X1-062 (2009/08/19)

نمودارشناخت I

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

نمودار به عنوان ِ یک ابزار ِ تصویری برا یِ محاسبه یِ تابع ِ مولد و تابعها یِ چندنقطه‌ای بررسی میشود.

1 تابع ِ مولد

فرمولبندی یِ LSZ دامنه یِ پراکنش را به تابعها یِ چندنقطه‌ای مربوط میکند. تابع ِ k نقطه‌ای یِ $G^{j_k\cdots j_1}$ به این شکل تعریف میشود.

$$G^{j_k\cdots j_i} := {}^{\text{out}}\langle 0|\Upsilon(\Phi^{j_k},\dots,\Phi^{j_1})|0\rangle, \tag{1}$$

Υ حاصلِ‌ضرب ِ زمانمرتب، $|0\rangle$ حالت ِ پایه (خلئ)، و ${}^{\text{out}}\langle 0|$ خلئ ِ خروجی است، و Φ^j ها متغیرها یِ دینامیکی (میدانها) در تصویر ِ هَیزِنبِرگ [a] اند. خلئ ِ خروجی چنین تعریف میشود.

$${}^{\text{out}}\langle 0| := \langle 0|\Sigma, \tag{2}$$

که Σ ماتریس ِ پراکنده‌گی است. اگر f یک تابع با بسط ِ تِیلِر [b] باشد:

$$f(\Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_{j_1\cdots j_n}\, \Phi^{j_1} \cdots \Phi_{j_n}, \tag{3}$$

تعریف میکنیم

$$\Upsilon[(f|\Phi), A] := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_{j_1\cdots j_n}\, \Upsilon(\Phi^{j_1}, \dots, \Phi_{j_n}, A). \tag{4}$$

تابعِ‌مولد ـِ Z را چنین تعریف میکنیم.

$$Z(J) := {}^{\mathrm{out}}\langle 0|\Upsilon[\exp(\grave{\beta}\, J_j, \centerdot^j)|\Phi]|0\rangle. \tag{5}$$

در کوانتممکانیک یا نظریه یِ میدانها یِ کوانتمی،

$$\grave{\beta} = \frac{1}{\mathrm{i}\,\hbar}. \tag{6}$$

دیده میشود

$$G^{j_k\cdots j_i} = \frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_k}} \cdots \frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_1}} Z(J)\bigg|_{J=0}. \tag{7}$$

این نتیجه برا یِ متغیرها یِ گراسمانی (پادجابه‌جایی) هم درست است. در واقع اگر بعض ی از مئلفه‌ها یِ میدان گراسمانی و بعض ی دیگر معمولی باشند هم این نتیجه درست است. فقط باید توجه کرد که مشتق‌گیریها نسبت به متغیرها یِ گراسمانی با هم پادجابه‌جا میشوند. در کل ـِ این متن فرض شده هر مئلفه یِ میدان یا گراسمانی است یا معمولی، و به شاخصها یِ نظیر ـِ این مئلفه‌ها به ترتیب شاخصها یِ گراسمانی و معمولی میگوییم.

تابع ـِ چندنقطه‌ای را میشود بر حسب ـِ تابعهایِ‌چندنقطه‌ای یِ میدانها یِ آزاد (میدانها یِ در تصویر ـِ برهمکنش) نوشت:

$${}^{\mathrm{out}}\langle 0|\Upsilon(\Phi^{j_k};\dots;\Phi^{j_1})|0\rangle = \langle 0|\Upsilon(\{[\exp[\grave{\beta}\,\mathcal{V}(\centerdot)]|\phi\}, \phi^{j_k}, \dots, \phi^{j_1})|0\rangle, \tag{8}$$

که ϕ میدان ـِ آزاد و $\mathcal{V}$ برهمکنش است:

$$S = S_0 - \mathcal{V}, \tag{9}$$

که S_0 بخش ـِ آزاد ـِ کنش است. از (1) و (8) نتیجه میشود

$$G^{j_k\cdots j_1}=\exp\left[\grave{\beta}\,\mathcal{V}\left(\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J}\right)\right]\langle 0|\Upsilon\{[\exp(\grave{\beta}\,J_j,\boldsymbol{.}^j)|\phi],\phi^{j_k},\dots,\phi^{j_1}\}|0\rangle\bigg|_{J=0}.\qquad(10)$$

هم‌چنین،

$$Z(J)=\exp\left[\grave{\beta}\,\mathcal{V}\left(\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J}\right)\right]\langle 0|\Upsilon[\exp(\grave{\beta}\,J_j,\boldsymbol{.}^j)|\phi]|0\rangle.\qquad(11)$$

