X1-059 (2009/04/24)

انتقال ِ موازی در دو بُعد

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

ويژه‌گی‌ها يِ نگاشت ِ انتقال ِ موازی در دو بُعد بررس‌ی می‌شود.

1 انتقال ِ موازی

معادله‌ ي انتقال ِ موازی ي بردار ِ v بر خم ِ C

$$\dot{v}^j(t) + [u^m(t)]\,\{\Gamma^j{}_{m\,l}[r(t)]\}\,[v^l(t)] = 0 \tag{1}$$

است [1]، که t پارامتر ِ خم، $r(t)$ مکان ِ نقطه ای از خم با پارامتر ِ t، و Γ هم‌وست‌ار است. $\dot{X}$ مشتق ِ X نسبت به t است، و

$$u^m := \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

(1) را می‌شود به شکل ِ بسته‌ ي

$$\dot{v} + u^m\,\Gamma_m\,v = 0 \tag{3}$$

هم نوشت، که Γ_k ماتریس ی است که مئلفه‌ها يَش هم‌ان مئلفه‌ها يِ هم‌وست‌ار اند. $\dot{v}$ هم بردار ی است که مئلفه‌ها يَش مشتق ِ مئلفه‌ها يِ v نسبت به t اند. با معرف‌ی يِ

$$\Gamma(t) := [u^m(t)]\,\{\Gamma_m[r(t)]\}, \tag{4}$$

می‌شود رابطه‌ ي انتقال ِ موازی را به شکل ِ

$$\dot{v} + \Gamma\, v = 0 \tag{5}$$

هم نوشت. این یک معادله‌ ي خطی برا ي v است. پس یک نگاشت ِ خطی ي M هست که

$$v(t) = [M(t, t')]\, v(t'). \tag{6}$$

به $[M(t, t')]$ نگاشت ِ انتقال ِ موازی بر خم ِ C از نقطه ي t' تا نقطه ي t می‌گویند. با تعریف ِ

$$M(t) := M(t, 0), \tag{7}$$

داریم

$$v(t) = [M(t)]\,[v(0)]. \tag{8}$$

روشن است که

$$M(t, t'') = [M(t, t')]\,[M(t', t'')]. \tag{9}$$

از این از جمله نتیجه می‌شود نگاشت ِ انتقال ِ موازی وارون‌پذیر است.

می‌گوییم انتقال ِ موازی (یا هم‌وستار) با حاصل‌ِضرب ِ داخلی (یا متریک) سازگار است، اگر

$$\dot{g}_{j\,k} - u^m\,({\Gamma^l}_{m\,j}\, g_{l\,k} + {\Gamma^l}_{m\,k})\, g_{j\,l} = 0, \tag{10}$$

یا به شکل ِ بسته،

$$\dot{g} - (\Gamma^* \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma^*)\, g = 0. \tag{11}$$

از (1) و مانسته ي آن برا ي w، همراه با (10)؛ یا از (5) و مانسته ي آن برا ي w، همراه با (11)؛ دیده می‌شود اگر v و w دو بردار باشند که بر خم ِ C انتقال‌ِموازی می‌یابند،

و اگر این انتقالِ‌موازی با حاصلِ‌ضرب ـِ داخلِ‌ی سازگار باشد، آن‌گاه حاصلِ‌ضرب ـِ داخلِ‌ی یِ این دوبردار بر خم ثابت می‌ماند:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[g(v,w)\right]=0. \tag{12}$$

C را خم ی بسته ب‌گیرید که ابتدا و انتها یِ آن با به‌ترتیب $t=0$ و $t=1$ متناظر اند. به $M(1)$ هُلونُم‌ی می‌گویند. این نگاشت از یک فضا یِ خطی (فضا یِ مماس در ابتدا یِ خم) به هم‌ان فضا است. اگر خم ـِ C درون ـِ ناحیه ای سمت‌پذیر باشد، یعنی درون ـِ ناحیه ای باشد که در آن کنج‌ها یِ چپ‌گرد و راست‌گرد به طور ـِ یک‌تا تعریف می‌شوند، آن‌گاه از پی‌وسته‌گی یِ $M(t)$ و وارون‌پذیری یِ آن نتیجه می‌شود $M(t)$ یک کنج ـِ راست‌گرد را به یک کنج ـِ راست‌گرد تبدیل می‌کند. این نتیجه برا یِ $M(1)$ هم درست است. پس

