X1-066 (2010/02/26)

دو کره ی رسانا یِ باردار

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

پتانسیل و بار ِ دو کره یِ رسانا یِ باردار، و نیرو یی که این دوکره به هم وارد میکنند بررسی میشود، به ویژه در حالت ی که این دوکره چسبیده به هم اند و با توجه ِ ویژه به ترتیب ِ درست ِ جمعزدن ِ سریها یِ مشروطهمگرا یی که در مسئله وارد میشوند.

1 دو کره یِ رسانا یِ بیرون ِ یکدیگر

دو کره یِ رسانا را در نظر بگیرید که شعاع ِ کره یِ α برابر ِ a_α است و فاصله یِ مرکزها یِ این دوکره از هم d است.

$$d =: a_1 + a_2 + \delta, \tag{1}$$

که δ نامنفی است. دوکره با هم تماس ندارند، اگر و تنها اگر δ مثبت باشد. بار و پتانسیل ِ الکتریکی یِ کره یِ α به ترتیب Q_α و V_α است. البته این چهارکمیت (دو بار و دو پتانسیل) مستقل از هم نیستند. دو تا را میشود بر حسب ِ دو تا یِ دیگر حساب کرد. چگالی یِ سطحی یِ بار بر کره یِ α برابر ِ σ_α است. بسته‌گی یِ σ_α ها به مکان چنان است که هر کره همپتانسیل شود. σ_α ها هم مستقل نیستند و

بر حسب ِ دو تا از متغیرها یِ بار یا پتانسیل به دست می‌آیند.

σ_1 را معلوم بگیرید. با روش ِ تصویر (مثلَن [1]) میشود برا یِ مسئله یِ بیرون ِ کره‌ها به جا یِ σ_2 تصویر ِ σ_1 در کره یِ 2، به اضافه یِ یک بار در مرکز ِ کره یِ 2 گذاشت. تصویر ِ بار ِ Q در مکان ِ $\mathbf{D}$ از مرکز ِ کره ای به شعاع ِ A در هم ین کره، بار ِ Q' در مکان ِ $\mathbf{D}'$ نسبت به مرکز ِ آن کره است، که

$$Q' = -\frac{A}{|\mathbf{D}|}\,Q,$$
$$\mathbf{D}' = \left(\frac{A}{|\mathbf{D}|}\right)^2\,\mathbf{D}. \qquad (2)$$

تصویر ِ σ_1 را $\sigma_{2\,1}$، و بار ِ مرکزی را $q_{2\,0}$ مینامیم. به این ترتیب، تا آنجا که به مسئله یِ بیرون ِ کره‌ها مربوط است میشود به جا یِ σ_2 یک بار ِ سطحی با چگالی یِ $\sigma_{2\,1}$ و یک بار ِ نقطه‌ای یِ $q_{2\,0}$ گذاشت. البته این بار ِ سطحی یِ تصویر درون ِ کره یِ 2 است. در واقع به ساده‌گی دیده میشود دامنه یِ $\sigma_{2\,1}$ کره ای است که مرکز َش رو یِ پاره‌خط ِ واصل ِ مرکزها یِ دوکره و به فاصله یِ $x_{2\,1}$ از مرکز ِ کره یِ 2، و شعاع َش $a_{2\,1}$ است:

$$x_{2\,1} = \frac{a_2^2\,d}{d^2 - a_1^2},$$
$$a_{2\,1} = \frac{a_2^2\,a_1}{d^2 - a_1^2}. \qquad (3)$$

پتانسیل ِ حاصل از σ_1 و $\sigma_{2\,1}$، رو یِ کره یِ 2 برابر ِ صفر است. از اینجا مقدار ِ $q_{2\,0}$ به دست می‌آید:

$$q_{2\,0} = 4\,\pi\,\epsilon_0\,a_2\,V_2. \qquad (4)$$

حالا میشود برا یِ مسئله یِ بیرون ِ کره‌ها، به جا یِ σ_1 تصویر ِ $\sigma_{2\,1}$ و $q_{2\,0}$، همراه با بار ِ $q_{1\,0}$ در مبدئ را گذاشت. دیده میشود

$$q_{1\,0} = 4\,\pi\,\epsilon_0\,a_1\,V_1. \qquad (5)$$

تصویر ِ $q_{2\,0}$ بار ِ $q_{1\,1}$ رو یِ پاره‌خط ِ واصل ِ مرکزها یِ دوکره و به فاصله یِ $b_{1\,1}$ از مرکز ِ کره یِ 1

است، که

$$
\begin{aligned}
q_{1\,1} &= -\frac{a_1}{d}\, q_{2\,0},\\
b_{1\,1} &= \frac{a_1^2}{d}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

