X1-071 (2010/10/21)

یک ذره یِ نسبیتی در یک میدان ِ اسکالر

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

لَگرانژی و معادله‌یِ‌حرکت ِ یک ذره یِ نسبیتی بررسی میشود که نیرو یِ وارد بر آن ناشی از یک میدان ِ اسکالر است، چنان که در سرعتها یِ کم این میدان انرژی یِ پتانسیل است.

0 قراردادها

منظور از جرم جرم ِ سکون است،

$$r^0 := t, \tag{1}$$

و

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{2}$$

که r^μ ها مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ مکان اند، و t زمان و η متریک (ِ مینکُفسکی [1]) است. بردارها یِ سه‌مئلفه‌ای (با مئلفه‌ها یِ فضایی) را با حروف ِ سیاه، و ویژه‌زمان را با τ نمایش میدهیم. شاخصها یِ

که مقدارها یِ فضازمانی (از 0 تا 3) را میگیرند را با حروف ِ یونانی و شاخصها یی که فقط مقدارها یِ فضایی (از 1 تا 3) را میگیرند را با حروف ِ لاتین نمایش میدهیم. سرعت (مشتق ِ مکان نسبت به زمان) را با $\mathbf{v}$ نشان میدهیم:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

چاربردار ِ سرعت (مشتق ِ چاربردار ِ مکان نسبت به ویژه‌زمان) را با u نشان میدهیم:

$$u := \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \tag{4}$$

که از آن نتیجه میشود

$$u = \gamma\, v, \tag{5}$$

که γ ضریب ِ لُرِنتس [2] است:

$$\gamma := \left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2}, \tag{6}$$

و

$$\begin{aligned} v^0 :=& \frac{\mathrm{d}r^0}{\mathrm{d}t}, \\ =& 1. \end{aligned} \tag{7}$$

مانسته یِ قانون ِ دوم ِ نیوتُن [3] با سه‌بردار ِ نیرو ($\mathbf{F}$) و سه‌بردار ِ تکانه ($\mathbf{p}$) نوشته میشود:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}. \tag{8}$$

رابطه یِ E (انرژی) با تکانه

$$E = c^2\, p^0 \tag{9}$$

است. (8) را میشود بر حسب ِ f (چاربردار ِ نیرو) هم نوشت:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = f. \tag{10}$$

دیده میشود

$$\mathbf{f} = \gamma\,\mathbf{F}, \tag{11}$$

و البته f^0 باید چنان باشد که (10) با

$$u\cdot u = -c^2 \tag{12}$$

سازگار باشد، یعنی (12) اگر در یک زمان برقرار باشد، در اثر ِ تحول ی که با (10) داده میشود هم همچنان برقرار بماند.

برا یِ سیستم ی شامل ِ یک ذره 2 لَگرانژی (یا کنش) به کار میبریم. در شکل ِ اول (زمانی) زمان پارامتر ِ تحول است و لَگرانژی تابع ِ $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ (زمان، سه‌بردار ِ مکان، و سه‌بردار ِ سرعت) است. لَگرانژی و کنش در این شکل را با به ترتیب L و S نشان میدهیم. در شکل ِ دوم (پارامتری) زمان هم یک متغیر ِ دینامیکی است. ویژه‌زمان (یا یک پارامترِآفین ِ دیگر ِ مسیر) را پارامتر ِ تحول میگیریم و لَگرانژی و کنش ِ متناظر را با به ترتیب $L_{\rm s}$ و $S_{\rm s}$ نمایش میدهیم. $L_{\rm s}$ تابع ِ (r, u) (چاربردارها یِ مکان و سرعت) است، و در آن مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ سرعت مستقل از هم فرض میشوند. یعنی (12) اعمال نمیشود، بل که انتظار میرود اگر با شرط ِ اولیه برقرار باشد با تحول هم برقرار بمانَد.

