\,\chi_\lambda(U). \tag{22}$$

از (4) و (20) دیده می‌شود

$$\mathrm{tr}[\mathrm{reg}(U)] = \mathrm{vol}(\mathbb{G})\,\delta(U). \tag{23}$$

به این ترتیب،

$$\delta(U) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{G})}\,\sum_{\lambda} n_\lambda\,\chi_\lambda(U). \tag{24}$$

از (24) نتیجه می‌شود

$$\int \mathrm{d}U\;\delta(U)\,\chi_\mu(U^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{G})}\,\sum_{\lambda} n_\lambda\,\int \mathrm{d}U\;\chi_\lambda(U)\,\chi_\mu(U^{-1}), \tag{25}$$

که با ترکیب ِ آن با (17)،

$$\mathrm{dim}_\mu = n_\mu. \tag{26}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{reg} = \bigoplus_{\lambda} \dim_{\lambda} \mathrm{r}_{\lambda}, \tag{27}$$

یعنی در reg هر نمایش ـِ کاهش‌ناپذیر به تعداد ـِ بُعد ـَ ش تکرار می‌شود.

2 حالت‌ها یِ دوران‌ی یِ دوران‌گر

حالت ـِ یک دوران‌گر با یک عضو ـِ گروه ـِ دوران ـِ 3 بُعدی مشخص می‌شود. به این ترتیب معلوم می‌شود فضا یِ هیلبِرت [a] ـِ متناظر با یک دوران‌گر هم‌ان جبر ـِ گروه ـِ SO(3) است. در بخش ـِ پیش دیدیم این فضا فضا یِ نمایش ـِ منظم ـِ این گروه است، و این که این نمایش تجزیه‌شدن‌ی است، چن‌ان که همه یِ نمایش‌ها یِ کاهش‌ناپذیر ـِ گروه در آن ظاهر می‌شوند، و هر نمایش به تعداد ـِ بُعد ـَ ش تکرار می‌شود. هر نمایش ـِ گروه ـِ دوران با j (اسپین ـِ نمایش) مشخص می‌شود، که عدد ی صحیح و نامنفی است. (در مورد ـِ نمایش‌ها یِ SU(2)، گستره یِ اسپین عددها یی است که دوبرابر ـِشان صحیح و نامنفی است.) فضا یِ متناظر با هر نمایش ـِ کاهش‌ناپذیر $(2\,j+1)$ بُعدی است، که j اسپین ـِ نمایش است. به این ترتیب یک پایه یِ جبر ـِ گروه ـِ SO(3) را می‌شود مجموعه یِ $|j,k,m\rangle$ ها گرفت، که j اسپین ـِ نمایش است، k مشخص‌کن‌نده یِ یک نمایش ـِ اسپین j بین ـِ $(2\,j+1)$ نمایش ـِ اسپین j است که در نمایش ـِ منظم ظاهر می‌شوند، و m مشخص‌کن‌نده یِ یک بردار در یک پایه یِ یک نمایش ـِ خاص ـِ اسپین j است. k و m هر یک $(2\,j+1)$ مقدار می‌گیرند. مقدارها یِ m را می‌شود عددها یِ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ یک ی از مولدها یِ گروه (مثلَن J_3) گرفت. در این صورت m عدد ی بین ـِ j و $(-j)$ است که اختلاف ـَ ش با j صحیح است. برا یِ SU(2) هم هم‌این‌ها نتیجه می‌شود، جز این که کافی است $(2\,j)$ صحیح باش‌د.

هَمیلتِن‌ی یِ یک دوران‌گر

$$H = \frac{1}{2\,I_1}\,(J_1')^2 + \frac{1}{2\,I_2}\,(J_2')^2 + \frac{1}{2\,I_3}\,(J_3')^2 \tag{28}$$

است، که I_i لختی یِ دوران‌ی در راستا یِ محور ـِ اصل‌ی یِ i، و J_i' تکانه یِ زاویه‌ای یِ چارچوبِ‌جسم در راستا یِ محور ـِ اصل‌ی یِ i است. مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای در چارچوب ـِ جسم، با مئلفه‌ها یِ تکانه یِ زاویه‌ای در چارچوب ـِ فضا (J_i ها)

