X1-061 (2009/07/30)

پدیده ی ِ دِ هاس- فان آلفِن در دو بُعد

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

دیامغناطیس ِ یک گاز ِ فرمیونی ی ِ بی‌برهمکنش ِ مقید به دو بُعد، در دما ی ِ صفر بررسی میشود و یک رفتار ِ نوسانی در پذیرفتاری ی ِ آن به دست می‌آید.

1 دوقطبی ی ِ مغناطیسی

یک گاز ِ بی‌برهمکنش در حضور ِ میدان ِ مغناطیسی ی ِ یکنواخت ِ $\mathbf{B}$ را در نظر بگیرید، که ذره‌ها ی ِ آن با انرژی‌ی ِ پتانسیل ِ مقیدکننده ی ِ U به یک حجم مقید اند. H (همیلتنی ی ِ تکذره‌ای ی ِ این سیستم) به شکل ِ

$$H := \frac{1}{2\,\mu}\,(\mathbf{p} - q\,\mathbf{A})\cdot(\mathbf{p} - q\,\mathbf{A}) + U(\mathbf{r}) \tag{1}$$

است، که $\mathbf{r}$ مکان و $\mathbf{p}$ تکانه است. μ جرم ِ ذره، q بار ِ ذره، و $\mathbf{A}$ پتانسیل ِ برداری است:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\times\mathbf{r}. \tag{2}$$

عملگرِ دوقطبی یِ مغناطیسی برا یِ یک ذره

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2}\,\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \tag{3}$$

است، که $\dot{X}$. مشتقِ X نسبت به زمان (t) است. از جابه‌جاگرها یِ معمول بینِ مکان و تکانه

$$\begin{aligned}[r^j, r^k] &= 0,\\ [r^j, p_k] &= \mathrm{i}\,\hbar\,\delta^j_k,\\ [p_j, p_k] &= 0,\end{aligned} \tag{4}$$

همراه با معادله یِ هَیزِنبِرگ [1] برا یِ تحولِ عملگرِ X که صریحَن به زمان وابسته نیست:

$$\mathrm{i}\,\hbar\,\dot{X} = [X, H], \tag{5}$$

نتیجه میشود

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu}\,(\mathbf{p} - q\,\mathbf{A}), \tag{6}$$

و از آنجا

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2\,\mu}\,\mathbf{r}\times(\mathbf{p} - q\,\mathbf{A}), \tag{7}$$

که میشود آن را به این شکل نوشت.

$$\mathbf{m} = -\nabla_{\mathbf{B}} H. \tag{8}$$

$\nabla_{\mathbf{B}}$ مشتقگیری نسبت به $\mathbf{B}$ است.

$\mathbf{u}$ را یک بردارِ یکه در راستا یِ $\mathbf{B}$ میگیریم و B را چنین تعریف میکنیم.

$$\mathbf{B} =: B\,\mathbf{u}. \tag{9}$$

حالت ی را بررسی میکنیم که حجمِ مقیدکننده یک استوانه به ارتفاعِ D و مساحتِمقطعِ S است، چنان که محورِ این استوانه با $\mathbf{u}$ موازی است. در این صورت،

$$H = H_{\mathrm{c}} + H_{\mathrm{f}}, \tag{10}$$

که $H_{\rm c}$ تابع ِ فقط $\mathbf{r}_\perp$ و $\mathbf{p}_\perp$، و $H_{\rm f}$ تابع ِ فقط $\mathbf{r}_\parallel$ و $\mathbf{p}_\parallel$ است. $\mathbf{V}_\perp$ و $\mathbf{V}_\parallel$ یعنی تصویر ِ $\mathbf{V}$ به ترتیب عمود بر $\mathbf{u}$ و موازی با آن. دیده می‌شود

$$[H_{\rm c}, H_{\rm f}] = 0, \tag{11}$$

که نتیجه میدهد میشود $H_{\rm c}$ و $H_{\rm f}$ را همزمان قطری کرد. در واقع

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\rm c} \otimes \mathcal{H}_{\rm f}, \tag{12}$$

که $\mathcal{H}$ فضا یِ هیلبِرت [2] ِ تکذره‌ای، $\mathcal{H}_{\rm c}$ فضا یِ هیلبِرت [2] ِ متناظر با درجه‌ها یِ آزادی یِ عمود بر $\mathbf{u}$، و $\mathcal{H}_{\rm f}$ فضا یِ هیلبِرت [2] ِ متناظر با درجه‌ها یِ آزادی یِ موازی با $\mathbf{u}$ است.