$$\det[M(1)]>0. \tag{13}$$

اگر خم ـِ بسته یِ C قابل ـِ انقباض ـِ پی‌وسته به خم ی شامل ـِ فقط یک نقطه باشد، چن‌ان که طی ـِ این فرآیند ابتدا یِ خم (پایه یِ خم) ثابت ب‌ماند (یعنی اگر C هُموتُپ‌ی‌بدیهی باشد) هم $\det[M(1)]$ مثبت است. برا یِ دیدن ـِ این $C(s)$ را خم ی بسته ب‌گیرید که بر $s\in[0,1]$ تعریف شده، تابع ی پی‌وسته از s است، به ازا یِ همه یِ s ها یِ دامنه اَش پایه اَش ثابت است، $C(0)$ هم‌ان C است، و $C(1)$ خم ـِ ثابت (تک‌نقطه‌ای) است. در این صورت هُلونُم‌ی یک تابع ـِ پی‌وسته از s است، که نتیجه می‌دهد دترمینان ـِ آن هم یک تابع ـِ پی‌وسته از s است. هُلونُم‌ی به ازا یِ $s=1$ هم‌ان‌ی است. پس در $s=1$ دترمینان ـِ هُلونُم‌ی یک (و در نتیجه مثبت است). دترمینان ـِ هُلونُم‌ی صفر ن‌می‌شود، چون هُلونُم‌ی وارون‌پذیر است. یک تابع ـِ پی‌وسته که بر یک ناحیه یِ هم‌بند تعریف شده و صفر ن‌می‌شود، تغییرِعلامت ن‌می‌دهد. پس دترمینان ـِ هُلونُم‌ی با تغییر ـِ s تغییرِعلامت ن‌می‌دهد. به این ترتیب در این حالت هم (13) درست است.

اگر انتقالِ‌موازی با حاصلِ‌ضرب ـِ داخلِ‌ی سازگار باشد، آن‌گاه $M(1)$ یک نگاشت ـِ متعامد است. پس اگر C درون ـِ ناحیه ای سمت‌پذیر باشد، یا هُموتُپ‌ی‌بدیهی باشد، و انتقالِ‌موازی هم با حاصلِ‌ضرب ـِ داخلِ‌ی سازگار باشد، هُلونُم‌ی متعامد و دترمینان ـِ آن مثبت است، در واقع دترمینان ـِ آن یک است، یعنی هُلونُم‌ی یک نگاشت ـِ دَوَران است.

2 هُلونُم‌ی در دوبُعد

یک فضا یِ دوبُعدی و خم ِ بسته یِ C در آن را در نظر ب‌گیرید و فرض کن‌ید هُلونُم‌ی یک دَوَران است. دَوَران در یک فضا یِ دوبُعدی با فقط یک زاویه مشخص می‌شود. این زاویه را با $\theta(C)$ نشان می‌ده‌یم. خم ِ C' را چن‌ان می‌گیریم که برد و جهت ِ آن هم‌ان برد و جهت ِ C باش‌د، اما پایه اَش لزومَن با پایه یِ C یک‌ی ن‌باش‌د. اگر

$$r'(0) = r(t_1), \tag{14}$$

که $r'(t)$ و $r(t)$ مقدار ِ خم‌ها یِ به‌ترتیب C و C' در t اند، آن‌گاه

$$M'(1) = M(t_1, 0)\, M(1, t_1), \tag{15}$$

و

$$M(1) = M(1, t_1)\, M(t_1, 0), \tag{16}$$

که M و M' انتقالِ‌موازی‌ها یِ متناظر با به‌ترتیب C و C' اند. پس $M'(1)$ تبدیلِ‌تشابه‌ی‌یافته یِ $M(1)$ است. از جمله معلوم می‌شود

$$\mathrm{tr}[M'(1)] = \mathrm{tr}[M(1)], \tag{17}$$

که نتیجه می‌ده‌د

$$\cos[\theta(C')] = \cos[\theta(C)]. \tag{18}$$

با تغییردادن ِ پی‌وسته یِ t_1، مقدار ِ θ هم به طور ِ پی‌وسته تغییر می‌کن‌د، اما $\cos\theta$ ثابت می‌مان‌د. پس خود ِ θ هم باید ثابت ب‌مان‌د. به این ترتیب معلوم می‌شود θ به پایه یِ خم بسته‌گی ن‌دارد.