دامنه یِ $\sigma_{1\,2}$ (تصویر ِ $\sigma_{2\,1}$) کره ای است که مرکز َش رو یِ پاره‌خط ِ واصل ِ مرکزها یِ دوکره و به فاصله یِ $x_{1\,2}$ از مرکز ِ کره یِ 1، و شعاع َش $a_{1\,2}$ است:

$$
\begin{aligned}
x_{1\,2} &= \frac{a_1^2\,(d-x_{2\,1})}{(d-x_{2\,1})^2-a_{2\,1}^2},\\
a_{1\,2} &= \frac{a_1^2\,a_{2\,1}}{(d-x_{2\,1})^2-a_{2\,1}^2}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

میشود این کار را ادامه داد. یعنی به جا یِ $\sigma_{2\,1}$ تصویر ِ $q_{1\,0}$ و $q_{1\,1}$ و $\sigma_{1\,2}$ در کره یِ 2 را گذاشت. به این ترتیب برا یِ مسئله یِ بیرون ِ کره‌ها σ_2 با $q_{2\,0}$ تا $q_{2\,2}$ و $\sigma_{2\,3}$ هم‌ارز میشود. با ادامه یِ این کار، بارها یِ $q_{1\,0}$ تا $q_{1\,(2\,n-1)}$ و توزیع ِ $\sigma_{1\,(2\,n)}$ درون ِ کره یِ 1، و بارها یِ $q_{2\,0}$ تا $q_{2\,(2\,m)}$ و توزیع ِ $\sigma_{2\,(2\,m+1)}$ درون ِ کره یِ 2 به دست می‌آیند، که پتانسیل ِ حاصل ِ از آنها بیرون ِ کره‌ها هم ان پتانسیل ِ واقعی است. بار ِ $q_{\alpha\,i}$ رو یِ پاره‌خط ِ واصل ِ مرکزها یِ دوکره، و به فاصله یِ $b_{\alpha\,i}$ از مرکز ِ کره یِ α است. این بارها و فاصله‌ها با این رابطه‌ها یِ بازگشتی به هم مربوط اند.

$$
q_{\alpha\,i} = -q_{\acute{\alpha}\,(i-1)}\,\frac{a_\alpha}{d-b_{\acute{\alpha}\,(i-1)}},
\tag{8}
$$

$$
b_{\alpha\,i} = \frac{a_\alpha^2}{d-b_{\acute{\alpha}\,(i-1)}},
\tag{9}
$$

که

$$
\acute{\alpha} \neq \alpha.
\tag{10}
$$

رابطه‌ها یِ (8) و (9)، همراه با

$$
q_{\alpha\,0} = 4\,\pi\,\epsilon_0\,a_\alpha\,V_\alpha,
\tag{11}
$$

$$
b_{\alpha\,0} = 0,
\tag{12}
$$

مقدار و جا یِ بارها را میدهند. دامنه یِ توزیع ِ $\sigma_{\alpha\,i}$ هم کره ای است که مرکز َش رو یِ پاره‌خط ِ واصل ِ مرکزها یِ دوکره و به فاصله یِ $x_{\alpha\,i}$ از مرکز ِ کره یِ α، و شعاع َش $a_{\alpha\,i}$ است. اینها هم این رابطه‌ها یِ بازگشتی

$$x_{\alpha\,i} = \frac{a_\alpha^2\,[d - x_{\acute\alpha\,(i-1)}]}{[d - x_{\acute\alpha\,(i-1)}]^2 - a_{\acute\alpha\,(i-1)}^2}, \tag{13}$$

$$a_{\alpha\,i} = \frac{a_\alpha^2\,a_{\acute\alpha\,(i-1)}}{[d - x_{\acute\alpha\,(i-1)}]^2 - a_{\acute\alpha\,(i-1)}^2}, \tag{14}$$

و

$$x_{\alpha\,0} = 0, \tag{15}$$

$$a_{\alpha\,0} = a_\alpha, \tag{16}$$

را برمی‌آورند. با تعریفها یِ

$$x_{\alpha\,i\,\pm} := x_{\alpha\,i} \pm a_{\alpha\,i}, \tag{17}$$

رابطه‌ها یِ (13) تا (16) میشوند

$$x_{\alpha\,i\,\zeta} = \frac{a_\alpha^2}{d - x_{\acute\alpha\,(i-1)\,\zeta}}, \tag{18}$$

$$x_{\alpha\,0\,\zeta} = \zeta\,a_\alpha. \tag{19}$$

با استقرا میشود نشان داد

$$\frac{x_{\alpha\,i\,\zeta}}{a_\alpha} \le 1. \tag{20}$$

برا یِ این کار (20) را به ازا یِ $i = k$ فرض میگیریم و به ازا یِ $i = (k+1)$ ثابت میکنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x_{\alpha\,(k+1)\,\zeta}}{a_\alpha} &= \frac{a_\alpha}{d - x_{\acute\alpha\,k\,\zeta}}, \\ &\le \frac{a_\alpha}{d - a_{\acute\alpha}}, \end{aligned} \tag{21}$$

که نشان میدهد

$$\frac{x_{\alpha\,(k+1)\,\zeta}}{a_\alpha} \le \frac{a_\alpha}{a_\alpha + \delta}. \tag{22}$$