به ساده‌گی دیده می‌شود اگر $X_{\rm c}$ و $Y_{\rm f}$ دو عملگر تابع ِ فقط درجه‌ها یِ آزادی یِ به ترتیب عمود بر $\mathbf{u}$ و موازی با $\mathbf{u}$ باشند، و

$$|\psi\rangle = |\alpha_{\rm c}\rangle \otimes |\beta_{\rm f}\rangle, \tag{13}$$
$$|\alpha_{\rm c}\rangle \in \mathcal{H}_{\rm c},$$
$$|\beta_{\rm f}\rangle \in \mathcal{H}_{\rm f},$$

آنگاه،

$$\langle\psi|X_{\rm c}\, Y_{\rm f}|\psi\rangle = \langle\psi|X_{\rm c}|\psi\rangle\,\langle\psi|Y_{\rm f}|\psi\rangle. \tag{14}$$

همچنین از (5) نتیجه میشود اگر $|\psi\rangle$ یک ویژه‌بردار ِ H باشد، به ازا یِ عمل‌گر ِ دلبخواه ِ X،

$$\langle\psi|\dot{X}|\psi\rangle = 0., \tag{15}$$

بردار ِ $|\psi\rangle$ را به شکل ِ (13) میگیرم، که $|\alpha_{\rm c}\rangle$ و $|\beta_{\rm f}\rangle$ ویژه‌بردارها یِ به ترتیب $H_{\rm c}$ و $H_{\rm f}$ اند. داریم

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_\parallel\times\dot{\mathbf{r}}_\perp + \mathbf{r}_\perp\times\dot{\mathbf{r}}_\parallel + \mathbf{r}_\perp\times\dot{\mathbf{r}}_\perp. \tag{16}$$

از (14) و (15) نتیجه میشود مقدارِ چشمداشتی یِ دوجمله یِ اولِ طرفِ راستِ (16) صفر است. پس،

$$\langle\psi|\mathbf{m}|\psi\rangle = \frac{q}{2}\,\langle\psi|\mathbf{r}_\perp\times\dot{\mathbf{r}}_\perp|\psi\rangle. \tag{17}$$

این یعنی $\langle\mathbf{m}\rangle$ با $\mathbf{u}$ موازی است. پس،

$$\langle\psi|\mathbf{m}|\psi\rangle = m\,\mathbf{u}, \tag{18}$$

که

$$m = -\left\langle\psi\left|\frac{\partial H}{\partial B}\right|\psi\right\rangle \tag{19}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned} H_\mathrm{c} &:= \frac{1}{2\,\mu}\,(\mathbf{p}_\perp - q\,\mathbf{A})\cdot(\mathbf{p}_\perp - q\,\mathbf{A}) + U_\mathrm{c}(\mathbf{r}_\perp),\\ H_\mathrm{f} &:= \frac{1}{2\,\mu}\,\mathbf{p}_\parallel\cdot\mathbf{p}_\parallel + U_\mathrm{f}(\mathbf{r}_\parallel), \end{aligned} \tag{20}$$

معلوم میشود H_f به B بسته‌گی ندارد. پس،

$$m = -\left\langle\psi\left|\frac{\partial H_\mathrm{c}}{\partial B}\right|\psi\right\rangle \tag{21}$$

2 طیفِ همیلتنی یِ محصورگر

از (20) و (2) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} H_\mathrm{c} &= \frac{1}{2\,\mu}\,\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{p}_\perp + \frac{q^2\,B^2}{8\,\mu}\,\mathbf{r}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp - \frac{q}{2\,\mu}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}_\perp\times\mathbf{p}_\perp,\\ &= \frac{1}{2\,\mu}\,\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{p}_\perp + \frac{\mu}{2}\,\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\,\mathbf{r}_\perp\cdot\mathbf{r}_\perp - \frac{\omega}{2}\,L, \end{aligned} \tag{22}$$

