**X1-069 (2010/07/28)**

# مولد ِ انتقال در جعبه

**محمد خرمی**

mamwad@mailaps.org

مولد ِ انتقال در جعبه تعریف، و اثر ِ آن و مجذور َش بر نگاشتها ی ِ جعبه‌ای بررسی میشود.

## 1 انتقال و مولد ِ آن

نگاشت ِ $\psi$ را در نظر بگیرید که دامنه اَش $\mathbb{R}$ (مجموعه ی ِ عددها ی ِ حقیقی) است. عملگر ِ انتقال به اندازه ی ِ $a$ را با $\mathrm{T}(a)$ نشان میدهیم و اثر ِ آن بر $\psi$ را چنین تعریف میکنیم.

$$\{[\mathrm{T}(a)]\,\psi\}(x) := \psi(x-a). \tag{1}$$

مولد ِ انتقال را $\mathrm{T}'(0)$ تعریف میکنیم، که پریم مشتقگیری است. از اینجا معلوم میشود

$$\begin{aligned}\{[\mathrm{T}'(0)]\,\psi\}(x) &= -\psi'(x),\\ &= (-\mathrm{D}\,\psi)(x),\end{aligned} \tag{2}$$

که $\mathrm{D}$ عملگر ِ مشتق است.

## 2 نگاشت ِ جعبه‌ای

نگاشت ی را در نظر بگیرید که دامنه اَش $(b,c)$ است. به چنیننگاشت ی یک نگاشت ِ جعبه‌ای در جعبه یِ یکبُعدی یِ $(b,c)$، یا ساده‌تر یک نگاشت ِ جعبه‌ای میگوییم. از این پس همه یِ نگاشتها یِ جعبه‌ای یی که به کار میبریم بر $(0,L)$ تعریف شده اند، مگر صریحَن خلاف َش گفته شود. روشن است که از اثر ِ انتقال بر نگاشت ِ جعبه‌ای یِ $\psi$ بر اساس ِ $(1)$ یک نگاشت ِ جعبه‌ای در جعبه یِ $(a, L+a)$ به دست می‌آید. میخاهیم انتقال را چنان تعریف کنیم که یک نگاشت ِ جعبه‌ای را به یک نگاشت ِ جعبه‌ای در هم ان جعبه تبدیل کند. برا یِ این کار ابتدا از نگاشت ِ جعبه‌ای یِ $\psi$ نگاشت ِ $(\mathrm{B}\,\psi)$ را میسازیم که دامنه اَش $\mathbb{R}$ است، فرد است، دوره‌ای با دوره یِ $(2\,L)$ است، و تحدید َش به $(0,L)$ هم ان $\psi$ است:

$$(\mathrm{B}\,\psi)(x) := \begin{cases} \psi(x-2\,n\,L), & 0<(x-2\,n\,L)<L \\ -\psi(x-2\,n\,L), & -L<(x-2\,n\,L)<0 \end{cases}, \qquad (3)$$

که $n$ صحیح است. عملگر ِ انتقال ِ جعبه‌ای را با $\tilde{\mathrm{T}}(a)$ نشان میدهیم و $\{[\tilde{\mathrm{T}}(a)]\,\psi\}$ را یک نگاشت ِ جعبه‌ای تعریف میکنیم که

$$\{[\tilde{\mathrm{T}}(a)]\,\psi\}(x) := \{[\mathrm{T}(a)]\,(\mathrm{B}\,\psi)\}(x), \qquad 0<x<L. \qquad (4)$$

توجه داریم که $\{[\mathrm{T}(a)]\,(\mathrm{B}\,\psi)\}$ دوره‌ای با دوره یِ $(2\,L)$ هست، اما لزومَن فرد نیست. پس در حالت ِ کلی $\Big(\mathrm{B}\,\{[\tilde{\mathrm{T}}(a)]\,\psi\}\Big)$ هم ان $\{[\mathrm{T}(a)]\,(\mathrm{B}\,\psi)\}$ نیست.