از (19) هم معلوم میشود (20) به ازا یِ $i=0$ درست است. پس (20) درست است. به این ترتیب ضمنَن نتیجه میشود

$$\frac{x_{\alpha\, i\, \zeta}}{a_\alpha} > 0, \qquad i > 0. \tag{23}$$

از ترکیب ِ (14) و (18) نتیجه میشود

$$\frac{a_{\alpha\, i}}{a_{\acute{\alpha},(i-1)}} = \frac{x_{\alpha\, i\, +}\, x_{\alpha\, i\, -}}{a_\alpha^2}, \tag{24}$$

که نتیجه میدهد شعاع ِ دامنه یِ توزیع، در تصویرشدن بزرگ نمیشود. پس حد ِ $a_{\alpha\, i}$ وجود دارد. تعریف میکنیم

$$X_\infty := \lim_{i\to\infty} X_i. \tag{25}$$

شرط ِ لازم برا یِ این که $a_{\alpha\, \infty}$ مثبت باشد این است که

$$x_{\alpha\, \infty\, \zeta} = a_\alpha. \tag{26}$$

اما در این حالت هم $a_{\alpha\, \infty}$ صفر میشود. چون

$$a_{\alpha\, \infty} = \frac{1}{2}\, (x_{\alpha\, \infty\, +} - x_{\alpha\, \infty\, -}). \tag{27}$$

پس شعاع ِ دامنه یِ توزیع‌ها یِ $\sigma_{\alpha\, i}$، در $i\to\infty$ به صفر میگراید.

یک بار ِ Q درون ِ کره یِ α به فاصله یِ R از مرکز ِ کره یِ α را در نظر بگیرید. تصویر ِ این بار در کره یِ $\acute{\alpha}$، بار ِ Q' به فاصله یِ R' از مرکز ِ کره یِ $\acute{\alpha}$ است. داریم

$$R \le a_\alpha, \tag{28}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} R' &\le \frac{a_{\acute{\alpha}}^2}{d-R},\\ &\le \frac{a_{\acute{\alpha}}^2}{a_{\acute{\alpha}}+\delta}. \end{aligned} \tag{29}$$

همچنین،

$$|Q'| \le \frac{a_{\acute{\alpha}}}{a_{\acute{\alpha}}+\delta}\,|Q|. \tag{30}$$

این نشان میدهد تصویر ِ آن بار درون ِ کره یِ $\acute{\alpha}$ است، و قدرمطلق ِ بار ِ تصویر هم برابر ِ قدرمطلق ِ بار ِ اولیه ضرب در عدد ی نابزرگتر از یک است. بار ِ تصویر را در کره یِ α تصویر میکنیم و مقدار ِ بار ِ حاصل را با Q'' نمایش میدهیم. نتیجه میشود

$$|Q''| \le \frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha}+\delta}\,|Q'|. \tag{31}$$

به این ترتیب، با i بار تصویرکردن بار ِ Q_i به دست می‌آید که

$$|Q_i| \le \left(\frac{a_{\acute{\alpha}}}{a_{\acute{\alpha}}+\delta}\right)^{i-[i/2]}\,\left(\frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha}+\delta}\right)^{[i/2]}\,|Q|. \tag{32}$$

$[x]$ بزرگترین عدد ِ صحیح ِ نابزرگتر از x است. دنباله یِ q_α را چنین تعریف میکنیم.

$$q_\alpha := \{(i, q_{\alpha\, i}) \mid i\}. \tag{33}$$

دیده میشود این دنباله تحت ِ تسلط ِ یک دنباله یِ هندسی با قدرِنسبت ِ m است، که

$$m = \max\left(\frac{a_1}{a_1+\delta}, \frac{a_2}{a_2+\delta}\right). \tag{34}$$

روشن است که m نابزرگتر از یک است. با انجام ِ استدلال ِ مشابه ی برا یِ بارها یِ سازنده یِ توزیع ِ $\sigma_{\alpha,i}$، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}S\,|\sigma_{\alpha\,(2\,k)}| &\le \left(\frac{a_{\acute{\alpha}}}{a_{\acute{\alpha}}+\delta}\right)^{k}\,\left(\frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha}+\delta}\right)^{k}\,\int \mathrm{d}S\,|\sigma_\alpha|,\\ \int \mathrm{d}S\,|\sigma_{\alpha\,(2\,k+1)}| &\le \left(\frac{a_{\acute{\alpha}}}{a_{\acute{\alpha}}+\delta}\right)^{k+1}\,\left(\frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha}+\delta}\right)^{k}\,\int \mathrm{d}S\,|\sigma_{\acute{\alpha}}|.\end{aligned} \tag{35}$$

دنباله یِ Σ_α را هم چنین تعریف میکنیم.

$$\Sigma_\alpha := \left\{\left(i, \int \mathrm{d}S\,|\sigma_{\alpha,i}|\right)\,\middle|\, i\right\}. \tag{36}$$

دیده میشود Σ_α هم تحت ِ تسلط ِ یک دنباله یِ هندسی با قدرِنسبت ِ m است.