داریم

$$\begin{aligned} S &= \int {\rm d}t\; L,\\ S_{\rm s} &= \int {\rm d}\tau\; L_{\rm s}. \end{aligned} \tag{13}$$

تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &:= \left(\frac{\delta S}{\delta r^i}\right)_{\rm in},\\ &= \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right),\\ \mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} &:= \left(\frac{\delta S_{\rm s}}{\delta r^\alpha}\right)_{\rm in},\\ &= \frac{\partial L_{\rm s}}{\partial r^\alpha} - \frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\left(\frac{\partial L_{\rm s}}{\partial u^\alpha}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

که شاخص ِ ${\rm in}$ یعنی وردش بدون ِ درنظرگرفتن ِ جمله‌ها یِ مرزی.

1 ذره یِ آزاد

یک ذره یِ آزاد به جرم ِ m را در نظر بگیرید. جواب ِ معادله یِ حرکت ِ این ذره آن است که سرعت ِ ذره ثابت است، یعنی معادله یِ حرکت را میشود به شکل ِ شتاب برابر ِ صفر نوشت. اما از معادله یِ

حرکت نمیشود لَگرانژی را به طُر ِ یکتا به دست آورْد. اگر این قید را بیفزاییم که تکانه یِ ذره و انرژی یِ ذره به شکل ِ

$$\mathbf{p} = m\,\gamma\,\mathbf{v}, \tag{15}$$

$$E = m\,c^2\,\gamma, \tag{16}$$

باشد، خاهیم داشت

$$\frac{\partial L^{\mathrm{f}}}{\partial v^i} = m\,\gamma\,v_i, \tag{17}$$

$$v^i\,\frac{\partial L^{\mathrm{f}}}{\partial v^i} - L^{\mathrm{f}} = m\,c^2\,\gamma, \tag{18}$$

که L^{f} لَگرانژی یِ زمانی یِ ذره یِ آزاد است. از ترکیب ِ (17) و (18) نتیجه میشود

$$L^{\mathrm{f}} = v^i\,(m\,\gamma\,v_i) - m\,c^2\,\gamma, \tag{19}$$

یا

$$L^{\mathrm{f}} = -m\,c^2\,\gamma^{-1}. \tag{20}$$

این هم ان لَگرانژی یی است که در مثلَن [4] به دست آمده. به ساده‌گی دیده میشود این لَگرانژی (17) و (18) را بر می‌آورَد.

لَگرانژی یِ پارامتری یِ ذره یِ آزاد را با $L^{\mathrm{f}}_{\mathrm{s}}$ نشان میدهیم. مانسته‌ها یِ (17) و (18) میشوند

$$\frac{\partial L^{\mathrm{f}}_{\mathrm{s}}}{\partial u^\alpha} = m\,u_\alpha, \tag{21}$$

که نتیجه میدهد

$$L^{\mathrm{f}}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\,m\,u\cdot u + C(r). \tag{22}$$

داریم

$$\mathcal{E}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{s}\,\alpha} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m\,u_\alpha) + \frac{\partial C}{\partial r^\alpha}. \tag{23}$$

از اینجا نتیجه میشود معادله یِ حرکت ِ ناشی از $S^{\mathrm{f}}_{\mathrm{s}}$ معادله یِ حرکت ِ ذره یِ آزاد است، اگر و تنها اگر همه یِ مشتقها یِ C صفر باشند، یعنی C ثابت باشد. یک ثابت ِ جمعی را میشود از لَگرانژی حذف کرد. به این ترتیب میرسیم به

$$L^{\mathrm{f}}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\,m\,u\cdot u. \tag{24}$$

این هم در [4] آمده.

یک راه ِ دیگر برا یِ رسیدن به (20) این می‌بود که به یک ذره یِ آزاد ِ ساکن یک انرژی یِ پتانسیل برابر ِ $(m\,c^2)$ نسبت دهیم. کنش ِ متناظر، برا یِ بازه یِ زمانی یِ $\Delta t^{\rm r}$ می‌شود

$$\Delta S^{\rm f\,r} = -m\,c^2\,\Delta t^{\rm r}, \qquad (25)$$

که شاخص ِ r متناظر با حالت ِ سکون است. ذره را بخیزانیم تا سرعت َش $\mathbf{v}$ شود. داریم

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t^{\rm r}. \qquad (26)$$

حالا فرض کنیم کنش در اثر ِ خیز (ِ لُرِنتس [2]) تغییر نمی‌کند. نتیجه می‌شود

$$\Delta S^{\rm f} = -m\,c^2\,\gamma^{-1}\,\Delta t, \qquad (27)$$

که هم ان (20) است.

