X1-070 (2010/08/20)

انتشارِ موج در فضا یِ گسسته

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

یک معادله یِ موج در یک فضا یِ گسسته یِ یکبُعدی بررسی میشود که شاملِ تفاضلِ باپایانِ رتبه یِ 2 (در مکان) و مشتقِ دومِ زمانی است. پاسخِ این معادله برا یِ یک شرطِآغازینِ جایگزیده، به ویژه سرعتِ انتشارِ آن بررسی میشود.

1 معادله یِ موج در فضا یِ گسسته

یک رشته جسم و فنر را در نظر بگیرید، که جسمها یکسان و هر یک به جرمِ m اند، و فنرها هم یکسان و با سختی یِ k اند. این مجموعه رو یِ یک خط مقید است، هر جسم به دو فنر بسته شده، هر فنر بینِ دو جسم است، و طولِ هر فنر در تعادل ℓ است. جا یِ جسمِ j در تعادل را با $(x_j = \ell\, j)$، و جابه‌جایی یِ جسمِ j از تعادل را با ψ_j نمایش میدهیم. دیده میشود

$$k\,(\psi_{j+1} + \psi_{j-1} - 2\,\psi_j) - m\,\ddot{\psi}_j = 0, \qquad (1)$$

که $\dot{X}$ مشتقِ X نسبت به زمان است. با تعریفِ

$$\Omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (2)$$

رابطه یِ (1) به این شکل در می‌آید.

$$\Omega^2\,(\psi_{j+1}+\psi_{j-1}-2\,\psi_j)-\ddot{\psi}_j=0. \tag{3}$$

اگر ψ نسبت به j کندتغییر باشد، میشود از آن یک نگاشتِ هموارِ Ψ ساخت که متغیرِ مکانَش پیوسته است و

$$\Psi(t,x_j):=\ell^{-1}\,\psi_j(t). \tag{4}$$

طولِ مشخصه یِ تغییراتِ ψ و Ψ نسبت به مکان را با به ترتیب N و L نمایش میدهیم، که روشن است که

$$L=N\,\ell. \tag{5}$$

در این صورت با چشمپوشی از جمله‌ها یِ از مرتبه یِ بالاتر نسبت به N^{-1}،

$$\ell^{-1}\,[\psi_{j+1}(t)+\psi_{j-1}(t)-2\,\psi_j(t)]=\ell^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,x_j). \tag{6}$$

به این ترتیب (3) میشود

$$v^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\ddot{\Psi}^2=0, \tag{7}$$

که

$$v:=\ell\,\Omega. \tag{8}$$

(3) و (7) برا یِ یک مثالِ خاص به دست آمدند. اما (3) ساده‌ترین شکلِ یک معادله یِ خطی است که تحتِ انتقالِ زمان و انتقالِ گسسته یِ مکان و انتقالِ خُدِ تابع ناوردا است، و فقط مشتقها (یا تفاضلها) یِ از مرتبه یِ زوج دارد. (7) هم که پیوسته‌شده یِ (3) است. (3) معادله یِ ساده یِ موج در فضا یِ گسسته (یِ یکبُعدی) است.

2 رابطه یِ پاشنده‌گی

معادله یِ (3) تحت ِ انتقال ِ زمان و انتقال ِ گسسته یِ مکان ناوردا است. پس جوابها یی به شکل ِ موج ِ تخت دارد. اینها را با $\phi(\omega, s)$ نشان میدهیم، که s و ω ثابت اند و

$$[\phi(\omega, s)]_j(t) := s^j\ \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t). \tag{9}$$