کره‌ها با هم تماس ندارند، اگر و تنها اگر δ مثبت باشد. به ساده‌گی دیده میشود در این حالت m کوچکتر از یک است.

2 بار، پتانسیل، و نیرو

با استفاده از دنباله‌ها یِ بار ِ تصویر، میشود بار ِ کل ِ هر کره، پتانسیل ِ هر کره، و نیرو یی که دوکره به هم وارد میکنند را حساب کرد:

$$Q_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} q_{\alpha\,i}, \tag{37}$$

$$V_\alpha = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{q_{\alpha\,i}}{a_\alpha + b_{\alpha\,i}} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{q_{\acute{\alpha}\,i}}{a_\alpha + d - b_{\acute{\alpha}\,i}}\right), \tag{38}$$

$$F = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_{1\,i}\,q_{2\,j}}{(d - b_{1\,i} - b_{2\,j})^2}, \tag{39}$$

که $\mathbf{F}$ نیرو یی است که کره یِ 1 به کره یِ 2 وارد میکند،

$$\mathbf{F} =: F\,\hat{\mathbf{r}}, \tag{40}$$

و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار ِ یکه در جهت ِ مرکز ِ کره یِ 1 به مرکز ِ کره یِ 2 است.

وقت ی کره‌ها با هم تماس ندارند، این سریها تحت ِ تسلط ِ سریها یی هندسی با قدرِنسبت ی کوچکتر از یک اند، بنابراین مطلقًن همگرا یند و ترتیب ِ جمعزدن ِشان مهم نیست. اما وقت ی کره‌ها به هم چسبیده اند چنین نیست. در این حالت باید ترتیب ِ درست ِ جمعزدن را مشخص کنیم. از این پس فرض میکنیم کره‌ها به هم چسبیده اند، یعنی

$$\delta = 0. \tag{41}$$

در این حالت با تعریف ِ

$$z_{\alpha\,i} := \frac{1}{a_\alpha - b_{\alpha\,i}}, \tag{42}$$

رابطه یِ (9) میشود

$$z_{\alpha\,i} = z_{\acute{\alpha}\,(i-1)} + \frac{1}{a_\alpha}, \tag{43}$$

یا به شکل ِ بسته،

$$\mathbf{z}_i = \tau\,\mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\xi}, \tag{44}$$

که

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$
$$\tau := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\xi_\alpha := (a_\alpha)^{-1}. \tag{45}$$

برا یِ یک جوابِ خاصِ (44)، نهاده یِ

$$\mathbf{z}^{\mathrm{p}} := \mathbf{e} + \mathbf{f}\, i \tag{46}$$

را میگیریم، که $\mathbf{e}$ و $\mathbf{f}$ ثابت اند. شرطِ این که (46) یک جوابِ (44) باشد این است که

$$(1-\tau)\,\mathbf{f} = 0,$$
$$(1-\tau)\,\mathbf{e} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f}. \tag{47}$$

از اینها نتیجه میشود

$$\mathbf{f} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\,\mathbf{u},$$
$$\mathbf{e} = \tilde{e}\,\mathbf{u} + \frac{\xi_1 - \xi_2}{4}\,\mathbf{v}, \tag{48}$$

که

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{49}$$

و $\tilde{e}$ یک ثابتِ دلبخاه است، که میشود آن را صفر گرفت. جوابِ کلی مجموعِ این جواب و $\mathbf{z}^{\mathrm{h}}$ (جوابِ کلی یِ معادله یِ همگن) است:

$$\mathbf{z}_i^{\mathrm{h}} = \tau\,\mathbf{z}_{i-1}^{\mathrm{h}}, \tag{50}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{z}_i^{\mathrm{h}} = \tau^i\,\mathbf{z}_0^{\mathrm{h}}. \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{z}_i = \frac{\xi_1-\xi_2}{4}\,\mathbf{v} + \frac{\xi_1+\xi_2}{2}\,\mathbf{u}\,i + \tau^i\,\mathbf{z}_0^{\mathrm{h}}. \tag{52}$$

از (12) نتیجه میشود

$$\mathbf{z}_0 = \boldsymbol{\xi}, \tag{53}$$

و در نتیجه

$$\mathbf{z}_i = \frac{\xi_1-\xi_2}{4}\,(1-\tau^i)\,\mathbf{v} + \tau^i\,\boldsymbol{\xi} + \frac{\xi_1+\xi_2}{2}\,\mathbf{u}\,i, \tag{54}$$

یا به شکلِ باز،

$$\begin{aligned} z_{\alpha\,(2\,n)} &= \xi_\alpha + n\,(\xi_1+\xi_2),\\ z_{\alpha\,(2\,n+1)} &= (n+1)\,(\xi_1+\xi_2). \end{aligned} \tag{55}$$