جابه‌جا می‌شوند و جابه‌جاگرها یِشان با یک‌دیگر هم مثل ـِ جابه‌جاگرها يِ J_i ها با هم است، جز با یک منفی يِ اضافی [3]:

$$[J'_p, J'_q] = -\mathrm{i}\,\hbar\,\varepsilon^r{}_{p\,q}\,J'_r, \tag{29}$$

که ε تانسر ـِ لِوی‌چیویتا [d] است. هم‌چنین،

$$\sum_p (J'_p)^2 = \sum_p (J_p)^2. \tag{30}$$

در واقع شاخص ـِ k در بردارهايِ‌پایه يِ $|j, k, m\rangle$ را می‌شود متناظر با ویژه‌مقدار ـِ مثلَن J'_3 گرفت. با این انتخاب و انتخاب ـِ m متناظر با ویژه‌مقدار ـِ J_3، بردار ـِ $|j, k, m\rangle$ ویژه‌بردار ـِ هم‌زمان ـِ $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = \mathbf{J}'\cdot\mathbf{J}'$ و J_3 و J'_3 است:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J})\,|j, k, m\rangle &= \hbar^2\,j\,(j+1)\,|j, k, m\rangle,\\
J'_3\;|j, k, m\rangle &= \hbar\,k\,|j, k, m\rangle,\\
J_3\,|j, k, m\rangle &= \hbar\,m\,|j, k, m\rangle.
\end{aligned} \tag{31}$$

۳ مکانیک ـِ آماری

تابع ـِ پارش ـِ کانونیک برا يِ سیستم ی با هَمیلتِن‌ی يِ H

$$Z = \mathrm{tr}[\exp(-\beta\,H)] \tag{32}$$

است، که

$$\beta := \frac{1}{k_\mathrm{B}\,T}, \tag{33}$$

T دما يِ مطلق، و k_B ثابت ـِ بُلتس‌مان [e] است. برا يِ دوران‌گر، با استفاده از (28) و این که مئلفه‌ها يِ $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}'$ جابه‌جا می‌شوند نتیجه می‌شود

$$Z = \sum_{j,k}(2\,j+1)\,\langle j, k, m|\exp\left\{-\beta\,\left[\sum_{p=1}^{3}\frac{1}{2\,I_p}\,(J'_p)^2\right]\right\}|j, k, m\rangle. \tag{34}$$

در واقع عنصرِماتریس‌ی یِ طرف ِ راست به m بسته‌گی ن‌دارد و ضریب ِ $(2\,j+1)$ هم از هم‌ان جا آمده. برا یِ ادامه یِ کار شکل ِ خاص ِ H (یعنی لخت‌ی‌یِ‌دوران‌ی‌ها) لازم است. در حالت ِ خاص ی که جسم فرفره یِ متقارن است $(I_1 = I_2)$ بردارها یِ $|j,k,m\rangle$ ویژه‌بردارها یِ هَمیلتِن‌ی اند:

$$H = \left(\frac{1}{2\,I_3} - \frac{1}{2\,I_1}\right)\,(J_3')^2 + \frac{1}{2\,I_1}\,\mathbf{J}'\cdot\mathbf{J}', \tag{35}$$

و

$$H\,|j,k,m\rangle = \hbar^2\,\left[k^2\,\left(\frac{1}{2\,I_3} - \frac{1}{2\,I_1}\right) + j\,(j+1)\,\frac{1}{2\,I_1}\right]\,|j,k,m\rangle. \tag{36}$$

از این‌جا،

$$Z_{\rm sy} = \sum_{j,k}(2\,j+1)\,\exp\left\{-\beta\,\hbar^2\,\left[k^2\,\left(\frac{1}{2\,I_3} - \frac{1}{2\,I_1}\right) + j\,(j+1)\,\frac{1}{2\,I_1}\right]\right\}. \tag{37}$$

در دو حالت ِ خاص‌تر، مسئله از این هم ساده‌تر می‌شود. برا یِ فرفره یِ کروی همه یِ لخت‌ی‌یِ‌دوران‌ی‌ها با هم برابر اند. در این حالت،

$$Z_{\rm sp} = \sum_{j}(2\,j+1)^2\,\exp\left[-j\,(j+1)\,\frac{\beta\,\hbar^2}{2\,I_1}\right]. \tag{38}$$

برا یِ میله I_3 صفر است. در این حالت فقط جمله‌ها یی از مجموع ِ طرف ِ راست ِ (37) ناصفر اند که k ِشان صفر است. از این‌جا،

$$Z_{\rm r} = \sum_{j}(2\,j+1)\,\exp\left[-j\,(j+1)\,\frac{\beta\,\hbar^2}{2\,I_1}\right]. \tag{39}$$

4 مکانیک ِ آماری یِ کلاسیک (دما یِ زیاد)