این که $\phi(\omega, s)$ رابطه یِ (3) را بر آورَد نتیجه میدهد

$$\Omega^2\,(s + s^{-1} - 2) + \omega^2 = 0. \tag{10}$$

با تعریف ِ σ به شکل ِ

$$s = \exp(\mathrm{i}\,\sigma), \tag{11}$$

رابطه یِ پاشنده‌گی یِ (10) میشود

$$\omega^2 - \left(2\,\Omega\,\sin\frac{\sigma}{2}\right)^2 = 0. \tag{12}$$

برا یِ σ ها یِ کوچک (s ها یِ نزدیک به 1)، رابطه یِ (12) میشود

$$\omega^2 - (\Omega\,\sigma)^2 = 0, \tag{13}$$

که هم ان رابطه یِ پاشنده‌گی یِ متناظر با سرعت‌ِانتشار ِ v در محیطها یِ یک‌بُعدی ناپاشنده است، که v از (8) به دست می‌آید و رابطه یِ q (عدد ِ موج) با σ هم چنین است.

$$\sigma =: \ell\, q. \tag{14}$$

3 مسئله یِ شرط‌ِآغازین

مسئله یِ شرط‌ِآغازین برا یِ معادله یِ (3) عبارت است از معادله یِ (3) همراه با مقدارها یِ معلوم ِ $\psi_j(0)$ و $\dot{\psi}_j(0)$. برا یِ حل ِ این مسئله ψ را بر حسب ِ موجها یِ تخت بسط میدهیم:

$$\psi = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\,\pi}\,[A_+(\sigma)\,\phi(\omega_+, s) + A_-(\sigma)\,\phi(\omega_-, s)], \tag{15}$$

که

$$\omega_\pm := \pm 2\,\Omega\,\sin\frac{\sigma}{2}, \tag{16}$$

و انتگرالگیری رو ی ِ بازه ای به پهنا ی ِ $(2\,\pi)$ است. این بسط برا ی حالت ی است که شبکه از هردوسر بیپایان است، و ψ_j در $(j \to \pm\infty)$ با سرعت ِ کافی صفر میشود. از این پس فرض میکنیم چنین است. اگر شبکه باپایان باشد، مسئله شرایط ِ مرزی هم لازم دارد و این شرایط (اگر خطی باشند) σ ها ی ِ مجاز را تعیین میکنند.

از (15) نتیجه میشود

$$A_+(\sigma) + A_-(\sigma) = \sum_j \psi_j(0)\ \exp(-\mathrm{i}\,j\,\sigma), \tag{17}$$

$$\mathrm{i}\,\omega_+\,[-A_+(\sigma) + A_-(\sigma)] = \sum_j \dot\psi_j(0)\ \exp(-\mathrm{i}\,j\,\sigma), \tag{18}$$

که نتیجه میدهد

$$A_\pm(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_j \left[\psi_j(0) \mp \frac{\dot\psi_j(0)}{\mathrm{i}\,\omega_+}\right]\ \exp(-\mathrm{i}\,j\,\sigma). \tag{19}$$

رابطه‌ها ی ِ (15) و (19) مقدار ِ ψ را بر حسب ِ $\psi_.(0)$ و $\dot\psi_.(0)$ میدهند.

4 انتشار ِ جابه‌جایی ی ِ آغازین ِ نقطه‌ای

یک مثال ِ شرط ِ آغازین این است که سرعت ِ آغازین صفر، و جابه‌جایی ی ِ آغازین فقط در یک نقطه ناصفر باشد:

$$\begin{aligned} \psi_j(0) &= \delta_{j\,0}, \\ \dot\psi_j(0) &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

از (19) نتیجه میشود

$$A_\pm(\sigma) = \frac{1}{2}, \tag{21}$$

و با استفاده از (15)،

$$\psi_j(t) = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\,\pi}\ \exp(\mathrm{i}\,j\,\sigma)\ \cos\left(2\,\Omega\,t\ \sin\frac{\sigma}{2}\right). \tag{22}$$

از [1] داریم،

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\chi\ \cos(n\,\chi)\ \cos(z\ \sin\chi) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{J}_n(z), \tag{23}$$