مولد ِ انتقال ِ جعبه‌ای را هم $\tilde{\mathrm{T}}'(0)$ تعریف میکنیم. اگر $x$ در $(0,L)$ باشد، میشود $|a|$ را به حد ِ کافی کوچک گرفت که $(x-a)$ هم در $(0,L)$ باشد. در این صورت

$$\{[\tilde{\mathrm{T}}(a)]\,\psi\}(x) = \psi(x-a), \qquad (5)$$

که نتیجه میدهد مولد ِ انتقال ِ جعبه‌ای منفی یِ مشتقگیری (از نگاشتها یِ جعبه‌ای) است. اما باز هم در حالت ِ کلی $[\mathrm{B}\,(\mathrm{D}\,\psi)]$ هم ان $[\mathrm{D}\,(\mathrm{B}\,\psi)]$ نیست. تحدید ِ این دونگاشت به $(0,L)$ یکسان است. هردو هم دوره‌ای با دوره یِ $(2\,L)$ اند، اما $[\mathrm{B}\,(\mathrm{D}\,\psi)]$ فرد و $[\mathrm{D}\,(\mathrm{B}\,\psi)]$ زوج است. ضمنَن اگر $\psi$ در $0$

و $L$ به $0$ نگراید، $(\mathrm{B}\,\psi)$ در این نقطه‌ها پرش خاهد داشت و $[\mathrm{D}\,(\mathrm{B}\,\psi)]$ شامل ِ ضربه‌ها یی خاهد بود که محمل ِشان مضربها یِ صحیح ِ $L$ است. این ضربه‌ها هم در $[\mathrm{B}\,(\mathrm{D}\,\psi)]$ دیده نمیشوند.

## 3 نمایش ِ ماتریسی

برا یِ بررسی یِ نگاشتها یِ جعبه‌ای لازم نیست دامنه یِ این نگاشتها را به $\mathbb{R}$ گسترش دهیم. به جا یِ این کار میشود یک پایه برا یِ این نگاشتها گرفت و هر نگاشت را با ضریبها یِ بسط َش بر حسب ِ آن پایه نشان داد. این پایه را با $\mathbb{B} := \{(n, e_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ نشان میدهیم، که $\mathbb{N}$ مجموعه یِ عددها یِ طبیعی است، و

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{L}. \tag{6}$$

این پایه با حاصل‌ِضرب ِ درونی یِ معمول برا یِ نگاشتها یِ جعبه‌ای یکه‌متعامد است. حاصل‌ِضرب ِ درونی یِ (معمول ِ) $\phi$ و $\psi$ که با $\langle\phi, \psi\rangle$ نمایش داده میشود، چنین تعریف میشود.

$$\langle\phi, \psi\rangle := \int_0^L \mathrm{d}x\;\phi^*(x)\,\psi(x). \tag{7}$$

هر بردار ِ $\psi$ را میشود بر حسب ِ $\mathbb{B}$ بسط داد:

$$\psi =: \sum\nolimits_n \psi_n\,e_n. \tag{8}$$

عملگر ِ خطی یِ $O$ از نگاشتها یِ جعبه‌ای به نگاشتها یِ جعبه‌ای را هم میشود بر حسب ِ عنصرها یِ ماتریسی یَش در پایه یِ $\mathbb{B}$ نوشت:

$$O\,e_n =: \sum\nolimits_m O_{m\,n}\,e_m. \tag{9}$$

چون $\mathbb{B}$ یکه‌متعامد است،

$$\psi_n = \langle e_n, \psi\rangle. \tag{10}$$

همچنین،

$$O_{m\,n} = \langle e_m, O\,e_n\rangle. \tag{11}$$

عملگر ِ مشتقگیری از نگاشتها ی ِجعبه‌ای را با $\tilde{\mathrm{D}}$ نمایش میدهیم. داریم