که

$$L := \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}, \tag{23}$$

و $\mathbf{L}$ تکانه یِ زاویه‌ای است. دیده میشود

$$H_{\rm c} = H_{\rm h} - \frac{\omega}{2}\, L, \tag{24}$$

که

$$\omega := \frac{q\,B}{m}, \tag{25}$$

و $H_{\rm h}$ همیلتنی یِ یک نوسانگرِ هماهنگِ همسانگردِ دوبُعدی با بسامدِ زاویه‌ای یِ Ω است، که

$$\Omega := \left|\frac{\omega}{2}\right|. \tag{26}$$

ضمنَن،

$$[H_{\rm h}, L] = 0. \tag{27}$$

بردارها یِ $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را چنان میگیریم که $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u})$ یک کنجِ یکه‌متعامدِ راستگرد باشد. عملگرها یِ پایینبرِ a و b را به شکلِ معمول، متناظر با بردارها یِ $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} a &:= \sqrt{\frac{\mu\,\Omega}{2\,\hbar}}\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{r} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\,\hbar\,\mu\,\Omega}}\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{p},\\ b &:= \sqrt{\frac{\mu\,\Omega}{2\,\hbar}}\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{r} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\,\hbar\,\mu\,\Omega}}\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{28}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} H_{\rm h} &= \hbar\,\Omega\,(a^\dagger\,a + b^\dagger\,b + 1),\\ L &= \mathrm{i}\,\hbar\,(b^\dagger\,a - a^\dagger\,b). \end{aligned} \tag{29}$$

با تعریفها یِ

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a + \mathrm{i}\,b),\\ \beta &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a - \mathrm{i}\,b), \end{aligned} \tag{30}$$

رابطه‌ها ی ِ (29) می‌شوند

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{h}} &= \hbar\,\Omega\,(\alpha^\dagger\,\alpha+\beta^\dagger\,\beta+1),\\ L &= \hbar\,(\beta^\dagger\,\beta-\alpha^\dagger\,\alpha). \end{aligned} \tag{31}$$

تنهارابطه‌ها ی ِ جابه‌جایی ی ِ نابدیهی بین ِ α، $\alpha^\dagger$، β، و $\beta^\dagger$

$$\begin{aligned} [\alpha,\alpha^\dagger] &= 1,\\ [\beta,\beta^\dagger] &= 1 \end{aligned} \tag{32}$$

اند. از این‌جا معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{h}} &= \hbar\,\Omega\,(n_\alpha+n_\beta+1),\\ \lambda &= \hbar\,(n_\beta-n_\alpha), \end{aligned} \tag{33}$$

که E_{h} و λ ویژه‌مقدارها ی ِ H_{h} و L، و n_α و n_β عددها ی ِ صحیح ِ نامنفی اند. هر ویژه‌بردار ِ مشترک ِ H_{h} و L به طور ِ یکتا با یک زوج‌مرتب ِ (n_α,n_β) مشخص می‌شود. از (33) نتیجه می‌شود

$$E_{\mathrm{c}} = \hbar\,\omega_{\mathrm{c}}\,\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{34}$$

که E_{c} ویژه‌مقدار ِ H_{c} متناظر با عددها ی ِ کوانتمی ی ِ n_α و n_β است، با ω_{c}

$$\omega_{\mathrm{c}} := |\omega| \tag{35}$$

بسامد ِ زاویه‌ای ی ِ سیکلُترُن است، و

$$n := \begin{cases} n_\alpha, & \omega>0\\ n_\beta, & \omega<0 \end{cases}. \tag{36}$$

تعریف می‌کنیم

$$\tilde{n} := \begin{cases} n_\beta, & \omega>0\\ n_\alpha, & \omega<0 \end{cases}. \tag{37}$$

(34) ویژه‌مقدارها یِ $H_{\rm c}$ را میدهد، اما دیده میشود در این عبارت n ظاهر میشود و $\tilde{n}$ ظاهر نمیشود. $\tilde{n}$ میتواند هر مقدار ِ صحیح ِ نامنفی یی بگیرد و انرژی عوض نمیشود. پس چندگانه‌گی یِ ویژه‌بردارها یِ $H_{\rm c}$ بیپایان است.

اما اگر این سیستم در یک جعبه باشد وضع فرق میکند. فرض کنید ذره مقید است (در دوبُعد) در قرص ی به شعاع ِ R باشد. میخواهیم برا یِ n ِ معین، چندگانه‌گی در R ها یِ بزرگ را حساب کنیم. در این حالت برا یِ مقدارها یِ ممکن ِ $\tilde{n}$ یک قید به دست می‌آید و همین است که چندگانه‌گی را باپایان میکند. این قید از آن‌جا می‌آید که $E_{\rm h}$ باید از کمینه یِ $U_{\rm eff}$ (انرژی یِ پتانسیل ِ مئثر ِ متناظر با $H_{\rm h}$ پس از جداکردن ِ مختصه یِ زاویه‌ای) درون ِ قرص بیشتر باشد. داریم

$$U_{\rm eff}=\frac{L^2}{2\,\mu\,\rho^2}+\frac{\mu\,\Omega^2\,\rho^2}{2}, \tag{38}$$

