X1-067 (2010/04/24)

ناظرها یِ همزمان

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

ناظرها یِ همزمان (به معنی یِ اَینشتَین [1]) در فضازمان ِ مینکُفسکی [2] بررسی میشوند و نشان داده میشود که هر ناظر ِ همزمان ی خیزیده یِ یک ناظر ِ لخت است. یعنی هر ناظر ِ همزمان ی مجموعه ای از ساعتها یی است که با سرعت ِ ثابت و یکسان حرکت میکنند.

1 ناظر

یک مجموعه ساعت را در نظر بگیرید که با $\mathbf{R}$ برچسب میخُرند. جا یِ ساعت ِ $\mathbf{R}$ در زمان ِ t با نگاشت ِ $\mathbf{f}$ داده میشود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{R}, t), \tag{1}$$

که $\mathbf{r}$ فضا و t زمان در فضازمان ِ مینکُفسکی [2] با متریک ِ

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2}$$

است. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ضرب ِ درونی یِ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با متریک ِ δ، و $\mathrm{d}s^2$ مربع ِ طولِقوس است. هر ساعت ویژه‌زمان ِ خُد َش (τ) را میسنجد، که

$$\tau = h(t, \mathbf{R}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

فرض میکنیم رابطه یِ $(\tau, \mathbf{R})$ با $(t, \mathbf{r})$ یکبه‌یک و پوشا است. یعنی به ازا یِ هر $(t, \mathbf{r})$ یک و فقط یک $(\tau, \mathbf{R})$ هست، و بر عکس. همچنین فرض میکنیم این رابطه هموار است. در این صورت $(\tau, \mathbf{R})$ را میشود مختصات ی برا یِ فضا یِ مینکُفسکی [2] گرفت و متریک بر حسب ِ این مختصات میشود

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\,\nu}\,\mathrm{d}R^\mu\,\mathrm{d}R^\nu, \tag{5}$$

که تعریف کرده ایم

$$R^0 := \tau. \tag{6}$$

شاخصها یِ یونانی هم مقدار ِ صفر میگیرند و هم مقدار ِ فضایی. شاخصها یِ لاتین فقط مقدار ِ فضایی میگیرند. متغیرها یی که با حروف ِ سیاه مشخص شده اند هم فقط شاخصها یِ فضایی میگیرند.

به مجموعه یِ این ساعتها یک ناظر میگوییم. هر رویداد با $(\tau, \mathbf{R})$ مشخص میشود. $\mathbf{R}$ ساعت ی را مشخص میکند که جهانخط َش از آن رویداد میگذرد، و τ ویژه‌زمان ِ آن ساعت (مقدار ی که ساعت نشان میدهد) در آن رویداد است.

(2) و (5) را میشود بر حسب ِ t و $\mathbf{R}$ نوشت. (2) میشود

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right)\mathrm{d}t^2 + 2\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R^i}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}R^i + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R^i}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R^j}\,\mathrm{d}R^i\,\mathrm{d}R^j, \tag{7}$$

و (5) میشود

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = g_{0\,0}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}t^2 + 2\left(g_{0\,i}\,\frac{\partial h}{\partial t} + g_{0\,0}\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\partial h}{\partial R^i}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}R^i \\ + \left(g_{0\,0}\,\frac{\partial h}{\partial R^i}\,\frac{\partial h}{\partial R^j} + 2\,g_{0\,i}\,\frac{\partial h}{\partial R^j} + g_{i\,j}\right)\mathrm{d}R^i\,\mathrm{d}R^j.\end{aligned} \tag{8}$$

از جمله از (4) و (7) و (8) دیده میشود

$$g_{0\,0} = -c^2, \tag{9}$$

که نتیجه یِ عجیب ی نیست: $\mathbf{R}$ ِ ثابت جهانخط ِ یک ساعت است، و رو یِ این جهانخط

$$\mathrm{d}s^2\Big|_{\mathbf{R}} = -c^2\,\mathrm{d}\tau^2. \tag{10}$$

2 همزمانی

از آنجا که زمان ِ جهانی نداریم، همزمانی یِ دو رویداد به تعریف وابسته است. میشود برا یِ رویدادها یک مختصه یِ زمانی یِ T (یعنی یک نگاشت از فضازمان به مجموعه یِ عددها یِ حقیقی) تعریف کرد، و همزمانی یِ دو رویداد ِ r_1 و r_2 را برابری یِ $T(r_1)$ با $T(r_2)$ تعریف کرد، به شرط ی که مجموعه‌ها یِ تراز ِ T فضاگونه باشند (یعنی گرادیان ِ T زمانگونه باشد). به این همزمانی همزمانی یِ مختصاتی میگوییم.