از (8) نتیجه میشود

$$q_{\alpha\,i} = -q_{\acute{\alpha}\,(i-1)}\,\frac{z_{\acute{\alpha}\,(i-1)}}{z_{\acute{\alpha}\,(i-1)}+\xi_\alpha}, \tag{56}$$

که ترکیبَش با (43) میدهد

$$q_{\alpha\,i}\,z_{\alpha\,i} = -q_{\acute{\alpha}\,(i-1)}\,z_{\acute{\alpha}\,(i-1)}. \tag{57}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} q_{\alpha\,(2\,n)} &= q_{\alpha\,0}\,\frac{z_{\alpha\,0}}{z_{\alpha\,(2\,n)}},\\ q_{\alpha\,(2\,n+1)} &= -q_{\acute{\alpha}\,0}\,\frac{z_{\acute{\alpha}\,0}}{z_{\alpha\,(2\,n+1)}}, \end{aligned} \tag{58}$$

که از ترکیب َش با (55) نتیجه میشود

$$q_{\alpha\,(2\,n)} = q_{\alpha\,0}\,\frac{\xi_\alpha}{\xi_\alpha + n\,(\xi_1+\xi_2)},$$
$$q_{\alpha\,(2\,n+1)} = q_{\alpha\,1}\,\frac{1}{n+1},$$
$$= -q_{\acute\alpha\,0}\,\frac{\xi_{\acute\alpha}}{(n+1)\,(\xi_1+\xi_2)}. \quad (59)$$

داریم

$$Q_\alpha = q'_{\alpha\,(2\,n)} + \sum_{i=0}^{2\,n-1} q_{\alpha\,i},$$
$$= q'_{\alpha\,(2\,n+1)} + \sum_{i=0}^{2\,n} q_{\alpha\,i}, \quad (60)$$

که

$$q'_{\alpha\,i} := \int \mathrm{d}S\;\sigma_{\alpha\,i}. \quad (61)$$

داریم

$$\sum_{i=0}^{n} q_{\alpha\,(2\,i)} = q_{\alpha\,0}\,\frac{\xi_\alpha}{\xi_1+\xi_2}\,\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) + O(1),$$
$$\sum_{i=0}^{n} q_{\alpha\,(2\,i+1)} = -q_{\acute\alpha\,0}\,\frac{\xi_{\acute\alpha}}{\xi_1+\xi_2}\,\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) + O(1), \quad (62)$$

که نتیجه میدهد سریها یِ طرف ِ راست ِ (60) همگرا یند، اگر و تنها اگر

$$q_{2\,0}\,\xi_2 = q_{1\,0}\,\xi_1. \quad (63)$$

از مقایسه یِ این با (11) دیده میشود این هم ان شرط ِ همپتانسیلبودن ِ دوکره است. اگر دوکره همپتانسیل نباشند،

$$\bar{E}(s) = \frac{\delta V}{\delta(s)}, \quad (64)$$

که δV اختلافِپتانسیل ِ دوکره، و $E(s)$ میانگین ِ مثلفه یِ میدان در راستا یِ پاره‌خط ِ $\Delta(s)$ رو یِ این پاره‌خط است، که $\Delta(s)$ پاره‌خط ی است که دوکره را به هم وصل میکند، و موازی با خط‌المرکزین ِ

دوکره و به فاصله یِ s از آن است. $\delta(s)$ طول ِ $\Delta(s)$ است. داریم

$$\int_{\Delta(s)} \mathrm{d}\ell\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} \geq [\bar{E}(s)]^2\,\delta(s), \tag{65}$$

که همراه با (64) نتیجه میدهد

$$U \geq \frac{(\delta V)^2}{2\,\epsilon_0}\int_0^{s_0}\mathrm{d}s\;\frac{2\,\pi\,s}{\delta(s)}, \tag{66}$$

که U انرژی یِ پتانسیل ِ الکترُستاتیک و s_0 یک مقدار ِ مثبت ِ دلبخاه است، چنان که خط ی موازی با خط‌المرکزین ِ دوکره و به فاصله یِ s_0 از آن، دوکره را قطع کند. از

$$\delta(s) = a_1 + a_2 - \sqrt{(a_1)^2 - s^2} - \sqrt{(a_2)^2 - s^2}, \tag{67}$$

نتیجه میشود

$$\delta(s) = O(s^2), \tag{68}$$

که همراه با (66) نتیجه میدهد انرژی یِ پتانسیل ِ این دوکره بینهایت است، مگر دوکره همپتانسیل باشند. از این پس فرض میکنیم دوکره همپتانسیل اند. به این ترتیب (63) درست است و سریها یِ طرف ِ راست ِ (60) همگرا یند و حد ِشان هم یکسان است. این نتیجه میدهد $q'_{\alpha\,(2\,n)}$ و $q'_{\alpha\,(2\,n+1)}$ هم در $n\to\infty$ همگرا یند و

$$\lim_{n\to\infty} q'_{\alpha\,(2\,n+1)} = \lim_{n\to\infty} q'_{\alpha\,(2\,n)}. \tag{69}$$