، که J_n تابعِ بِسِلِ [2] نوعِ اول از مرتبه یِ n است. به این ترتیب،

$$\psi_j(t) = \mathrm{J}_{2\,j}(2\,\Omega\,t). \tag{24}$$

5 رفتارِ حدی

$\psi_j(t)$ نسبت به j زوج است. پس فقط j ها یِ نامنفی را در نظر میگیریم، مگر صریحَن خلاف َش بیاید. به ازا یِ

$$(\Omega\,t) \gg 1, \tag{25}$$

رابطه یِ (24) ساده‌تر میشود. نگاشتِ L را چنین تعریف میکنیم.

$$\mathrm{L}(z,y) := f(z)\,\mathrm{J}_\xi(z), \tag{26}$$

که f را بعدَن تعیین میکنیم و

$$\xi := z + \beta\,z^\alpha\,y. \tag{27}$$

α و β ثابتها یی حقیقی اند و بعدَن تعیینِ شان خاهیم کرد. f و α چنان تعیین خاهیم کرد که L در $(z\to\infty)$ حد ی باپایان (و ناصفر) داشته باشد. از **9.1.27** در [3] داریم

$$\mathrm{J}_{\xi+1}(z) - \mathrm{J}_{\xi-1}(z) = -2\,\mathrm{J}'_\xi(z), \tag{28}$$

که پریم مشتقگیری نسبت به متغیر ِ درون ِ پرانتز است. از (26) تا (28) نتیجه میشود

$$\mathrm{L}(z, y+\beta^{-1}\, z^{-\alpha}) - \mathrm{L}(z, y-\beta^{-1}\, z^{-\alpha}) = -2\, f(z)\, \mathrm{J}'_\xi(z). \tag{29}$$

همچنین، از

$$\mathrm{J}_{\xi+2}(z) + \mathrm{J}_{\xi-2}(z) - 2\, \mathrm{J}_\xi(z) = 4\, \mathrm{J}''_\xi(z), \tag{30}$$

که به ساده‌گی از (28) نتیجه میشود، داریم

$$\mathrm{L}(z, y+2\,\beta^{-1}\, z^{-\alpha}) + \mathrm{L}(z, y-2\,\beta^{-1}\, z^{-\alpha}) - 2\,\mathrm{L}(z,y) = 4\, f(z)\, \mathrm{J}''_\xi(z). \tag{31}$$

اگر α مثبت باشد، در z ها یِ بزرگ (29) و (31) به ترتیب میشوند

$$\begin{aligned} -\beta^{-1}\, z^{-\alpha}\, \frac{\partial \mathrm{L}(z,y)}{\partial y} + o(1) &= f(z)\, \mathrm{J}'_\xi(z), \\ (\beta^{-1}\, z^{-\alpha})^2\, \frac{\partial^2 \mathrm{L}(z,y)}{\partial y^2} + o(1) &= f(z)\, \mathrm{J}''_\xi(z). \end{aligned} \tag{32}$$

به این ترتیب از معادله یِ بِسِل [2]:

$$z^2\, \mathrm{J}''_\xi(z) + z\, \mathrm{J}'_\xi(z) + (z^2 - \xi^2)\, \mathrm{J}_\xi(z) = 0, \tag{33}$$

نتیجه میشود

$$(\beta^{-1}\, z^{1-\alpha})^2\, \frac{\partial^2 \mathrm{L}(z,y)}{\partial y^2} - \beta^{-1}\, z^{1-\alpha}\, \frac{\partial \mathrm{L}(z,y)}{\partial y} - 2\,\beta\, z^{1+\alpha}\, y\, \mathrm{L}(z,y) = o(z^\gamma), \tag{34}$$

که

$$\gamma = \max\{2 - 2\,\alpha, 1-\alpha, 1+\alpha\}. \tag{35}$$

با انتخاب ِ

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3}, \\ \beta &= 2^{-1/3}, \end{aligned} \tag{36}$$

رابطه یِ (34) میشود

$$\frac{\partial^2 \mathrm{L}(z,y)}{\partial y^2} - y\,\mathrm{L}(z,y) = o(1). \tag{37}$$

با تعریفِ

$$\mathrm{M}(y) := \lim_{z\to\infty} \mathrm{L}(z,y), \tag{38}$$

نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{M}(y)}{\mathrm{d}y^2} - y\,\mathrm{M}(y) = 0. \tag{39}$$

این معادله یِ اِیری [4] است. جوابها یِ این معادله ترکیبها یِ خطی یِ نگاشتها یِ Ai و Bi اند. $\mathrm{Ai}(y)$ و $\mathrm{Bi}(y)$، در $(y\to\infty)$ به به ترتیب 0 و ∞ میگرایند. داریم

$$\lim_{\xi\to\infty} \mathrm{J}_\xi(z) = 0, \tag{40}$$

که از آن نتیجه میشود M با Ai متناسب است.