تعریف می‌کن‌یم

$$X_p := \beta^{1/2}\,J_p'. \tag{40}$$

این‌ها در دما یِ زیاد $(\beta \to 0)$ با هم جابه‌جا می‌شوند، به این معنی که

$$\langle \Delta X\rangle \sim (\beta^{1/2}\,\hbar\,\langle X\rangle)^{1/2}, \tag{41}$$

یعنی در $(\beta\to 0)$ اگر مقدار ِ چشم‌داشت‌ی ی ِ X_p ها را ناصفر ب‌گیریم، مقدار ِ چشم‌داشت‌ی ی ِ (ΔX_p) از مرتبه ی ِ $\beta^{1/4}$ می‌شود. این یعنی X_p ها کلاسیک می‌شوند. دما ی ِ زیاد، یعنی دما یی که در آن به ازا ی ِ همه ی ِ p ها،

$$(\beta\,\hbar^2)\ll I_p. \tag{42}$$

به این ترتیب در دما ی ِ زیاد، در (32) جمع رو ی ِ حالت‌ها را می‌شود به انتگرال تبدیل کرد:

$$\mathrm{tr}A=\int \mathrm{d}^3x\; f(\mathbf{x})\,A(\mathbf{x}), \tag{43}$$

که A تابع ِ X_p ها است، و $A(\mathbf{x})$ یعنی همان A که در آن به جا ی ِ X_p عدد ِ x_p آمده.

U را یک عضو ِ گروه می‌گیریم. داریم

$$\{[\mathrm{reg}(U)]\,A\,[\mathrm{reg}(U)]^{-1}\}(\mathbf{x})=A(U\,\mathbf{x}), \tag{44}$$

که (چون با تبدیل ِ تشابه‌ی رد تغییر ن‌می‌کن‌د) نتیجه می‌ده‌د

$$\int \mathrm{d}^3x\; f(\mathbf{x})\,A(U\,\mathbf{x})=\int \mathrm{d}^3x\; f(\mathbf{x})\,A(\mathbf{x}). \tag{45}$$

از این‌جا و با استفاده از این که دترمینان ِ ژاکُب‌ی ی ِ تبدیل ِ $\mathbf{x}\to(U\,\mathbf{x})$ برابر ِ یک است،

$$f(U\,\mathbf{x})=f(\mathbf{x}), \tag{46}$$

یعنی f تابع ِ جهت ِ $\mathbf{x}$ نیست. داریم

$$\sum_{k,m}|j,k,m\rangle\langle j,k,m|=\delta_{X^2,\,\beta\,\hbar^2\,j\,(j+1)}, \tag{47}$$

که نتیجه می‌ده‌د

$$\mathrm{tr}[\delta_{X^2,\,\beta\,\hbar^2\,j\,(j+1)}]=(2\,j+1)^2. \tag{48}$$

در حد ی که متغیرها ی ِ X کلاسیک (پی‌وسته) می‌شوند،

$$\delta_{X^2,\,\beta\,\hbar^2\,j\,(j+1)} \to \delta\{[j_0(X)-j]/(\Delta j)\}, \tag{49}$$

که

$$X^2 =: \beta\,\hbar^2\,[j_0(X)]\,[j_0(X)+1], \tag{50}$$

و Δj فاصله ي دو مقدار ِ متوالی ي j از هم است. Δj برا ي SO(3) و SU(2) برابر ِ به‌ترتیب 1 و (1/2) است. از (43)، (48)، و (49) نتیجه می‌شود در حد ِ $(\beta \to 0)$ و $[\beta\,\hbar^2\,j\,(j+1)]$ ناصفر،

$$\int \mathrm{d}^3x\; f(x)\,\delta\{[j_0(X)-j]/(\Delta j)\} = (2\,j+1)^2, \tag{51}$$

یا

$$4\,\pi\,(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,j^2\,f[(\beta\,\hbar^2)^{1/2}\,j]\,\Delta j = 4\,j^2. \tag{52}$$

از این استفاده شده که j بزرگ است. به این ترتیب،

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,\Delta j}. \tag{53}$$

پس در دما ي زیاد، (32) می‌شود

$$Z = \frac{1}{\pi\,(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,\Delta j}\;\prod_p (2\,\pi\,I_p)^{1/2}, \tag{54}$$

یا

$$Z = \frac{8\,\pi^2}{\Delta j}\;\prod_p \frac{(2\,\pi\,I_p\,k_\mathrm{B}\,T)^{1/2}}{h}. \tag{55}$$

دیده می‌شود ضریب ِ حاصلِ‌ضرب ِ طرف ِ راست، حجم ِ گروه است [4].