دو ساعت را در نظر بگیرید. یک ی از این ساعتها وقت ی مقدار ِ τ_1 را نشان میدهد یک تپ ِ نور به سو یِ ساعت ِ دیگر میفرستد. ساعت ِ دیگر وقت ی مقدار ِ τ_2 را نشان میدهد این تپ را میگیرد و بلافاصله یک تپ به سو یِ ساعت ِ اول باز میتاباَند. ساعت ِ اول وقت ی مقدار ِ τ_3 را نشان میدهد این تپ را میگیرد. میگوییم این دوساعت به معنی یِ اَینشتَین [1] همزمان اند اگر برابری یِ

$$\tau_1 + \tau_3 = 2\,\tau_2, \tag{11}$$

مستقل از زمان ِ ارسال ِ تپ ِ اول و مستقل از این که کدام یک از دوساعت تپ ِ اول را فرستاده برقرار باشد. [3] یک بحث ِ مفصلتر در باره یِ انواع ِ همزمانیها را دارد.

متناظر با هر ناظر، دستِ‌کم موضعَن میشود یک همزمانی یِ مختصاتی تعریف کرد. برا یِ این کار از جهانخط ِ هر ساعت یک نقطه میگیریم، چنان که مجموعه یِ این نقطه‌ها هموار و فضاگونه باشد. مقدار ِ نگاشت ِ h در (4) را بر این مجموعه صفر تعریف میکنیم. همزمانی یِ مختصاتی را بر اساس ِ مختصه یِ زمانی یِ τ تعریف میکنیم. البته روشن نیست که با این تعریف ِ τ، ساعتها به معنی یِ

اَینشتَین [1] همزمان شده باشند. میگوییم یک ناظر همزمان است، اگر ساعتها یَش به معنی یِ اَینشتَین [1] همزمان باشند. شرط ِ این که چنین باشد (11) است. برا یِ بررسی یِ این شرط، دو ساعت ِ $\mathbf{R}$ و $(\mathbf{R}+\delta\mathbf{R})$ را در نظر بگیرید. ساعت ِ اول یک تپ ِ نور را در τ_1 به سو یِ ساعت ِ دوم میگسیلد. این تپ در τ_2 دریافت میشود. ساعت ِ دوم در τ_2 یک تپ ِ نور به سو یِ ساعت ِ اول میگسیلد. این تپ در τ_3 درافت میشود. برا یِ نور $\mathrm{d}s^2$ صفر است. به این ترتیب از (5) نتیجه میشود

$$g_{0\,0}\,(\tau_2-\tau_1)^2+2\,g_{0\,i}\,\delta R^i\,(\tau_2-\tau_1)+g_{i\,j}\,\delta R^i\,\delta R^j=0, \tag{12}$$

که نتیجه میدهد

$$\tau_2-\tau_1=-\frac{g_{0\,i}\,\delta R^i+\sqrt{(g_{0\,i}\,g_{0\,j}-g_{0\,0}\,g_{i\,j})\,\delta R^i\delta R^j}}{g_{0\,0}}. \tag{13}$$

برا یِ انتخاب ِ جواب ِ مناسب بین ِ دوریشه یِ (12) از این استفاده شده که حاصلِضرب ِ ریشهها منفی است، $g_{0\,0}$ منفی است، و ریشه یِ موردِنظر مثبت است. با یک محاسبه یِ مشابه معلوم میشود

$$\tau_3-\tau_2=-\frac{-g_{0\,i}\,\delta R^i+\sqrt{(g_{0\,i}\,g_{0\,j}-g_{0\,0}\,g_{i\,j})\,\delta R^i\delta R^j}}{g_{0\,0}}. \tag{14}$$

البته روشن است که (12) تا (14)، تا مرتبه یِ یک نسبت به $\delta\mathbf{R}$ درست اند. از (13) و (14) نتیجه میشود شرط ِ این که (11) برا یِ همه یِ ساعتها یِ نزدیک به هم برقرار باشد

$$g_{0\,i}=0, \tag{15}$$

است.