برا یِ بررسی یِ رفتارِ غالبِ جوابها یِ معادله یِ (39) به ازا یِ مقدارها یِ بزرگِ $|y|$، تعریف میکنیم

$$\mathrm{N} := \ln \mathrm{M}. \tag{41}$$

نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{N}(y)}{\mathrm{d}y^2} + \left[\frac{\mathrm{dN}(y)}{\mathrm{d}y}\right]^2 - y = 0. \tag{42}$$

به ازا یِ مقدارها یِ بزرگِ $|y|$، از جمله یِ اول در طرفِ چپ چشم میپوشیم و تقریبِ بهدستآمده برا یِ N به این ترتیب را با N_0 نشان میدهیم. دیده میشود

$$\mathrm{N}_0(y) = \pm\frac{2}{3}\,y^{3/2} + c, \tag{43}$$

که c یک ثابت است. با استفاده از N_0 به جا یِ N در جمله یِ اولِ طرفِ چپِ (42)، تقریبِ مرتبهیِبعد برا یِ N به دست میآید، که آن را با N_1 نمایش میدهیم:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{N}_0(y)}{\mathrm{d}y^2} + 2\,\frac{\mathrm{dN}_0(y)}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}[\mathrm{N}_1(y)-\mathrm{N}_0(y)]}{\mathrm{d}y} = 0, \tag{44}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{N}_1(y) - \mathrm{N}_0(y) = -\frac{1}{4}\,\ln|y|. \qquad (45)$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{M}(y) \sim \begin{cases} |y|^{-1/4}\,\exp\left(-\frac{2}{3}\,|y|^{3/2}\right), & y \gg 1 \\ |y|^{-1/4}\,\sin\left(\frac{2}{3}\,|y|^{3/2} + \theta\right), & y \ll -1 \end{cases}, \qquad (46)$$

که θ یک ثابتِ حقیقی است. برا یِ $(y \gg 1)$ از این استفاده شده که $\mathrm{M}(y)$ در $(y \to \infty)$ به صفر میگراید. برا یِ $(y \ll -1)$ هم از این استفاده شده که $\mathrm{M}(y)$ حقیقی است.

از مقدارِ α در (27) معلوم میشود پهنا یِ $[\mathrm{J}_{\bullet}(z)]$ به ازا یِ z ِ بزرگ، از مرتبه یِ $z^{1/3}$ است. از (3) نتیجه میشود

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \ddot{\psi}_j(t) = 0, \qquad (47)$$

که نتیجه میدهد

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(0) + t \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dot{\psi}_j(0). \qquad (48)$$

پس با شرطِ آغازینِ (20) داریم

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(t) = 1, \qquad (49)$$

و با استفاده از (24)،

$$\mathrm{J}_0(2\,\Omega\,t) + 2\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2\,j}(2\,\Omega\,t) = 1, \qquad (50)$$

که نتیجه میدهد

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{J}_{2\,j}(2\,\Omega\,t) = \frac{1}{2}. \qquad (51)$$

طرفِ چپ را میشود به شکلِ یک انتگرال نوشت:

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{d}\xi\;\mathrm{J}_\xi(z) = \frac{1}{2}. \qquad (52)$$

از این معادله، و این که پهنا یِ $[\mathrm{J}_{\bullet}(z)]$ به ازا یِ z ِ بزرگ از مرتبه یِ $z^{1/3}$ است، معلوم میشود ارتفاع ِ قله یِ $[\mathrm{J}_{\bullet}(z)]$ به ازا یِ z ِ بزرگ، از مرتبه یِ $z^{-1/3}$ است.