خم‌ها یِ C و C' را در نظر ب‌گیرید. $(C'\,C)$ را خم ی تعریف می‌کن‌یم شامل ِ دو تکه که تکه یِ اول C و تکه یِ دوم C' است. این حاصلِ‌ضرب وقت ی تعریف می‌شود که انتها یِ C ابتدا یِ C' باش‌د. C^{-1} را هم خم ی است که شکل ِ هندس‌ی یِ آن هم‌ان شکل ِ C است، اما سو یِ پیمایش ِ آن وارون شده است، چن‌ان که ابتدا و انتها یِ C^{-1} به ترتیب انتها و ابتدا یِ C است.

خم‌ها یِ C_1، C_2، و C_3 را چن‌ان ب‌گیرید که ابتدا یِ هرسه یک‌سان، و انتها یِ هرسه یک‌سان باش‌د. خم‌ها یِ $(C_2^{-1}\,C_1)$ و $(C_3^{-1}\,C_2)$ و $(C_3^{-1}\,C_1)$، هرسه بسته‌اند. فرض کن‌ید هُلونُم‌ی یِ خم‌ها یِ $(C_2^{-1}\,C_1)$ و $(C_3^{-1}\,C_2)$ دَوَران است. داریم

$$\begin{aligned} M(C_3^{-1}\,C_1) &= [M(C_3^{-1})]\,[M(C_1)],\\ &= [M(C_3^{-1})]\,[M(C_2)]\,[M(C_2^{-1})]\,[M(C_1)],\\ &= [M(C_3^{-1}\,C_2)]\,[M(C_2^{-1}\,C_1)], \end{aligned} \tag{19}$$

که $[M(C)]$ نگاشت ِ انتقال ِ موازی بر خم ِ C است. از (19) نتیجه می‌شود $[M(C_3^{-1}\,C_1)]$ هم یک دَوَران است، و

$$\theta(C_3^{-1}\,C_1) = \theta(C_3^{-1}\,C_2) + \theta(C_2^{-1}\,C_1). \tag{20}$$

C را یک خم ِ بسته‌ یِ کوچک ب‌گیرید. می‌خواهیم هُلونُم‌ی را تا اول‌ین مرتبه یِ نابدیه‌ی نسبت به اندازه یِ این خم حساب کن‌یم. از (5) نتیجه می‌شود

$$\dot{M}(t) = -\{\Gamma[r(t)]\}\,M(t), \tag{21}$$

که می‌شود آن را چن‌ین نوشت.

$$M(t) = 1 - \int_0^t \mathrm{d}t'\;\{\Gamma[r(t')]\}\,M(t'). \tag{22}$$

با این رابطه می‌شود M را به روش ِ تقریب‌ها یِ متوالی حساب کرد. پارامتر ِ خم را از 0 تا 1 می‌گیریم. تا مرتبه یِ دوم نسبت به اندازه یِ خم،