2 ذره در یک میدان ِ اسکالر

لَگرانژی یِ یک ذره یِ غیرِنسبیتی در انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ V

$$L^{\rm NR} = \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - V \qquad (28)$$

است. V تابع ی از چاربردار ِ مکان (زمان و سه‌بردار ِ مکان) است. برا یِ این ذره لَگرانژی‌ها یِ زمانی و پارامتری را چنین می‌گیریم.

$$L = -m\,c^2\,\Sigma(\gamma) - V\,\Xi(\gamma), \qquad (29)$$

$$L_{\rm s} = m\,c^2\,\Sigma_{\rm s}(u\cdot u) + V\,\Xi_{\rm s}(u\cdot u). \qquad (30)$$

انگیزه یِ این نهاده‌ها آن است که در شکل ِ زمانی، انتظار می‌رود (سه‌بردار ِ) سرعت فقط از طریق ِ اندازه اَش در لَگرانژی وارد شود (که اندازه یِ سرعت هم تابع ِ ضریب ِ لُرِنتس [2] است)؛ و در شکل ِ پارامتری تنهااسکالر ی که با (چاربردار ِ) سرعت ساخته می‌شود $(u\cdot u)$ است.

از (29) نتیجه می‌شود

$$p_i = -(m\,\Sigma' + c^{-2}\,V\,\Xi')\,\gamma^3\,v_i, \qquad (31)$$

$$E = (m\,c^2\,\Sigma' + V\,\Xi')\,\gamma^3\,(\gamma^{-2} - 1) + m\,c^2\,\Sigma + V\,\Xi. \qquad (32)$$

پریم مشتقگیری است، و از این استفاده شده که

$$\frac{\partial\gamma}{\partial v^i} = c^{-2}\,\gamma^3\,v_i, \tag{33}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = c^2\,(1-\gamma^{-2}). \tag{34}$$

از (30) نتیجه میشود

$$p_\alpha = 2\,(m\,c^2\,\Sigma'_{\mathrm{s}} + V\,\Xi'_{\mathrm{s}})\,u_\alpha. \tag{35}$$

از (35) از جمله نتیجه میشود

$$p_i = c^{-2}\,E\,v_i. \tag{36}$$

این و (32) را در (31) میگذاریم:

$$(m\,c^2\,\Sigma' + V\,\Xi')\,\gamma^3\,(\gamma^{-2}-1) + m\,c^2\,\Sigma + V\,\Xi = -(m\,c^2\,\Sigma' + V\,\Xi')\,\gamma^3, \tag{37}$$

که نتیجه میدهد

$$m\,c^2(\gamma\,\Sigma' + \Sigma) + V\,(\gamma\,\Xi' + \Xi) = 0. \tag{38}$$

با فرض ِ این که Σ و Ξ مستقل از V اند، از (38) نتیجه میشود

$$\gamma\,\Sigma' + \Sigma = 0, \tag{39}$$

$$\gamma\,\Xi' + \Xi = 0, \tag{40}$$

که نتیجه میدهند

$$\Sigma(\gamma) = \gamma^{-1}\,\Sigma(1), \tag{41}$$

$$\Xi(\gamma) = \gamma^{-1}\,\Xi(1), \tag{42}$$

و از آنجا

$$p_\alpha = [m\,\Sigma(1) + c^{-2}\,V\,\Xi(1)]\,u_\alpha. \tag{43}$$

این را با (35) ترکیب میکنیم و فرض میکنیم Σ_{s} و Ξ_{s} هم مستقل از V اند. نتیجه میشود

$$2\,c^2\,\Sigma'_{\mathrm{s}} = \Sigma(1), \tag{44}$$

$$2\,c^2\,\Xi'_{\mathrm{s}} = \Xi(1), \tag{45}$$

و از آنجا،

$$\Sigma_{\rm s} = \frac{\Sigma(1)}{2\,c^2}\,u\cdot u + \Sigma_{\rm s}(0), \tag{46}$$

$$\Xi_{\rm s} = \frac{\Xi(1)}{2\,c^2}\,u\cdot u + \Xi_{\rm s}(0). \tag{47}$$

برا یِ تعیینِ $\Sigma(1)$ و $\Xi(1)$، حدِ غیرنسبیتی را بررسی کنیم. از (29)، (41)، و (42) نتیجه میشود

$$L = \left(-m\,c^2 + \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)\,\Sigma(1) - V\,\Xi(1) + O(c^{-2}), \tag{48}$$