خلاصه، به ازا یِ z ِ بزرگ، $[\mathrm{J}_{\bullet}(z)]$ اطراف ِ z جایگزیده است، پنها یَش از مرتبه یِ $z^{1/3}$، و ارتفاع ِ قله اَش از مرتبه یِ $z^{-1/3}$ است. به این ترتیب $\psi_j(t)$ برا یِ j ها یِ نَه لزومَن مثبت اطراف ِ $(j = \pm\Omega\, t)$ یعنی $(x_j = \pm v\, t)$ جایگزیده است. این یعنی موج تقریبَن با سرعت ِ v منتشر میشود. البته $\psi_j(t)$ در $(|x_j| > v\, t)$ صفر نیست، اما (46) نشان میدهد با افزایش ِ $|j|$ به سرعت صفر میشود.

از این که به ازا یِ z ِ بزرگ ارتفاع ِ قله یِ $[\mathrm{J}_{\bullet}(z)]$ از مرتبه یِ $z^{-1/3}$ است، نتیجه میشود برا یِ این که M باپایان (و ناصفر) شود، باید $f(z)$ از مرتبه یِ $z^{1/3}$ باشد. در واقع از **9.3.23** در [3] داریم

$$\lim_{z\to\infty}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}\,\mathrm{J}_{\xi}(z)\right] = \mathrm{Ai}(y). \tag{53}$$

همچنین، از **10.4.59** و **10.4.60** در [3] داریم

$$\mathrm{Ai}(y) = \begin{cases} \frac{|y|^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}\ \exp\left(-\frac{2}{3}\,|y|^{3/2}\right)\ [1+o(1)], & y \gg 1 \\ \frac{|y|^{-1/4}}{\sqrt{\pi}}\ \left[\sin\left(-\frac{2}{3}\,|y|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right)+o(1)\right], & y \ll -1 \end{cases}. \tag{54}$$

حد ِ فضاپیوسته حد ِ $(\ell \to 0)$ با v یِ ثابت (ِ مثبت) است. از (4) و (24) نتیجه میشود برا یِ x ها یِ نامنفی،

$$\begin{aligned} \Psi(t,x) &= \ell^{-1}\,\mathrm{J}_{2\,\ell^{-1}\,x}(2\,\Omega\,t), \\ &= \ell^{-1}\,\mathrm{J}_{2\,\ell^{-1}\,x}(2\,\ell^{-1}\,v\,t). \end{aligned} \tag{55}$$

دیده میشود به ازا یِ ℓ ِ کوچک، $\Psi(t,\bullet)$ اطراف ِ $(\pm v\,t)$ جایگزیده، و پهنا یِ هر یک از قله‌ها یَش از مرتبه یِ $[(\ell/2)\,(2\,\ell^{-1}\,v\,|t|)^{1/3}]$ یا $[\ell^{2/3}\,(v\,|t|)^{1/3}]$ است. از (52) هم نتیجه میشود در $(\ell \to 0)$ انتگرال ِ $\Psi(t,\bullet)$ اطراف ِ هر یک از قله‌ها یَش $(1/2)$ میشود. به این ترتیب،

$$\lim_{\ell\to 0}\Psi(t,x) = \frac{1}{2}\,[\delta(x - v\,t) + \delta(x + v\,t)]. \tag{56}$$

این هم ان جواب ِ (7) با شرط ِ آغازین ِ

$$\Psi(0,x)=\delta(x),$$
$$\dot{\Psi}(0,x)=0 \tag{57}$$

است، که مانسته یِ فضاپیوسته یِ شرط ِ آغازین ِ (20) است.

6 پانوشتها

[1] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik; "Table of integrals, series, and products" 7th edition (Academic Press, 2007) **3.715**

[2] Bessel

[3] Milton Abramowitz & Irene A. Stegun; "Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables" (Dover, 1972)

[4] Airy