تعریف میکنیم

$$Z_0(J)=\langle 0|\Upsilon[\exp(\grave{\beta}\,J_j,\boldsymbol{.}^j)|\phi]|0\rangle,\qquad(12)$$

که نتیجه میدهد

$$Z(J)=\exp\left[\grave{\beta}\,\mathcal{V}\left(\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J}\right)\right]Z_0(J).\qquad(13)$$

Z_0 تابعِ‌مولد ـِ بی‌برهمکنش است. اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

2 تابعِ‌مولد ـِ بی‌برهمکنش

یک راه ـِ ساده یِ محاسبه یِ تابعِ‌مولد ـِ بی‌برهمکنش، انتگرال ـِ مسیر است:

$$\langle 0|\Upsilon(f|\phi)|0\rangle=\int \mathrm{d}\phi\; f(\phi)\;\exp[-\grave{\beta}\,S_0(\phi)].\qquad(14)$$

S_0 یک تابع ـِ دستِ‌بالا مجذوری از ϕ است:

$$S_0(\phi)=\frac{1}{2}\,(\Delta^{-1})_{j\,k}\,\phi^j\,\phi^k+\sigma_k\,\phi^k+\xi.\qquad(15)$$

جمله یِ خطی یِ کنش را میشود صفر کرد. برا یِ این کار ϕ_0 را چنان مییابیم که

$$\frac{\partial S}{\partial\phi}(\phi_0)=0.\qquad(16)$$

با تعریف‌ها یِ

$$\phi':=\phi-\phi_0,\qquad(17)$$

و

$$S'(\phi') := S(\phi), \tag{18}$$

نتیجه میشود

$$\frac{\partial S'}{\partial \phi'}(\phi' = 0) = 0. \tag{19}$$

از این پس به جا یِ ϕ و S با ϕ' و S' کار میکنیم ولی برا یِ ساده‌گی پریم را برمیداریم. جمله یِ ثابت ِ کنش را هم میشود در اندازه یِ انتگرالگیری جذب کرد. به این ترتیب کنش ی که با آن کار میکنیم جمله یِ درجه یِ صفر و درجه یِ یک ندارد و بخش ِ آزاد َش به شکل ِ

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2}\,(\Delta^{-1})_{j\,k}\,\phi^j\,\phi^k \tag{20}$$

در می‌آید. از (14) و (20) نتیجه میشود

$$Z_0(J) = \int \mathrm{d}\phi\ \exp\left[-\frac{1}{2}\grave{\beta}\,(\Delta^{-1})_{j\,k}\,\phi^j\,\phi^k + \grave{\beta}\,J_l\,\phi^l\right], \tag{21}$$

یا

$$Z_0(J) = \exp\left[\frac{1}{2}\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k\,j})\,(\grave{\beta}\,J_j)\,(\grave{\beta}\,J_k)\right]. \tag{22}$$

این نتیجه هم برا یِ متغیرها یِ گراسمانی (پادجابه‌جایی) هم درست است. البته Δ، نسبت به دو شاخص ِ گراسمانی پادمتقارن است. به $(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta)$ انتشارگر (ِ آزاد) میگوییم.

3 رئس

$\mathcal{V}$ بخش ِ برهمکنش (یا پتانسیل) ِ کنش است. این تابع را بر حسب ِ متغیرها یِ دینامیکی بسط میدهیم:

$$\mathcal{V} =: \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}\,\mathcal{V}^{(n)}_{j_1\cdots j_n}\,\phi^{j_1}\,\phi^{j_n}. \tag{23}$$

البته در بسیار ی از موارد همه یِ جمله‌ها یِ مجذوری یِ کنش را در S_0 میگذارند و جمله‌ها یِ برهمکنش از درجه یِ 3 یا بیشتر اند. دیده میشود

$$\mathcal{V}^{(n)}_{j_1\cdots j_n} = -\frac{\partial}{\partial\phi^{j_n}}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi^{j_n}}S\Big|_{\phi=0}, \qquad n>2, \tag{24}$$

و

$$\mathcal{V}^{(2)}_{j\,k} = \frac{\partial^2}{\partial\phi^k\,\partial\phi^j}(S_0 - S)\Big|_{\phi=0}. \tag{25}$$

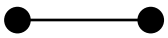
به این ترتیب (13) میشود

$$Z(J) = \exp\left[\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}\,\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(n)}_{j_1\cdots j_n}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_n}}\right] Z_0(J). \tag{26}$$

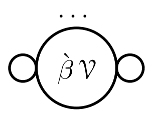
به $\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(n)}$ رئس ِ مرتبه‌یِ n میگویند. روشن است که $\mathcal{V}^{(n)}$ نسبت به دو شاخص ِ گراسمانی پادمتقارن، و نسبت به دو شاخص ِ مجاور که دستِ‌کم یک ی از آنها گراسمانی نباشد متقارن است.

