X1-068 (2010/05/27)

نگاشتِ همدیس و مسئله یِ پُوَسُن در دوبُعد

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

رابطه یِ دو مسئله یِ پُوَسُن [1] در دو ناحیه یِ دوبُعدی بررسی میشود که با یک نگاشتِ همدیس به هم مربوط اند.

1 مسئله یِ پُوَسُن

مسئله یِ پُوَسُن [1] در ناحیه یِ $\mathbb{D}$ (یک ناحیه یِ باز و کراندار) یافتنِ نگاشتِ ϕ با دامنه یِ $\mathbb{D}$ است، چنان که

$$\triangle\phi(z) = \rho(z), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

و

$$\phi(z) = h_1(z), \qquad z \in \mathbb{B}_1, \tag{2}$$

$$\partial_{\mathrm{n}}\phi(z) = h_2(z), \qquad z \in \mathbb{B}_2, \tag{3}$$

که

$$\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 = \varnothing,$$
$$\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \partial\mathbb{D}. \tag{4}$$

$\triangle$ لَپلَسی و ∂_{n} مشتقگیری در جهت ِ عمود بر مرز ِ $\mathbb{D}$ به سو ی ِ بیرون ِ $\mathbb{D}$ است. منظور از عبارتها ی ِ طرف ِ چپ ِ (2) و (3) هم حد ِ این کمیتها است. لَپلَسی بر حسب ِ متریک (g) داده میشود:

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{D}(g)}}\,\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\,\sqrt{\mathfrak{D}(g)}\,g^{\nu\,\mu}\,\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}, \tag{5}$$

که

$$\mathfrak{D}(g) := \det(\delta\, g), \tag{6}$$

و

$$\delta^{\mu\,\nu} := \begin{cases} 1, & \mu = \mu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}. \tag{7}$$

2 نگاشت ِ همدیس

میگوییم نگاشت ِ f با دامنه ی ِ $\mathbb{D}$ همدیس است، اگر

$$\tilde{g}_{\alpha\,\beta}(w)\,\frac{\partial w^{\alpha}}{\partial z^{\mu}}\,\frac{\partial w^{\beta}}{\partial z^{\nu}} = \Lambda(z)\,g_{\mu\,\nu}(z), \tag{8}$$

که

$$w := f(z), \tag{9}$$

و $\tilde{g}$ متریک در $f(\mathbb{D})$ است.

نگاشت ِ همدیس ِ وارونپذیر ِ f را در نظر بگیرید. از (8) نتیجه میشود

$$g^{\mu\,\nu}(z)\,\frac{\partial w^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \Lambda(z)\,\tilde{g}^{\alpha\,\beta}(w)\,\frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\beta}}. \tag{10}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\triangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{D}(g)}}\,\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\,\sqrt{\mathfrak{D}(g)}\,g^{\nu\,\mu}\,\frac{\partial w^{\alpha}}{\partial z^{\nu}}\,\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}},\\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{D}(g)}}\,\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\,\sqrt{\mathfrak{D}(g)}\,\Lambda\,\tilde{g}^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\beta}}\,\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}.\end{aligned} \tag{11}$$

از (8) نتیجه میشود

$$\mathfrak{D}(\tilde{g})\ \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{2} = \Lambda^{D}\,\mathfrak{D}(g), \tag{12}$$

که D بُعد ِ $\mathbb{D}$ است. به این ترتیب،

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{D}(g)}}\,\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\,\sqrt{\mathfrak{D}(\tilde{g})}\,\Lambda^{(2-D)/2}\,\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|\,\frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\beta}}\,\tilde{g}^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}. \tag{13}$$

داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\left[\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|\,\frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\beta}}\right] &= \left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|\,\left(\frac{\partial^{2} w^{\alpha}}{\partial z^{\nu}\,\partial z^{\mu}}\,\frac{\partial z^{\mu}}{\partial w^{\alpha}}\,\frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\beta}}\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\partial^{2} w^{\alpha}}{\partial z^{\nu}\,\partial z^{\mu}}\,\frac{\partial z^{\mu}}{\partial w^{\beta}}\,\frac{\partial z^{\nu}}{\partial w^{\alpha}}\right),\\ &= 0.\end{aligned} \tag{14}$$