که ρ فاصله از مرکز ِ قرص است. کمینه یِ $U_{\rm eff}$ در $R>\rho$ را با M نشان میدهیم. از (38) نتیجه میشود

$$M=\begin{cases}|L|\,\Omega, & |L|<\mu\,\Omega\,R^2\\ \dfrac{L^2}{2\,\mu\,R^2}+\dfrac{\mu\,\Omega\,R^2}{2}, & |L|<\mu\,\Omega\,R^2\end{cases}. \tag{39}$$

از (24) داریم

$$E_{\rm c}=E_{\rm h}-\Omega\,L', \tag{40}$$

که

$$L':=\mathrm{sgn}(\omega)\,L. \tag{41}$$

بر حسب ِ L'، رابطه یِ (39) میشود

$$M=\begin{cases}|L'|\,\Omega, & |L'|<\mu\,\Omega\,R^2\\ \dfrac{L'^2}{2\,\mu\,R^2}+\dfrac{\mu\,\Omega\,R^2}{2}, & |L'|<\mu\,\Omega\,R^2\end{cases}. \tag{42}$$

قید بر L' هم میشود

$$E_{\rm c}+\Omega\,L'-M>0, \tag{43}$$

یا

$$o(R^2) < L' < \mu\,\Omega\,R^2 + o(R^2). \tag{44}$$

البته شکل ِ دقیق ِ این رابطه

$$-\frac{E_\mathrm{c}}{2\,\Omega} < L' < \mu\,\Omega\,R^2 + o(R^2) + \sqrt{2\,\mu\,E_\mathrm{c}}\,R \tag{45}$$

است. اما برا یِ محاسبه یِ چندگانه‌گی در R ها یِ بزرگ، (44) کافی است. از آن نتیجه میشود

$$0 < \frac{L'}{\mu\,\Omega\,R^2} < 1, \qquad R \to \infty, \tag{46}$$

یا

$$0 < \frac{\hbar}{\mu\,\Omega\,R^2}\,\tilde{n} < 1, \qquad R \to \infty. \tag{47}$$

توجه داریم که این نتیجه برا یِ E_c یِ ثابت (و در نتیجه ِ n ثابت) و $R \to \infty$ به دست آمده. به این ترتیب، چندگانه‌گی ($\mathcal{N}$) میشود

$$\mathcal{N} = \frac{\mu\,\Omega\,R^2}{\hbar}, \tag{48}$$

که میشود آن را نوشت

$$\mathcal{N} = \frac{S}{h^2}\,(2\,\pi)\,\mu\,(\hbar\,\omega_\mathrm{c}). \tag{49}$$

این همان تعداد ِ ترازها یِ انرژی یِ یک ذره یِ آزاد مقید به حرکت در ناحیه ای دوبُعدی به مساحت ِ S، با انرژیها یِ بین ِ $\hbar\,\omega_\mathrm{c}\,n$ و $\hbar\,\omega_\mathrm{c}\,(n+1)$ است:

$$\mathcal{N} = \frac{S}{h^2}\,\int_{E_\perp=\hbar\,\omega_\mathrm{c}\,n}^{E_\perp=\hbar\,\omega_\mathrm{c}\,(n+1)} \mathrm{d}^2 p_\perp, \tag{50}$$

که

$$E_\perp := \frac{\mathbf{p}_\perp\cdot\mathbf{p}_\perp}{2\,\mu}. \tag{51}$$

انگار با اعمال ِ میدان ِ مغناطیسی، همه ی ِ ترازها ی ِ با انرژی ی ِ بین ِ $\hbar\,\omega_{\rm c}\, n$ و $\hbar\,\omega_{\rm c}\,(n+1)$ انرژی ی ِشان یکسان شده، اما تعداد ِ شان عوض نشده. (49) را به این شکل هم میشود نوشت.