حالا توجه کنیم که وقت ی دوکره همپتانسیل اند، پتانسیل ِ مشترک ِ این دوکره یک بیشینه یا کمینه یِ مطلق ِ پتانسیل ِ الکتریکی است. این یعنی مئلفه یِ عمودبرسطح ِ میدان ِ الکتریکی رو یِ سطح ِ دوکره، تغییرِعلامت نمیدهد، پس چگالی یِ سطحی رو یِ سطح ِ دوکره هم تکعلامت است. به این ترتیب هر یک از $\sigma_{\alpha\,i}$ها تکعلامت است. علامت ِ $\sigma_{\alpha\,(2\,n)}$ هم ان علامت ِ $\sigma_{\alpha\,0}$، و علامت ِ $\sigma_{\alpha\,(2\,n+1)}$ خلاف ِ علامت ِ $\sigma_{\acute{\alpha}\,0}$ است. علامت ِ $\sigma_{2\,0}$ هم هم ان علامت ِ $\sigma_{1\,0}$ است. پس علامت ِ $q'_{\alpha\,(2\,n+1)}$ خلاف ِ علامت ِ $q'_{\alpha\,(2\,n)}$ است. از ترکیب ِ این با (69) نتیجه میشود

$$\lim_{i\to\infty} q'_{\alpha\,i} = 0. \tag{70}$$

از این، همراه با این که $\sigma_{\alpha\, i}$ها تکعلامت اند نتیجه میشود چندقطبیها یِ توزیع ِ $\sigma_{\alpha\, i}$ هم در $i \to \infty$ به صفر میگرایند. از (70) ضمنَن نتیجه میشود

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} q_{\alpha\, i},\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^n\, q_{\alpha\, 0}\, \xi_\alpha \left\{ \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \right) \xi_\alpha + \left[\frac{n+1}{2}\right] \xi_{\acute{\alpha}} \right\}^{-1}. \qquad (71)
\end{aligned}
$$

پتانسیل ِ کره‌ها از (38) به دست می‌آید، که ضمنَن میشود آن را چنین نوشت

$$
V = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{q_{\alpha\, i}}{a_\alpha + b_{\alpha\, i}} + \sum_{i=0}^{n} \frac{q_{\acute{\alpha}\, i}}{a_\alpha + d - b_{\acute{\alpha}\, i}} \right) + V'_{\alpha\, \alpha\, (m+1)} + + V'_{\alpha\, \acute{\alpha}\, (n+1)}, \qquad (72)
$$

که $V'_{\alpha\, \beta\, i}$ پتانسیل ِ حاصل از $\sigma_{\beta\, i}$ بر کره یِ α در دورترین نقطه نسبت به کره یِ $\acute{\alpha}$ است. داریم

$$
\lim_{i\to\infty} V'_{\alpha\, \beta\, i} = 0. \qquad (73)
$$

هر یک از سریها یِ طرف ِ راست ِ (72) هم یک سری یِ متناوب است که قدرِمطلق ِ جمله‌ها یِش نزولی و حد ِ جمله یِ عمومی یَش صفر است. پس هر یک از این سریها همگرا است. داریم

$$
\frac{q_{\alpha\, i}}{a_\alpha + b_{\alpha\, i}} + \frac{q_{\acute{\alpha}\, i}}{a_\alpha + d - b_{\acute{\alpha}\, (i-1)}} = 0, \qquad i \neq 0, \qquad (74)
$$

چون $q_{\alpha\, i}$ تصویر ِ $q_{\acute{\alpha}\, (i-1)}$ در کره یِ α است. به این ترتیب،

$$
V = \frac{q_{\alpha\, 0}}{4\,\pi\,\epsilon_0\, a_\alpha}, \qquad (75)
$$

که هم ان (11) است.

سرانجام، (39) میشود

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_{1\, i}\, q_{2\, j}}{[(z_{1\, i})^{-1} + (z_{2\, j})^{-1}]^2},\\
&= \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q_{1\, i}\, z_{1\, i})\,(q_{2\, j}\, z_{2\, j})\,(z_{1\, i}\, z_{2\, j})}{(z_{1\, i} + z_{2\, j})^2},\\
&= (4\,\pi\,\epsilon_0\, V^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}\, z_{1\, i}\, z_{2\, j}}{(z_{1\, i} + z_{2\, j})^2}. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

برا یِ تعیین ِ ترتیب ِ درست ِ جمعزدن ِ این سریها، توجه میکنیم که نیرو یِ وارد بر کره یِ 2 از کره یِ 1 را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}F &= F_{\sigma_2\,\sigma_{1\,(m+1)}} + \sum_{i=0}^{m} F_{\sigma_2\,q_{1\,i}},\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m} F_{\sigma_2\,q_{1\,i}},\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} F_{q_{2\,j}\,q_{1\,i}}\right),\end{aligned}\tag{77}$$

که $F_{A\,B}$ نیرو یِ وارد بر A ناشی از B است. پس،

$$F = (4\,\pi\,\epsilon_0\,V^2)\,\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{i+j}\,z_{1\,i}\,z_{2\,j}}{(z_{1\,i}+z_{2\,j})^2}\right].\tag{78}$$

البته روشن است که میشود ترتیب ِ حدگرفتن را عوض کرد.