$$\tilde{\mathrm{D}}\, e_n = \frac{n\,\pi}{L}\, f_n, \tag{12}$$

که $f_n$ با $n$ ِ طبیعی نگاشت ی جعبه‌ای است که

$$f_n(x) := \sqrt{\frac{2}{L}}\, \cos\frac{n\,\pi\, x}{L}. \tag{13}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\mathrm{D}}_{m\,n} = \frac{2\,n\,\pi}{L^2}\, \int_0^L \mathrm{d}x\, \sin\frac{m\,\pi\,x}{L}\, \cos\frac{n\,\pi\, x}{L}, \tag{14}$$

یا

$$\tilde{\mathrm{D}}_{m\,n} = \begin{cases} \dfrac{2\,n}{L}\, \left(\dfrac{1}{m+n} + \dfrac{1}{m-n}\right), & (m-n) \in \mathbb{O} \\ 0, & (m-n) \notin \mathbb{O} \end{cases}, \tag{15}$$

که $\mathbb{O}$ مجموعه ی ِعددها ی ِفرد است.

با استفاده از (15) عنصرها ی ِماتریسی ی ِ$\tilde{\mathrm{D}}^2$ را حساب میکنیم:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,k} &= \sum\nolimits_n \tilde{\mathrm{D}}_{m\,n}\, \tilde{\mathrm{D}}_{n\,k}, \\ &= -\frac{4\,m\,k}{L^2} \sum_{\substack{n \\ (n-m)\,(n-k)\in\mathbb{O}}} \left(\frac{1}{n+m} + \frac{1}{n-m}\right)\, \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n-k}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

که از این استفاده شده که

$$\tilde{\mathrm{D}}_{m\,n} = -\tilde{D}_{n\,m}. \tag{17}$$

از (16) معلوم است که $(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,k}$ نسبت به شاخصها یَش متقارن است، و اگر اختلاف ِ این شاخصها فرد باشد صفر است. پس اختلاف ِ این شاخصها را زوج میگیریم. نگاشت ِ S با 2 متغیر ِ صحیح که اختلاف ِشان زوج است را چنین تعریف میکنیم.

$$\mathrm{S}(m,k) := \sum_{\substack{n \\ (n-m)\in\mathbb{O}}} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+m}\right). \tag{18}$$

دیده میشود

$$\mathrm{S}(m,k)=\sum_{j=[(k+1)/2]}^{[(m-1)/2]}\frac{1}{2\,j+1}. \tag{19}$$

از رابطه یِ اخیر معلوم میشود

$$\mathrm{S}(m,k)+\mathrm{S}(k,l)=\mathrm{S}(m,l). \tag{20}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(m,-m)&=\sum_{j=[(-m+1)/2]}^{[(m-1)/2]}\frac{1}{2\,j+1},\\ &=\sum_{j=[(-m+1)/2]}^{-1}\frac{1}{2\,j+1}+\sum_{j=0}^{[(m-1)/2]}\frac{1}{2\,j+1},\\ &=\sum_{j=0}^{-1-[(-m+1)/2]}\frac{1}{-2\,j-1}+\sum_{j=0}^{[(m-1)/2]}\frac{1}{2\,j+1},\\ &=\sum_{j=-[(-m+1)/2]}^{[(m-1)/2]}\frac{1}{2\,j+1},\end{aligned} \tag{21}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{S}(m,-m)=\begin{cases}0, & m\notin\mathbb{O}\\ \dfrac{1}{m}, & m\in\mathbb{O}\end{cases}. \tag{22}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(m,k)+\mathrm{S}(-k,-m)&=\mathrm{S}(m,-m)+\mathrm{S}(-m,k)+\mathrm{S}(k,-m)+\mathrm{S}(-k,k),\\ &=\mathrm{S}(m,-m)-\mathrm{S}(k,-k),\\ &=\begin{cases}0, & m\notin\mathbb{O}\\ \left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{k}\right), & m\in\mathbb{O}\end{cases}.\end{aligned} \tag{23}$$