به این ترتیب، با استفاده از (12) نتیجه میشود

$$\triangle = \Lambda^{D/2}\,\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{D}(\tilde{g})}}\,\frac{\partial}{\partial w^{\beta}}\,\sqrt{\mathfrak{D}(\tilde{g})}\,\Lambda^{(2-D)/2}\,\tilde{g}^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial}{\partial w^{\alpha}}. \tag{15}$$

در $D = 2$، این رابطه به این شکل ِ ساده در می‌آید.

$$\triangle = \Lambda\,\tilde{\triangle}. \tag{16}$$

از این پس فرض میکنیم $\mathbb{D}$ دوبُعدی است. متناظر با نگاشت ِ همدیس ِ وارونپذیر ِ f و هر میدان ِ اسکالر ِ ϕ (هردو با دامنه یِ $\mathbb{D}$) میدان ِ اسکالر ِ $\tilde{\phi}$ با دامنه یِ $\mathbb{D}$ تعریف میشود، که پیشران ِ ϕ با f است:

$$\tilde{\phi}[f(z)] = \phi(z). \tag{17}$$

از (8) دیده میشود

$$\partial_{\rm n} = (\Lambda)^{1/2}\,\tilde{\partial}_{\rm n}, \tag{18}$$

که $\tilde{\partial}_{\rm n}$ مشتقگیری در جهت ِ عمود بر مرز ِ $f(\mathbb{D})$ به سو یِ بیرون است. به این ترتیب معلوم میشود اگر $\mathbb{D}$ دوبُعدی و f یک نگاشت ِ همدیس ِ وارونپذیر ِ با دامنه یِ $\mathbb{D}$ باشد، یک مسئله یِ پوُؤَسُن [1] در $\mathbb{D}$ یعنی معادله‌ها یِ (1) تا (3) هم‌ارز است با یک مسئله یِ پوُؤَسُن [1] در $f(\mathbb{D})$:

$$\tilde{\triangle}\tilde{\phi}(w) = [\Lambda(z)]^{-1}\,\tilde{\rho}(w), \qquad w \in f(\mathbb{D}), \tag{19}$$

و

$$\tilde{\phi}(w) = \tilde{h}_1(w), \qquad\qquad w \in f(\mathbb{B}_1), \tag{20}$$

$$\tilde{\partial}_{\rm n}\tilde{\phi}(w) = [\Lambda(z)]^{-1/2}\,\tilde{h}_2(w), \qquad w \in f(\mathbb{B}_2). \tag{21}$$

3 تابع ِ گرین

تابعِ‌گرین ِ متناظر با مسئله‌یِ‌پوُؤَسُن [1] ِ رابطه‌ها یِ (1) تا (3) را با G نمایش میدهیم. داریم (مثلَن [2])

$$\triangle' G(z,z') = \delta(z,z'), \qquad (z,z') \in (\mathbb{D}\times\mathbb{D}), \tag{22}$$

و

$$G(z,z') = 0, \qquad\qquad (z,z') \in (\mathbb{D}\times\mathbb{B}_1), \tag{23}$$

$$\partial'_{\rm n} G(z,z') = \alpha(z'), \qquad (z,z') \in (\mathbb{D}\times\mathbb{B}_2), \tag{24}$$

که α فقط وقت ی ناصفر است که $\mathbb{B}_1$ تهی باشد (مسئله یِ نُیمان [3]). در این حالت

$$\oint_{\mathbb{B}_2} {\rm d}S\;\alpha(z) = 1. \tag{25}$$

δ (دلتا یِ دیرَک [4]) به این شکل تعریف میشود

$$\int {\rm d}V'\;\delta(z,z')\,\chi(z') = \chi(z). \tag{26}$$

نگاشت ِ همدیس ِ وارونپذیر ِ f با دامنه یِ $\mathbb{D}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{V} &= \sqrt{\mathfrak{D}(\tilde{g})}\,\mathrm{d}^D w, \\ &= \sqrt{\mathfrak{D}(\tilde{g})}\,\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right|\,\mathrm{d}^D z, \\ &= \Lambda^{D/2}\,\sqrt{\mathfrak{D}(\tilde{g})}\,\mathrm{d}^D w, \\ &= \Lambda^{D/2}\,\mathrm{d}V, \end{aligned} \tag{27}$$