این رابطه سادهتر میشود اگر شعاع ِ دوکره هم یکسان باشد. در این حالت از (55) و (78) نتیجه میشود

$$F = (4\,\pi\,\epsilon_0\,V^2)\,\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}\,i\,j}{(i+j)^2}\right].\tag{79}$$

تعریف میکنیم

$$\begin{aligned}f^1_{m\,n} &:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i}\frac{(-1)^{i+j}\,i\,j}{(i+j)^2},\\ f^2_{m\,n} &:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m-i+1}^{n-i}\frac{(-1)^{i+j}\,i\,j}{(i+j)^2},\\ f^3_{m\,n} &:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=n-i+1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}\,i\,j}{(i+j)^2},\end{aligned}\tag{80}$$

که فرض شده

$$m \le n.\tag{81}$$

رابطه‌ها یِ (80) را میشود چنین نوشت.

$$
\begin{aligned}
f^1_{m\,n} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^k\,i\,(k-i)}{k^2},\\
f^2_{m\,n} &= \sum_{k=m+1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^k\,i\,(k-i)}{k^2},\\
f^3_{m\,n} &= \sum_{k=n+1}^{m+n}\sum_{i=k-n}^{m}\frac{(-1)^k\,i\,(k-i)}{k^2},
\end{aligned}
\tag{82}
$$

داریم

$$
\sum_{i=1}^{m} i\,(k-i) = \frac{m\,(m+1)\,(3\,k-2\,m-1)}{6},
\tag{83}
$$

که نتیجه میدهد

$$
\begin{aligned}
f^1_{m\,n} &= \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k\,k\,(k^2-1)}{6\,k^2},\\
f^2_{m\,n} &= \sum_{k=m+1}^{n}\frac{(-1)^k\,m\,(m+1)\,(3\,k-2\,m-1)}{6\,k^2},\\
f^3_{m\,n} &= \sum_{k=n+1}^{m+n}\frac{(-1)^k\,m\,(m+1)\,(3\,k-2\,m-1)}{6\,k^2}\\
&\quad -\sum_{k=n+1}^{m+n}\frac{(-1)^k\,(k-n-1)\,(k-n)\,(k+2\,n+1)}{6\,k^2}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

دنباله یِ $g^{\mathrm{I}_1\,\cdots}$ را یک زیردنباله یِ g تعریف میکنیم که دامنه اَش $\mathbb{N}_{\mathrm{I}_1}\times\cdots$ است. I_s مقدارها یِ e و o را میپذیرد. $\mathbb{N}_{\mathrm{e}}$ مجموعه یِ عددها یِ طبیعی یِ زوج، و $\mathbb{N}_{\mathrm{o}}$ مجموعه یِ عددها یِ طبیعی یِ فرد است.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}(-1)^k &= \frac{m}{2}, \qquad m\in\mathbb{N}_{\mathrm{e}},\\
\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{k} &= -\ln 2 + o(m^0).
\end{aligned}
\tag{85}
$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
\left(p+\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(p-\frac{1}{2}\right)^{-1} &= \frac{1}{2}\,[(p+1)^{-1}-(p-1)^{-1}]\,[1+o(p^{-1})],\\
\left(p+\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(p-\frac{1}{2}\right)^{-2} &= \frac{1}{2}\,[(p+1)^{-2}-(p-1)^{-2}]\,[1+o(p^{-1})],
\end{aligned}
\tag{86}
$$

که نتیجه میدهد

$$\sum_{k=M+1}^{N} (-1)^k\, k^{-1} = \frac{1}{2}\, \left[\left(N+\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(M+\frac{1}{2}\right)^{-1}\right] + o(M^{-2}), \qquad (M,N)\in(\mathbb{N}_{\mathrm{e}}\times\mathbb{N}_{\mathrm{e}}), \tag{87}$$

و

$$\sum_{k=M+1}^{N} (-1)^k\, k^{-2} = \frac{1}{2}\, \left[\left(N+\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(M+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right] + o(M^{-3}), \qquad (M,N)\in(\mathbb{N}_{\mathrm{e}}\times\mathbb{N}_{\mathrm{e}}). \tag{88}$$