برا یِ محاسبه یِ $(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,k}$، اول فرض کنیم $m$ با $k$ برابر نیست. در این صورت،

$$\frac{1}{n+m}\,\frac{1}{n+k}=\frac{1}{m-k}\,\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+m}\right). \tag{24}$$

از گذاشتن ِ (24) و (18) در (16) نتیجه میشود

$$(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,k} = -\frac{4\,m\,k}{L^2}\,\left[\frac{\mathrm{S}(m,k)+\mathrm{S}(-k,-m)}{m-k}+\frac{\mathrm{S}(m,-k)+\mathrm{S}(k,-m)}{m+k}\right], \qquad (25)$$

که با استفاده از (23) نتیجه میدهد

$$(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,k} = 0, \qquad m \neq k. \qquad (26)$$

از (16) نتیجه میشود

$$(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,m} = -\frac{4\,m^2}{L^2}\sum\nolimits_{\substack{n\\(n-m)\in\mathbb{O}}}\left[\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{m}\,\left(\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}\right)\right]. \qquad (27)$$

با تعریف ِ

$$\mathrm{R}(m) := \sum\nolimits_{\substack{n\\(n-m)\in\mathbb{O}}}\frac{1}{(n+m)^2}, \qquad (28)$$

داریم

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(m) &= \sum_{j=[(m+1)/2]}^{\infty}\frac{1}{(2\,j+1)^2},\\ &= \sum_{j=[(m+1)/2]}^{-1}\frac{1}{(2\,j+1)^2}+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2\,j+1)^2},\\ &=: \mathrm{Q}(m)+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2\,j+1)^2}.\end{aligned} \qquad (29)$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(-m)+\mathrm{Q}(m) &= \sum_{j=[(-m+1)/2]}^{-1}\frac{1}{(2\,j+1)^2}+\sum_{j=[(m+1)/2]}^{-1}\frac{1}{(2\,j+1)^2},\\ &= \sum_{0}^{j=-1-[(-m+1)/2]}\frac{1}{(-2\,j-1)^2}+\sum_{j=[(m+1)/2]}^{-1}\frac{1}{(2\,j+1)^2},\\ &= \sum_{j=[(m+1)/2]}^{-1-[(-m+1)/2]}\frac{1}{(2\,j+1)^2},\end{aligned} \qquad (30)$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{Q}(-m)+\mathrm{Q}(m)=\begin{cases}0, & m\notin\mathbb{O}\\ -\dfrac{1}{m^2}, & m\in\mathbb{O}\end{cases}. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,m}&=-\frac{4\,m^2}{L^2}\,\left[\mathrm{R}(m)+\mathrm{R}(-m)+\frac{1}{m}\,\mathrm{S}(m)\right],\\ &=-\frac{4\,m^2}{L^2}\,\left[\mathrm{Q}(m)+\mathrm{Q}(-m)+\frac{1}{m}\,\mathrm{S}(m)+2\,\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2\,j+1)^2}\right],\\ &=-\frac{4\,m^2}{L^2}\,\left[\mathrm{Q}(m)+\mathrm{Q}(-m)+\frac{1}{m}\,\mathrm{S}(m)\right]-\frac{8\,m^2}{L^2}\,\frac{\pi^2}{8},\end{aligned} \tag{32}$$

که با استفاده از (22) و (31) نتیجه میدهد

$$(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,m}=-\frac{\pi^2\,m^2}{L^2}. \tag{33}$$

از ترکیب ِ (26) با (33) داریم

$$(\tilde{\mathrm{D}}^2)_{m\,k}=-\frac{\pi^2\,m^2}{L^2}\,\delta_{m\,k}. \tag{34}$$

البته با توجه به اثر ِ $\tilde{\mathrm{D}}^2$ بر $e_m$ ها هم ین انتظار میرود.