برا ي فرفره ي متقارن، مانسته ي این نتیجه را می‌شود ساده‌تر هم به دست آورد. برا ي این کار (37) را به شکل ِ انتگرال می‌نویس‌یم (و j را بزرگ می‌گیریم):

$$\begin{aligned} Z_\mathrm{sy} &= \frac{1}{\Delta j}\int_0^\infty \mathrm{d}j\;\int_{-j}^{j}\mathrm{d}k\;2\,j\;\exp\left\{-\beta\,\hbar^2\;\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)\,k^2+\frac{j^2}{2\,I_1}\right]\right\},\\ &= \frac{2}{\Delta j}\int_0^\infty \mathrm{d}j\;\int_0^{j}\mathrm{d}k\;2\,j\;\exp\left\{-\beta\,\hbar^2\;\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)\,k^2+\frac{j^2}{2\,I_1}\right]\right\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Delta j}\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_0^\infty \mathrm{d}k\, 2\,(k+u)\\
&\quad\times\exp\left\{-\beta\,\hbar^2\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)k^2+\frac{(k+u)^2}{2\,I_1}\right]\right\},\\
&= \frac{4}{\Delta j}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\,\rho^2\,(\cos\phi+\sin\phi)\\
&\quad\times\exp\left\{-\beta\,\hbar^2\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)\cos^2\phi+\frac{(\cos\phi+\sin\phi)^2}{2\,I_1}\right]\rho^2\right\},\\
&= \frac{\pi^{1/2}}{(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,\Delta j}\\
&\quad\times\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\,(\cos\phi+\sin\phi)\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)\cos^2\phi+\frac{(\cos\phi+\sin\phi)^2}{2\,I_1}\right]^{-3/2},\\
&= \frac{\pi^{1/2}}{(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,\Delta j}\\
&\quad\times\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\cos^2\phi}\,(1+\tan\phi)\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)+\frac{1}{2\,I_1}\,(1+\tan\phi)^2\right]^{-3/2},\\
&= \frac{\pi^{1/2}}{(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,\Delta j}\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}v}{2}\left[\left(\frac{1}{2\,I_3}-\frac{1}{2\,I_1}\right)+\frac{v}{2\,I_1}\right]^{-3/2},\\
&= \frac{\pi^{1/2}}{(\beta\,\hbar^2)^{3/2}\,\Delta j}\,(2\,I_1)\,(2\,I_3)^{1/2}, \qquad (56)
\end{aligned}
$$

و از آن‌جا،

$$Z_{\rm sy}=\frac{8\,\pi^2}{\Delta j}\left[\frac{(2\,\pi\,I_1\,k_{\rm B}\,T)^{1/2}}{h}\right]^2\frac{(2\,\pi\,I_3\,k_{\rm B}\,T)^{1/2}}{h}, \qquad (57)$$

که همان (55) برا یِ $I_2=I_1$ است.

برا یِ میله (55) یا (57) را نمی‌شود به کار برد، چون (42) به ازا یِ $p=3$ برقرار نیست. در این حالت (39) را به انتگرال تبدیل می‌کنیم (و j را بزرگ می‌گیریم):

$$Z_{\rm r}=\frac{1}{\Delta j}\int_0^\infty \mathrm{d}j\;2\,j\;\exp\left(-\frac{\beta\,\hbar^2}{2\,I_1}\,j^2\right),$$

$$= \frac{1}{\Delta j}\,\frac{2\,I_1}{\beta\,\hbar^2}, \tag{58}$$

یا

$$Z_{\mathrm{r}} = \frac{4\,\pi}{\Delta j}\,\left[\frac{(2\,\pi\,I_1\,k_{\mathrm{B}}\,T)^{1/2}}{h}\right]^2. \tag{59}$$

ضریب ِ مجذورِکروشه در طرف ِ راست، برا یِ SO(3) مساحت ِ کره یِ یکه و برا یِ SU(2) دوبرابر ِ آن است.

5 مرجع‌ها

[1] J. J. Duistermaat & J. A. C. Kolk; "Lie groups", (Springer Verlag, 1999) section 3.13

[2] H. F. Jones; "Groups, representations and physics", second edition, (Institute of Physics, 2002) section 4.1

[3] محمد خرمی؛ " چرخ‌ش ِ جسم ِ صلب، و فرمول‌بندی یِ فضا یِ فاز"، X1-013 (2002/12/08)

[4] محمد خرمی؛ " حالت‌ها یِ دوران‌ی و فضا یِ فاز"، X1-040 (2006/29/09)

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Hilbert

[b] Haar

[c] Schur

[d] Levi-Civita

[e] Boltzmann