$$\begin{aligned} M(C) &= 1 - \int_0^1 \mathrm{d}t\;\Gamma[r(t)] + \int_0^1 \mathrm{d}t\;\int_0^t \mathrm{d}t'\;\{\Gamma[r(t)]\}\,\{\Gamma[r(t')]\} + o(C^2),\\ &= 1 - \oint_C \mathrm{d}r^n\,\Gamma_n(r)\\ &\quad + \{\Gamma_m[r(0)]\}\,\{\Gamma_n[r(0)]\}\;\int_0^1 \mathrm{d}t\;\int_0^t \mathrm{d}t'\;\frac{\mathrm{d}r^m(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}r^n(t')}{\mathrm{d}t'} + o(C^2), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \int_S \mathrm{d}r^m \wedge \mathrm{d}r^n\, \partial_m \Gamma_n \\
&\quad + \{\Gamma_m[r(0)]\}\, \{\Gamma_n[r(0)]\} \int_0^1 \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}r^m(t)}{\mathrm{d}t}\, [r^n(t) - r^n(0)] + o(C^2), \\
&= 1 - \int_S \mathrm{d}r^m \wedge \mathrm{d}r^n\, \partial_m \Gamma_n \\
&\quad + \{\Gamma_m[r(0)]\}\, \{\Gamma_n[r(0)]\} \oint_C \mathrm{d}r^m\, [r^n - r^n(0)] + o(C^2), \\
&= 1 - \int_S \mathrm{d}r^m \wedge \mathrm{d}r^n\, \partial_m \Gamma_n - \{\Gamma_m[r(0)]\}\, \{\Gamma_n[r(0)]\} \int_S \mathrm{d}r^m \wedge \mathrm{d}r^n + o(C^2), \\
&= 1 - \int_S \mathrm{d}r^m \wedge \mathrm{d}r^n\, (\partial_m \Gamma_n + \Gamma_m\, \Gamma_n) + o(C^2),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

که S رویه ای است که مرز ِ آن خم ِ بسته ي C است. با تعریف ِ تانسور ِ خم‌ش به شکل ِ

$$
R_{m\,n} = \partial_m \Gamma_n - \partial_n \Gamma_m + \Gamma_m\, \Gamma_n - \Gamma_n\, \Gamma_m, \tag{24}
$$

(مثلَن [1]) نتیجه می‌شود

$$
M(C) = 1 - \frac{1}{2} \int_S \mathrm{d}r^m \wedge \mathrm{d}r^n\, R_{m\,n} + o(C^2). \tag{25}
$$

این نتیجه برا يِ هر بُعد ی درست است. وقت ی انتقالِ‌موازی با حاصلِ‌ضرب ِ داخل‌ی سازگار است، جمله يِ دوم در طرف ِ راست ِ (25) یک نگاشت ِ پادمتقارن است (تا هُلونُم‌ی یک نگاشت ِ متعامد شود). پس در دو بُعد و برا يِ انتقالِ‌موازی یی که با حاصلِ‌ضرب ِ داخل‌ی سازگار است، یک اسکالر ِ $\mathcal{R}$ (اسکالر ِ خم‌ش) هست که

$$
R_{m\,n} = \frac{1}{2}\, \mathcal{R}\, \varepsilon_{m\,n}\, \varepsilon, \tag{26}
$$

که ε تانسور ِ لِوی‌چیویتا [a] است. نتیجه می‌شود

$$
M(C) = 1 - \frac{1}{2}\, S\, \mathcal{R}\, \varepsilon + o(C^2), \tag{27}
$$

که نتیجه می‌دهد

$$\theta(C) = \frac{1}{2}\, S\, \mathcal{R}, \tag{28}$$

که S مساحت ـِ رویه ای است که مرز ـِ آن C است.

از (20) و (28) این نتیجه به دست می‌آید. یک فضا یِ دوبُعدی در نظر بگیرید که در آن یک انتقالِ‌موازی یِ سازگار با حاصلِ‌ضربِ‌داخلی تعریف شده. اگر هُلونُم‌ی یِ خم ـِ بسته یِ C دَوَران باشد و خم ـِ بسته یِ C' به طور ـِ پی‌وسته از C به دست آید، هُلونُم‌ی یِ خم ـِ بسته یِ C' هم دَوَران است و

$$\theta(C') = \theta(C) + \frac{1}{2} \int_S \mathrm{d}S\, \mathcal{R}, \tag{29}$$

که S رویه ای است که مرز ـِ آن C' و C است. از جمله معلوم می‌شود اگر خم ـِ بسته یِ C مرز ـِ رویه یِ S باشد،

$$\theta(C) = \frac{1}{2} \int_S \mathrm{d}S\, \mathcal{R}. \tag{30}$$

3 مرجع

[1] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics”, 2nd edition (Institute of Physics Publishing, 2003) chapter 7

4 اسم ـِ خاص

[a] Levi-Civita