# 4 پیوسته‌گی

در بحثها یِ پیش نگران ِ پیوسته‌گی یِ $\tilde{\mathrm{D}}$ نبودیم. پیوسته‌گی یِ $\tilde{\mathrm{D}}$ یعنی بشود جا یِ $\tilde{\mathrm{D}}$ و حدگیری را عوض کرد:

$$\tilde{\mathrm{D}}\,\left(\sum\nolimits_n\,\psi_n\,e_n\right)=\sum\nolimits_n\psi_n\,\tilde{\mathrm{D}}\,e_n. \tag{35}$$

نشان میدهیم لزومَن چنین نیست. نگاشت ِ جعبه‌ای یِ $\phi$ با

$$\phi(x):=1. \tag{36}$$

را در نظر بگیرید. به ساده‌گی دیده میشود

$$\phi = \sum_{n\in\mathbb{O}}{}_{n} \frac{\sqrt{8\,L}}{n\,\pi}\,e_n. \tag{37}$$

به این ترتیب برابری یِ (35) در مورد ِ طرف ِ راست ِ (37) یعنی

$$\tilde{\mathrm{D}}\,\phi = \sum_{n\in\mathbb{O}}{}_{n} \sqrt{\frac{8}{L}}\,f_n. \tag{38}$$

اما این رابطه به روشنی نادرست است. از تعریف ِ $\tilde{D}$ دیده میشود

$$\tilde{\mathrm{D}}\,\phi = 0, \tag{39}$$

در حال ی که از تعریف ِ $f_n$ ها نتیجه میشود

$$\langle f_m, f_n\rangle = \delta_{m\,n}, \tag{40}$$

که از آن نتیجه میشود طرف ِ راست ِ (38) وجود ندارد. دقیقتر این که با تعریف ِ

$$(\tilde{\mathrm{D}}\,\phi)_m := \sum_{n\in\mathbb{O}_m}{}_{n} \sqrt{\frac{8}{L}}\,f_n, \tag{41}$$

که $\mathbb{O}_m$ مجموعه یِ عددها یِ فرد ِ نابزرگتر از $m$ است، معلوم میشود

$$\langle(\tilde{\mathrm{D}}\,\phi)_m, (\tilde{\mathrm{D}}\,\phi)_m\rangle = \frac{8}{L}\sum_{n\in\mathbb{O}_m}{}_{n} 1, \tag{42}$$

و روشن است که طرف ِ راست ِ (42) در $(m\to\infty)$ بینهایت است.

با بررسی یِ اثر ِ $\tilde{\mathrm{D}}^2$ بر $\phi$ ، ناپیوسته‌گی یِ $\tilde{\mathrm{D}}^2$ هم دیده میشود. اگر $\tilde{\mathrm{D}}^2$ پیوسته باشد باید داشته باشیم

$$\tilde{\mathrm{D}}^2\,\phi = -\sqrt{\frac{8\,\pi^2}{L^3}}\sum_{n\in\mathbb{O}}{}_{n} n\,e_n. \tag{43}$$

اما این برابری نادرست است. طرف ِ چپ صفر است، در حال ی که با تعریف ِ

$$(\tilde{\mathrm{D}}^2\,\phi)_m := -\sqrt{\frac{8\,\pi^2}{L^3}}\sum_{n\in\mathbb{O}_m}{}_{n} n\,e_n, \tag{44}$$

نتیجه میشود

$$\langle(\tilde{\mathrm{D}}^2\,\phi)_m,(\tilde{\mathrm{D}}^2\,\phi)_m\rangle=\frac{8\,\pi^2}{L^3}\sum_{n\in\mathbb{O}_m}{}_n\,n^2, \tag{45}$$

و روشن است که طرفِ راستِ (45) در ($m\to\infty$) بینهایت است.