4 نمایش ِ نموداری

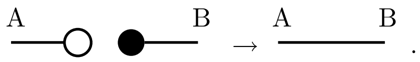
یک راه ِ محاسبه یِ طرف ِ راست ِ (26) این است که Z_0 و عملگرِدیفرانسیل ی که بر آن اثر میکند را بسط دهیم و هر یک از مشتقگیریها یِ این عملگر را رو یِ یک ی از $\grave{\beta}\,J$ ها اثر دهیم. با این کار، آن مشتق‌گیری و آن $\grave{\beta}\,J$ حذف میشوند. اینها را میشود با نمودار نشان داد. تعریف میکنیم

$$(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k\,j})\,(\grave{\beta}\,J_j)\,(\grave{\beta}\,J_k) =: \tag{27}$$


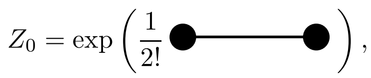
این یعنی هر $(\grave{\beta}\,J)$ را با یک گو ی و هر $(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta)$ را با یک خط نمایش داده ایم. برا یِ رئسها هم،

$$\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(n)}_{j_1\cdots j_n}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_n}} =: \tag{28}$$


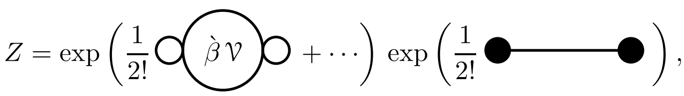
که تعداد ِ دایره‌ها یِ کوچک به تعداد ِ مشتقگیریها است. این یعنی هر $[\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(n)}]$ را با یک دایره یِ بزرگ نمایش داده ایم که n نقطه به آن وصل است، و هر مشتقگیری نسبت به $(\grave{\beta}\,J)$ را با یک دایره یِ کوچک. اثر ِ مشتقگیری نسبت به $(\grave{\beta}\,J)$ این است که یک دایره و یک گوی حذف میشوند و پایانه‌ها یِ این‌دو به هم میچسبند:


(29)

به این ترتیب،


(30)

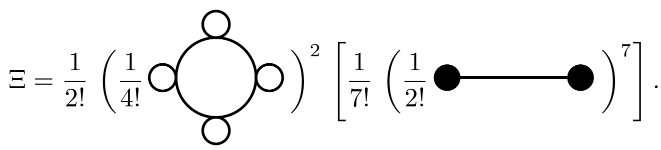
و


(31)

مثلَن یک رئس ِ مرتبه يِ 4 را در نظر بگیرید. داریم

$$Z(J) = \cdots + \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{4!}\,\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(4)}_{j_1\cdots j_4}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_4}}\right]^2$$
$$\times\left\{\frac{1}{7!}\left[\frac{1}{2!}\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k\,j})\,(\grave{\beta}\,J_j)\,(\grave{\beta}\,J_k)\right]\right\} + \cdots. \qquad (32)$$

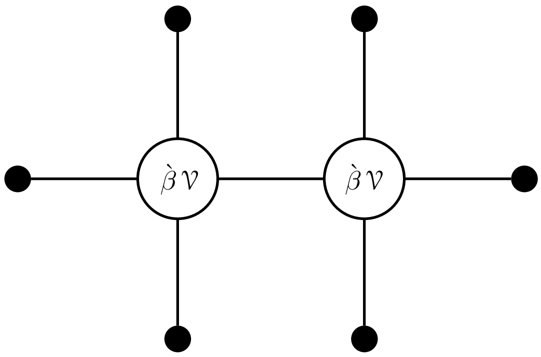
جمله يِ مشخص‌شده در طرف ِ راست، به شکل ِ نمودار میشود


(33)

برا يِ محاسبه يِ طرف ِ راست، باید به همه يِ شکل‌ها يِ ممکن گویها را با دایره‌ها حذف کرد. از جمله،

$$\Xi = \cdots + \frac{1}{2!\,(3!)^2}\,G + \cdots, \qquad (34)$$

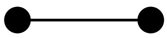
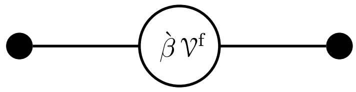
که