با استفاده از (9) و (15)، از برابری یِ ضریبها یِ $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}R^i$ در (7) و (8) نتیجه میشود

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial R^i}=-c^2\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\partial h}{\partial R^i}, \tag{16}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}-c^2\,\frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial R^i}&=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{-1}\,\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial R^i}\right],\\&=\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{-1}\,\left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t\,\partial R^i}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial R^i}-\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{-1}\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial R^i}\right].\end{aligned} \tag{17}$$

از (4) نتیجه میشود

$$-c^2\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\partial^2 h}{\partial t\,\partial R^i}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t\,\partial R^i}, \tag{18}$$

که ترکیب َش با (17) نتیجه میدهد

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R^i}=\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial R^i}, \tag{19}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}. \tag{20}$$

از (4) نتیجه میشود

$$-c^2\,\frac{\partial h}{\partial t}\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}. \tag{21}$$

به این ترتیب، از (4) و (20) و (21) نتیجه میشود

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}\right)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}=\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}-c^2\right)\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}. \tag{22}$$

سرعت ِ ساعتها کمتر از سرعت ِ نور است. پس پرانتز ِ طرف ِ راست ِ (22) ناصفر است. از اینجا نتیجه میشود شتاب ِ هر ساعت با سرعت ِ آن ساعت موازی است:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}=\xi\,\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}. \tag{23}$$

با گذاشتن ِ این در (22) نتیجه میشود

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2}=0. \tag{24}$$

یعنی شتاب ِ همه یِ ساعتها صفر است. میخاهیم نشان دهیم سرعت ِ همه یِ ساعتها هم یکسان است. یک ساعت را در نظر میگیریم. چون سرعت ِ این ساعت ثابت است، یک چارچوب ِ لخت هست که از دید ِ آن این ساعت ساکن است. مبدئ ِ مکان ِ این چارچوب را جا یِ میگیریم. زمان و مکان (t و $\mathbf{r}$) را نسبت به این چارچوب میسنجیم. برچسب ِ هر ساعت را مکان ِ آن ساعت در زمان ِ صفر میگیریم. به این ترتیب برچسب ِ ساعت ی که در مبدئ است $\mathbf{0}$ میشود. جهانخط ِ ساعت ِ $\mathbf{R}$ هم میشود

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}+\mathbf{V}\,t, \tag{25}$$

که $\mathbf{V}$ مستقل از زمان است. $\mathbf{R}$ در رویداد ِ 1 یک تپ ِ نور به سو یِ $\mathbf{R}$ میگسیلد. $\mathbf{0}$ در رویداد ِ 2 این تپ را میگیرد و به $\mathbf{R}$ باز میتاباند. $\mathbf{R}$ در رویداد ِ 3 بازتابش را میگیرد. داریم

$$\begin{aligned} c\,(t_2 - t_1) &= \sqrt{\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} + 2\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}\,t_1 + \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\,t_1^2}, \\ c\,(t_3 - t_2) &= \sqrt{\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} + 2\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}\,t_3 + \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\,t_3^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

که نتیجه میدهند

$$\begin{aligned} t_1 &= \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{-1}\,\left(t_2 + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c^2} - S\right), \\ t_3 &= \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{-1}\,\left(t_2 + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c^2} + S\right), \end{aligned} \tag{27}$$

که

$$S := \sqrt{\left(t_2 + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}}{c^2} - t_2^2\right)\,\left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)}. \tag{28}$$

به این ترتیب،

$$\frac{t_3 + t_1}{2} = \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{-1}\,\left(t_2 + \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right). \tag{29}$$

$\mathbf{0}$ و $\mathbf{R}$ به معنی یِ اَینشتَین [1] همزمان خاهند بود، اگر تغیر ِ ویژه‌زمان ِ $\mathbf{0}$ در رویداد ِ 2 میانگین ِ تغییر ِ ویژه‌زمانها یِ $\mathbf{R}$ در رویدادها یِ 1 و 3 باشد:

$$\delta\frac{\tau_1 + \tau_3}{2} = \delta\tau_2. \tag{30}$$

اما داریم

$$\begin{aligned} \delta\tau_1 &= \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{1/2}\,\delta t_1, \\ \delta\tau_2 &= \delta t_2, \\ \delta\tau_3 &= \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{1/2}\,\delta t_3, \end{aligned} \tag{31}$$

که از ترکیب َش با (29) نتیجه میشود

$$\delta\frac{\tau_1 + \tau_3}{2} = \left(1 - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)^{-1/2}\,\delta\tau_2. \tag{32}$$

از اینجا دیده میشود شرطِ برقراری یِ (30) این است که $\mathbf{V}$ صفر باشد. این یعنی از دیدِ چارچوب ی که یک ساعت را ساکن میبیند، همه یِ ساعتها باید ساکن باشند. پس از دیدِ یک چارچوبِ لختِ دلبخاه، سرعتِ همه یِ ساعتها یکسان است. به این ترتیب شرطِ این که ساعتها یِ یک ناظر به معنی یِ اَینشتَین [1] همزمان باشند این است که سرعتِ همه ثابت و یکسان باشد.

3 پانوشتها

[1] Einstein

[2] Minkowski

[3] احمد شریعتی؛ «ناظر در نسبیتِ خاص و عام» گاما 2 (بهارِ 1383) 63 تا 75