که نتیجه میدهد

$$\tilde{\delta}(w,w') = \Lambda^{-D/2}\,\delta(z,z'). \tag{28}$$

$\mathrm{d}\tilde{V}$ عنصر ِ حجم در $f(\mathbb{D})$ است. $\tilde{\delta}$ شبیه ِ (26) اما با عنصرِحجم ِ $\mathrm{d}\tilde{V}$ تعریف میشود. به این ترتیب معلوم میشود وقت ی $\mathbb{D}$ دوبُعدی است،

$$\tilde{\triangle}'\tilde{G}(w,w') = \tilde{\delta}(w,w'), \qquad (w,w')\in[f(\mathbb{D})\times f(\mathbb{D})], \tag{29}$$

و

$$\tilde{G}(w,w') = 0, \qquad (w,w')\in[f(\mathbb{D})\times f(\mathbb{B}_1)], \tag{30}$$

$$\tilde{\partial}'_{\mathrm{n}}\tilde{G}(w,w') = \Lambda^{-1/2}\,\tilde{\alpha}(w'), \qquad (w,w')\in[f(\mathbb{D})\times f(\mathbb{B}_2)]. \tag{31}$$

یک ی از راهها یِ محاسبه یِ تابع ِ گرین، روش ِ تصویر است. در این روش مرز ِ ناحیه یِ $\mathbb{D}$ را بر میداریم و به جا یِ آن چشمه‌ها یِ مناسب ی بیرون ِ $\mathbb{D}$ می‌افزاییم که شرایط ِ مرزی یِ مناسب را بسازد. فرض کنید $\mathbb{D}$ دوبعدی است و f نگاشت ی همدیس و وارونپذیر که یک ناحیه شامل ِ $\mathbb{D}$ را به ناحیه ای بیمرز مینگارد که در آن تابعِ‌گرین ِ متناظر با $f(\mathbb{D})$ با شرایطِ‌مرزی یِ القاشده از $\mathbb{D}$، با روش ِ تصویر قابلِ‌محاسبه است. یعنی یک $\tilde{G}^{\mathrm{ext}}$ هست که

$$\begin{aligned} \mathrm{res}[\tilde{G}^{\mathrm{ext}}; f(\mathbb{D})\times f(\mathbb{D})] &= \tilde{G}, \\ \tilde{\triangle}'\tilde{G}^{\mathrm{ext}}(w,w') &= \tilde{\delta}(w,w') + \sum_j \alpha_j(w)\,\tilde{\delta}[w_j(w),w'], \end{aligned} \tag{32}$$

که $\tilde{G}$ رابطه‌ها ی ِ (29) تا (31) را بر می‌آورَد. در این صورت،

$$G = \mathrm{res}(G^{\mathrm{ext}}; \mathbb{D} \times \mathbb{D}), \tag{33}$$

که

$$\triangle' G^{\mathrm{ext}}(z, z') = \delta(z, z') + \sum_j \alpha_j[f(z)]\, \delta[(f^{-1} \circ w_j \circ f)(z), z']. \tag{34}$$

4 صفحه ی ِ مختلط

$\mathbb{D}$ را یک ناحیه در صفحه میگیریم. لَپلَسی بر حسب ِ متغیر ِ مختلط ِ z میشود

$$\triangle = 4\, \partial_z\, \partial_{\bar{z}}. \tag{35}$$

نگاشت ِ تمامریخت ِ وارونپذیر ِ f با دامنه ی ِ $\mathbb{D}$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\triangle = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|^2 \tilde{\triangle}, \tag{36}$$

یعنی

$$\Lambda = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|^2, \tag{37}$$

که ضمنَن نتیجه میدهد

$$\partial_n = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| \tilde{\partial}_n. \tag{38}$$