با تعریفِ

$$\tilde{f}^{2}_{m\,n} := \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{(-1)^k\, m\,(m+1)\,(3\,k-2\,m-1)}{6\,k^2},$$
$$\tilde{f}^{3}_{m\,n} := -\sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{(-1)^k\,(k-n-1)\,(k-n)\,(k+2\,n+1)}{6\,k^2}, \tag{89}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
f^{1\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}}_{m\,n} &= \frac{1}{6}\, \left[\frac{m}{2}+\ln 2\right] + o(m^0),\\
\tilde{f}^{2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}}_{m\,n} &= \frac{1}{6}\, \Bigg\{\frac{3\,m\,(m+1)}{2}\, \left[\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(m+\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]\\
&\quad - \frac{m\,(m+1)\,(2\,m+1)}{2}\, \left[\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(m+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]\Bigg\} + o(m^0),\\
\tilde{f}^{3\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}}_{m\,n} &= \frac{1}{6}\, \Bigg\{-\frac{m}{2} + \frac{3\,n\,(n+1)+1}{2}\, \left[\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]\\
&\quad - \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{2}\, \left[\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]\Bigg\} + o(m^0).
\end{aligned} \tag{90}$$

به این ترتیب، با تعریفِ

$$x := \frac{m}{n} \tag{91}$$

نتیجه میشود

$$\lim_{n\to\infty}[f^{1\,\mathrm{ee}}_{(x\,n)\,n}+f^{2\,\mathrm{ee}}_{(x\,n)\,n}+f^{3\,\mathrm{ee}}_{(x\,n)\,n}]=\frac{1}{6}\,\left[\ln 2-\frac{x^2-4\,x+1}{4\,(x+1)^2}\right]. \qquad (92)$$

این عبارت بسته‌گی یِ نتیجه به ترتیب ِ حدگیری را به روشنی نشان میدهد. بر اساس ِ (79)، ترتیب ی که در محاسبه یِ نیرو وارد میشود متناظر با $x=0$ است. سری یِ طرف ِ راست ِ (79) همگرا است. از اینجا نتیجه میشود طرف ِ راست ِ (92) در $x=0$، هم ان حد ِ سری یِ طرف ِ راست ِ (79) است:

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(f^1_{m\,n}+f^2_{m\,n}+f^3_{m\,n})\right]=\frac{1}{6}\,\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right). \qquad (93)$$

همچنین دیده میشود

$$\lim_{n\to\infty}(f^1_{n\,n}+f^2_{n\,n}+f^3_{n\,n})=\frac{1}{6}\,\left(\ln 2+\frac{1}{8}\right). \qquad (94)$$

[2] و [3] شامل ِ محاسبه‌ها یی مشابه برا یِ یک مسئله یِ دیگر (دو کره ِ رسانا یِ چسبیده به هم در یک میدان ِ الکتریکی یِ خارجی) اند. همچنین در [4] نیرو یِ بین ِ دو کره یِ باردار بررسی شده است.

برا یِ دو کره یِ رسانا یِ یکسان به شعاع ِ a که به هم چسبیده اند، رابطه یِ پتانسیل ِ الکتریکی و بار ِ هر کره هم ساده میشود. در این حالت از (71) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}Q&=q_0\,\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i+1},\\ &=q_0\,\ln 2,\end{aligned} \qquad (95)$$

که Q بار ِ هر کره، و q_0 بارِتصویر ِ مرکز ِ هر کره است. به این ترتیب،

$$V=\frac{1}{\ln 2}\,\frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_0\,a}, \qquad (96)$$

که a شعاع ِ هر کره هست. از جمله C (ظرفیت ِ این مجموعه) میشود

$$\begin{aligned}C&=\frac{2\,Q}{V},\\ &=(\ln 4)\,(4\,\pi\,\epsilon_0\,a),\\ &=1.3863\,(4\,\pi\,\epsilon_0\,a).\end{aligned} \qquad (97)$$

ظرفیت ِ این مجموعه بزرگتر از ظرفیت ِ یک کره، و کوچکتر از ظرفیت ِ دو کره یِ یکسان ِ دور از هم است که با سیم ِ نازک ی به هم وصل شده اند.

سرانجام،

$$F = \frac{4\,\ln 2 - 1}{6\,(\ln 2)^2}\,\frac{Q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,(2\,a)^2},$$
$$= 0.6149\,\frac{Q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,(2\,a)^2}. \qquad (98)$$

این نیرو کوچکتر از نیرو یِ بین ِ دو بار ِ نقطه‌ای یِ Q است که هر یک در مرکز ِ یک کره باشد.

3 پانوشتها

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 2

[2] H. F. M. van den Bosch, K. J. Ptasinski, & P. J. A. M. Derkhof; "two conductiong spheres in a parallel electric field" Journal of Applied Physics **78** (1995) 6345–6352

[3] احمد شریعتی؛ «دو کره یِ رسانا یِ همسان ِ مماس، در یک میدان ِ الکتریکی» گاما 22 (بهار ِ 1388) 36 تا 53

[4] مسلم مرادی؛ «محاسبه یِ نیرو یِ بین ِ دو کره یِ رسانا یِ باردار» گاما 9 (زمستان ِ 1384) 29 تا 40