$$\mathcal{N}=\frac{S\,|q\,B|}{h}. \tag{52}$$

3 مغناطیده‌گی و پذیرفتاری در دو بُعد

فرض کنید ارتفاع ِ استوانه بسیار کوچک است، چنان که اختلاف ِ انرژی ی ِ اولین حالت ِ برانگیخته ی ِ $H_{\rm f}$ با انرژی ی ِ حالت ِ پایه ی ِ آن بسیار بزرگ‌تر از $\hbar\,\omega_{\rm c}$ است. در این صورت ذره در حالت ِ پایه ی ِ $H_{\rm f}$ میمانَد و $H_{\rm f}$ مثل ِ یک مقدار ِ ثابت در انرژی رفتار میکند، که میشود آن را کنار گذاشت. چنین‌مسئله ای عملَن دوبُعدی است. در دما ی ِ صفر فرمیُن‌ها ترازها را از تراز ِ پایه به بالا اشغال میکنند. تعداد ِ ترازها ی ِ اشغال‌شده را با Y نمایش میدهیم. داریم

$$Y=\frac{N}{\mathcal{N}}, \tag{53}$$

که N تعداد ِ ذرات است. Y در حالت ِ کلی صحیح نیست. این یعنی $[Y]$ تراز ِ کاملَن پر داریم ($[Y]$ بزرگ‌ترین عدد ِ صحیح ِ نابزرگ‌تر از Y است) و احتمالَن (اگر $[Y]<Y$) یک تراز ِ جزئَن پر. انرژی ی ِ سیستم در حالت ِ پایه میشود

$$E_{\rm c}(N)=\mathcal{N}\sum_{n=0}^{[Y]-1}\hbar\,\omega_{\rm c}\,\left(n+\frac{1}{2}\right)+\mathcal{N}\,(Y-[Y])\,\hbar\,\omega_{\rm c}\,\left([Y]+\frac{1}{2}\right), \tag{54}$$

که $E_{\rm c}(N)$ انرژی ی ِ سیستم ِ N ذره‌ای در حالت ِ پایه است. از (54) نتیجه میشود

$$E_{\rm c}(N)=\mathcal{N}\,\hbar\,\omega_{\rm c}\,\left(\frac{2\,[Y]+1}{2}\,Y-\frac{[Y]^2+[Y]}{2}\right). \tag{55}$$

دوقطبی ی ِ مغناطیسی ی ِ سیستم ِ N ذره‌ای را با $m(N)$ نمایش میدهیم. با استفاده از (21)، این که اگر $|\psi\rangle$ ویژه‌بردار ِ H باشد،

$$\left\langle\psi\left|\frac{\partial H}{\partial B}\right|\psi\right\rangle=\frac{\partial\langle\psi|H|\psi\rangle}{\partial B}, \tag{56}$$

و

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -\frac{Y}{B}, \tag{57}$$

نتیجه میشود

$$m(N) = -S\,\frac{q^2}{\pi\,\mu}\,B\,\left(\frac{2\,[Y]+1}{4}\,Y - \frac{[Y]^2+[Y]}{2}\right). \tag{58}$$

$m(N)$ به ازا یِ مقدارها یِ صحیح ِ Y پرش دارد. χ (پذیرفتاری یِ سیستم) را چنین تعریف میکنیم.

$$\chi := \frac{1}{S}\,\frac{\partial m(N)}{\partial B}. \tag{59}$$

نتیجه میشود

$$\chi = \frac{q^2}{2\,\pi\,\mu}\,\left\{[Y]^2 + [Y] - \sum_{k=0}^{\infty} k^2\,\delta(Y-k)\right\}. \tag{60}$$

این پذیرفتاری علاو بر دلتاها یک رفتار ِ نوسانی دارد. برا یِ دیدن ِ این رفتار، از آن یک بخش ِ هموار جدا میکنیم. این کار یکتا نیست. اما دیده میشود χ_0 با

$$\chi_0 := \frac{q^2}{2\,\pi\,\mu}\,Y^2, \tag{61}$$

این ویژه‌گی را دارد که

$$\int_{n<Y<n+1} \mathrm{d}B\;\chi_0 = \int_{n<Y<n+1} \mathrm{d}B\;\chi. \tag{62}$$

χ_0 را بخش ِ هموار، و $\chi_{\rm osc}$ (بخش ِ نوسانی یِ پذیرفتاری) را تفاضل ِ χ_0 از χ (جز دلتاها) تعریف میکنیم. به این ترتیب،

$$\chi_{\rm osc} = \frac{q^2}{2\,\pi\,\mu}\,([Y]^2 + [Y] - Y^2). \tag{63}$$

به این رفتار ِ نوسانی یِ پذیرفتاری پدیده یِ دِ هاس– فان آلفِن [3] میگویند.

4 پانوشتها

[1] Heisenberg

[2] Hilbert

[3] de Haas-van Alphen