$G :=$  $. \qquad (35)$

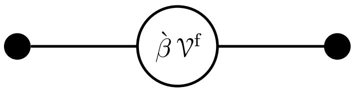
این نمودار نماینده یِ این عبارت است.

$$\begin{aligned}G=&[(\grave{\beta}\,J_{k_1})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_1\,j_1})]\,[(\grave{\beta}\,J_{k_2})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_2\,j_2})]\,[(\grave{\beta}\,J_{k_3})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_3\,j_3})]\,[\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(4)}_{j_1\cdots j_4}]\\ &\times[(\grave{\beta}\,J_{k_5})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_5\,j_5})]\,[(\grave{\beta}\,J_{k_6})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_6\,j_6})]\,[(\grave{\beta}\,J_{k_7})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_7\,j_7})]\,[\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{(4)}_{j_5\cdots j_8}]\\ &\times(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{j_4\,j_8}).\end{aligned}\tag{36}$$

دیده میشود به هر گوی یک $(\grave{\beta}\,J)$، به هر خط یک $(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta)$، و به هر رئس یک $(\beta\,\mathcal{V})$ نسبت داده شده. میشود جمله ای که در نما یِ تابعِ‌مولد ـِ بی‌برهمکنش ظاهر شده را هم به شکل ی نوشت که با این قراردادها (به ویژه ترتیب ـِ شاخصها) بخانَد:

 $=$  $, \qquad (37)$

که



$$=[(\grave{\beta}\,J_{k_1})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_1\,j_1})][(\grave{\beta}\,J_{k_2})\,(\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{k_2\,j_2})]\times(\grave{\beta}\,\Delta^{-1}_{j_1\,j_2}).\tag{38}$$

این یعنی وسط ـِ نمودار یک به اصطلاح رئس ـِ دوتایی یِ آزاد ـِ $(\grave{\beta}\,\mathcal{V}^{\mathrm{f}})$ گنجانده ایم، چنان که

$$\mathcal{V}^{\mathrm{f}}=\Delta^{-1}.\tag{39}$$

به این ترتیب هیچ دوگوی ی مستقیمَن به هم وصل نیستند.

5 ضریبها

تابع ِ مولد مجموع ِ مضربها یی از نمودارها ي مختلف است. ضریب ِ هر نمودار از دو جا می‌آید. یک ی شمارش ِ تعداد ِ حالتها ي ممکن برا ي وصلکردن ِ دایره‌ها به گویها، و دیگری یک علامت ِ احتمالی که فقط برا ي میدانها ي گراسمانی وارد میشود.

5.1 ضریب ِ تقارن

در هر یک از جمله‌ها ي بسط ِ طرف ِ راست ِ (31) ضریب ی که ظاهر میشود چنین است.

$$C = \frac{1}{m!\,n!}\,C', \tag{40}$$

که m تعداد ِ دایره‌ها و n تعداد ِ گویها است، و C' تعداد ِ گروهبندیها ي ممکن ِ این دایره‌ها و گویها به شکل ِ خاص ی است که در آن جمله ظاهر میشود. یک راه محاسبه ي C' این است که دایره‌ها و گویها را شماره‌گذاری کنیم. C' برابر میشود با تعداد ِ کل ِ جایگشت‌ها تقسیم بر تعداد ِ جایگشتها یی که شکل (با درنظرگرفتن ِ شماره‌ها) را تغییر نمیدهد. تعداد ِ کل ِ جایگشتها هم آن $(m!\,n!)$ است. تعداد ِ جایگشتها یی که شکل را تغییر نمیدهد (تعداد ِ تقارنها) را با S (ضریب ِ تقارن) نشان میدهیم. در این صورت،

$$C' = \frac{m!\,n!}{S}, \tag{41}$$

و از آنجا،

$$C = \frac{1}{S}. \tag{42}$$

هم این شمارش در مورد ِ یک نمودار ِ خاص که در C ظاهر میشود هم درست است. البته در مورد ِ آن نمودار، در محاسبه ي ضریب ِ تقارن باید هم گویها ي آشکار را در نظر گرفت و هم دایره‌ها و گویها ي حذف‌شده را. اما چون قرار است رابطه ي دایره و گوی ی که با هم حذف شده اند حفظ شود (یعنی اگر مثلَن دایره ي j به گو ي k وصل شده فقط تبدیلها یی در نظر گرفته شوند که در شکل ِ تبدیل‌یافته هم دایره ي j به گو ي k وصل باشد) تبدیلها ي متناظر با دایره‌ها و گویها ي حذف‌شده تبدیلها یی بر خطها ي درونی و رئسها یند. به این ترتیب (42) برا ي ضریب ِ هر یک از نمودارها هم درست است.