اگر $\mathbb{D}$ ساده‌همبند باشد، یک نگاشت ِ تمامریخت ِ f هست که $f(\mathbb{D})$ نیمصفحه ی ِ چپ ِ مختلط است. برا ی ِ نشاندادن ِ این نگاشت ِ همساز ِ u با دامنه ی ِ $\mathbb{D}$ را چنین تعریف میکنیم.

$$u(z) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{G_{\mathrm{D}}(s - \epsilon\, n, z)}{\epsilon}, \tag{39}$$

که G_{D} تابعِ‌گرین ِ دیریکله [5] است، یعنی تابعِ‌گرین ِ متناظر با حالت ی که $\mathbb{B}_2$ تهی است. s یک نقطه ی ِ دلبخاه رو ی ِ $\partial\mathbb{D}$، و n بردار ِ یکه ی ِ عمود بر $\partial\mathbb{D}$ در s و به سو ی ِ بیرون ِ $\mathbb{D}$ است. u در

یک ناحیه یِ ساده‌همبند همساز است، پس در این ناحیه یک مزدوجِ همساز دارد، که آن را با v نمایش میدهیم. تعریف میکنیم

$$f := u + \mathrm{i}\, v. \tag{40}$$

اگر محاسبه یِ f ساده باشد، مسئله یِ محاسبه یِ تابعِ گرین در $\mathbb{D}$ به مسئله یِ محاسبه یِ تابعِ گرین در نیمصفحه تبدیل میشود، که جوابِ آن برا یِ حالتها یِ نُیمان [3] (با این شرط که مشتقِ عمودی یِ تابعِ گرین جز در بینهایت صفر شود) و دیریکله [5] ساده است.

5 مثال

تابعِ گرین برا یِ قرص ی به شعاعِ R و مرکزِ مبدئ در صفحه یِ مختلط را در نظر بگیرید. برا یِ محاسبه یِ این تابع نگاشت ی میابیم که قرص را به نیمصفحه یِ چپِ مختلط مینگارَد. f با

$$f(z) = \frac{z - R}{z + R} \tag{41}$$

چنین است. یک چشمه یِ واحد در نقطه یِ zتحتِ f به یک چشمه یِ واحد در $f(z)$ تبدیل میشود. تابعِ‌گرینِ دیریکله [5] در نیمصفحه با یک چشمه یِ تصویر به دست می‌آید. جا یِ این چشمه منعکس‌شده یِ جا یِ چشمه یِ اصلی نسبت به مرز، و اندازه یِ این چشمه قرینه یِ اندازه یِ چشمه یِ اصلی است. به زبانِ رابطه یِ (32)،

$$w_1(w) = -\bar{w}, \tag{42}$$

$$\alpha_1(w) = -1. \tag{43}$$

به این ترتیب،

$$f^{-1} \circ w_1 \circ f(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}. \tag{44}$$

این یعنی جا یِ چشمه یِ تصویر رو یِ نیمخط ی است که از مبدئ شروع میشود و جا یِ چشمه یِ اصلی را در بر دارد، و حاصلِ‌ضربِ فاصله یِ چشمه یِ اصلی و چشمه یِ تصویر از مبدئ مجذورِ شعاعِ

قرص است. تابع ِ گرین در صفحه (ی ِ بدون ِ مرز) را با G_{P} نشان میدهیم. داریم

$$G_{\mathrm{P}}(z,z')=\frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|1-\frac{z'}{z}\right|+p(z), \tag{45}$$

که p دلبخاه است. از اینجا G_{D} (تابع ِگرین ِ دیریکله [5]) برا ی ِ مسئله ی ِ قرص چنین میشود.

$$G_{\mathrm{D}}(z,z')=\frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left(\left|1-\frac{z'}{z}\right|\,\left|1-\frac{\bar z\,z'}{R^2}\right|^{-1}\right)+q(z), \tag{46}$$