مثلَن، ضریب ی که در طرف ِ راست ِ (33) ظاهر میشود

$$C=\frac{1}{8!\,14!}\,\frac{8!}{2!\,(4!)^2}\,\frac{14!}{7!\,(2!)^7} \tag{43}$$

است، که برابر ِ $(8!\,14!)^{-1}$ ضرب در تعداد ِ حالتها یِ دسته‌بندی یِ 8 دایره در 2 دسته یِ 4 تایی ضرب در تعداد ِ حالتها یِ دسته‌بندی یِ 14 گوی در 7 دسته یِ 2 تایی است. در مورد ِ نمودار ِ G در (35) هم، دیده میشود تعداد ِ تبدیلها یی که خطها یِ بیرونی یِ یک رئس را به هم تبدیل میکنند $3!$، و تعداد ِ تبدیلها یی که دورئس ِ مشابه را به هم تبدیل میکنند $2!$ است، که کلَن ضریبِ‌تقارن ِ

$$S_G=2!\,(3!)^2 \tag{44}$$

را میدهد.

5.2 حلقه یِ گراسمانی

عبارت ِ زیر را در نظر بگیرید.

$$\Omega:=\left(\frac{1}{2!}\,\grave{\beta}\,\tilde{\mathbb{V}}_{i\,j}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_i}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_j}\right)^n\,\left(\frac{1}{2!}\;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\right)^n, \tag{45}$$

که $(\grave{\beta}\,\tilde{\mathbb{V}}_{i\,j})$ رئس ی است که شاخصها یِ دیگر َ ش ادغام شده. داریم

$$\Omega=\cdots+C\,\tilde{L}, \tag{46}$$

که C یک عدد ِ مثبت (ضریب ِ تقارن) است، و

$$\tilde{L}:=(\grave{\beta}\,\tilde{\mathbb{V}}_{j_1\,k_1})\cdots(\grave{\beta}\,\tilde{\mathbb{V}}_{j_n\,k_n})\,\frac{1}{2!}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_1}}\,\left(\frac{1}{2!}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{k_1}}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_2}}\;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\right)$$
$$\times\cdots\left(\frac{1}{2!}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{k_{n-1}}}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{j_n}}\;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\right)\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_{k_n}}\;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\,. \tag{47}$$

با استفاده از

$$\frac{1}{2!}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_i}\,\frac{\partial}{\grave{\beta}\,\partial J_j}\;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\;=\grave{\beta}^{-1}\,\Delta^{i\,j}, \tag{48}$$

(که برا یِ متغیرها یِ معمولی و گراسمانی هردو درست است) دیده میشود

$$\tilde{L} = (\grave{\beta}\,\tilde{\mathcal{V}}_{j_1\,k_1})\,(\grave{\beta}^{-1}\Delta^{k_1\,j_2})\cdots(\grave{\beta}^{-1}\Delta^{k_{n-1}\,j_n})\,(\grave{\beta}\,\tilde{\mathcal{V}}_{j_n\,k_n})\,(\grave{\beta}^{-1}\Delta^{j_1\,k_n}). \qquad (49)$$

با تعریف ِ

$$L := (\grave{\beta}\,\tilde{\mathcal{V}}_{j_1\,k_1})\,(\grave{\beta}^{-1}\Delta^{k_1\,j_2})\cdots(\grave{\beta}^{-1}\Delta^{k_{n-1}\,j_n})\,(\grave{\beta}\,\tilde{\mathcal{V}}_{j_n\,k_n})\,(\grave{\beta}^{-1}\Delta^{k_n\,j_1}), \qquad (50)$$

دیده میشود

$$\tilde{L} = \pm L, \qquad (51)$$

که مثبت برا یِ متغیرها یِ معمولی و منفی برا یِ متغیرها یِ گراسمانی است. نمودار ِ متناظر با L یک حلقه است. دیده میشود در ضریب ِ هر حلقه یِ گراسمانی علاوه بر ضریب ِ تقارن یک علامت ِ منفی هم وارد میشود.

6 مرجع

[1] Claude Itzykson & Jean-Bernard Zuber; "Quantum field theory", (McGraw-Hill, 1988) chapter 5

7 اسمها یِ خاص

[a] Heisenberg

[b] Taylor