که q چنان انتحاب میشود که $G_{\mathrm{D}}(z,z')$ وقت ی z' در مرز ِ قرص است صفر شود. وقت ی z' در مرز ِ قرص است،

$$|z'|=R, \tag{47}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\ln\left(\left|1-\frac{z'}{z}\right|\left|1-\frac{\bar z\,z'}{R^2}\right|^{-1}\right)&=\ln\left(\left|1-\frac{z'}{z}\right|\left|1-\frac{\bar z}{\bar z'}\right|^{-1}\right),\\&=\ln\left|\frac{R}{z}\right|,\end{aligned} \tag{48}$$

و از آنجا،

$$q(z)=\frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|\frac{z}{R}\right|, \tag{49}$$

که نتیجه میدهد

$$G_{\mathrm{D}}(z,z')=\frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left(\left|1-\frac{z'}{z}\right|\,\left|\frac{R}{\bar z}-\frac{z'}{R}\right|^{-1}\right). \tag{50}$$

یک راه ِ دیگر برا ی ِ رسیدن به هم ین نتیجه این بود که تابعِ‌گرین ِ دیریکله در نیمصفحه را حساب کنیم:

$$\tilde G_{\mathrm{D}}(w,w')=\frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left(\left|1-\frac{w'}{w}\right|\,\left|1+\frac{w'}{\bar w}\right|^{-1}\right). \tag{51}$$

به ساده‌گی دیده میشود $\tilde G_{\mathrm{D}}[f(z),f(z')]$ هم ان $G_{\mathrm{D}}(z,z')$ است.

دیده میشود تابعِ‌گرین ِ دیریکله [5] را با فقط چشمه‌ها (چشمه ی ِ اصلی و چشمه ی ِ تصویر) نمیشود به دست آورد: تابع ِ q با شرط ِ مرزی محاسبه میشود. علت آن است که در دو بُعد شرط ِ مرزی ی ِ

طبیعی در بینهایت نداریم. در واقع تابع ِ p در (45) یک تابع ِ دلبخاه ِ z است و با مثلَن صفرکردن ِ تابعِ‌گرین ِ صفحه در بینهایت تثبیت نمیشود، چون تابعِ‌گرین ِ صفحه را نمیشود در بینهایت صفر کرد. در مورد ِ تابعِ‌گرین ِ نُیمان [3]، مسئله از این هم جدیتر است. برا یِ محاسبه یِ تابعِ‌گرین ِ نُیمان [3] در نیمصفحه، کافی است به جا یِ (43) بگذاریم

$$\alpha_1(w) = 1. \tag{52}$$

تابعِ‌گرین ی که با چشمه یِ اصلی و فقط هم ین چشمه یِ تصویر حساب میشود را با G_{N}^0 نمایش میدهیم:

$$G_{\mathrm{N}}^0(z,z') = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left(\left|1-\frac{z'}{z}\right|\,\left|1-\frac{\bar{z}\,z'}{R^2}\right|\right) + r^0(z), \tag{53}$$

که r^0 دلبخاه است. اما از

$$\tilde{G}_{\mathrm{N}}(w,w') = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left(\left|1-\frac{w'}{w}\right|\,\left|1+\frac{w'}{\bar{w}}\right|\right), \tag{54}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{N}}(z,z') = {}& \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left(\left|1-\frac{z'}{z}\right|\left|1-\frac{\bar{z}\,z'}{R^2}\right|\right) - \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|1+\frac{z'}{R}\right|^2 \\ & - \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|1-\frac{z}{R}\right|^2 + \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\left|\frac{4\,R}{z}\right|. \end{aligned} \tag{55}$$

دیده میشود تفاضل ِ $G_{\mathrm{z,z'}}$ و $G^0_{\mathrm{z,z'}}$ تابع ِ z' است و در $z' = -R$ تکین میشود. این تکینه‌گی در صفحه یِ w' در بینهایت است. تابعِ‌گرین ِ نُیمان [3] علاوه بر چشمه یِ اصلی و تصویر ی با هم ان اندازه در (R^2/z)، یک چشمه هم در $(-R)$ دارد که اندازه اَش (-2) برابر ِ چشمه یِ اصلی است. این چشمه در صفحه یِ w' هم هست، اما آنجا در بینهایت است.

6 پانوشتها

[1] Poisson

[2] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 1

[3] Neumann

[4] Dirac

[5] Dirichlet