که از مقایسه اَش با (29) نتیجه میشود

$$\Sigma(1) = 1, \tag{49}$$

$$\Xi(1) = 1. \tag{50}$$

به این ترتیب،

$$L = -(m\,c^2 + V)\,\gamma^{-1}. \tag{51}$$

از (30)، (46)، (47)، (49)، و (50) نتیجه میشود

$$L_{\rm s} = \frac{1}{2}\,m\,u\cdot u + \frac{1}{2\,c^2}\,u\cdot u\,V + m\,c^2\,\Sigma_{\rm s}(0) + V\Xi_{\rm s}(0), \tag{52}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} = -\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}[(m + c^{-2}\,V)\,u_\alpha] + \frac{\partial V}{\partial r^\alpha}\,\Xi_{\rm s}. \tag{53}$$

داریم

$$u^\alpha\,\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} = -(m + c^{-2}\,V)\,u^\alpha\,\frac{{\rm d}u_\alpha}{{\rm d}\tau} - c^{-2}\,u^\alpha\,u_\alpha\,\frac{\partial V}{\partial r^\beta}\,u^\beta + u^\alpha\,\frac{\partial V}{\partial r^\alpha}\,\Xi_{\rm s}, \tag{54}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{m + c^{-2}\,V}{2}\,\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}(u\cdot u) = -u^\alpha\,\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} + (\Xi_{\rm s} - c^{-2}\,u\cdot u)\,u^\alpha\,\frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \tag{55}$$

(12) در اثرِ تحول برقرار میماند، اگر و تنها اگر

$$1 + \Xi_{\rm s}(-c^2) = 0, \tag{56}$$

یعنی

$$\Xi_{\rm s}(0) = -\frac{1}{2}. \tag{57}$$

$\Sigma_{\rm s}(0)$ یک ثابتِ جمعی در لگرانژی وارد میکند، که بی‌اثر است. پس مقدارِ $\Sigma_{\rm s}(0)$ مهم نیست. از جمله میشود آن را صفر گرفت. به این ترتیب،

$$L_{\rm s} = \frac{1}{2}\, m\, u\cdot u + \frac{1}{2}\,(c^{-2}\, u\cdot u - 1)\, V. \tag{58}$$

از (51)، از جمله نتیجه میشود

$$\mathbf{p} = (m + c^{-2}\, V)\, \gamma\, \mathbf{v}, \tag{59}$$

$$E = (m\, c^2 + V)\, \gamma. \tag{60}$$

از (58) هم از جمله نتیجه میشود

$$p = (m + c^{-2}\, V)\, u, \tag{61}$$

که با (59) و (60) هم‌ارز است.

معادله‌یِ‌حرکتِ حاصل از لگرانژی یِ (51) میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m + c^{-2}\, V)\, \gamma\, \mathbf{v}] = -\gamma^{-1}\, \nabla V. \tag{62}$$

معادله‌یِ‌حرکتِ حاصل از لگرانژی یِ (58) هم میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(m + c^{-2}\, V)\, u_\alpha] = -\frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \tag{63}$$

بخشِ فضایی یِ این معادله با (62) هم‌ارز است. بخشِ زمانی هم چنان است که (12) در اثرِ تحول تغییر نکند.

سرانجام، اینجا هم یک راهِ دیگر برا یِ رسیدن به (51) این میبود که به یک ذره یِ ساکن یک انرژی یِ پتانسیل برابرِ $(m\, c^2 + V)$ نسبت دهیم. کنشِ متناظر، برا یِ بازه یِ زمانی یِ $\Delta t^{\rm r}$ میشود

$$\Delta S^{\rm r} = -(m\, c^2 + V)\, \Delta t^{\rm r}. \tag{64}$$

ذره را بخیزانیم تا سرعت‌َش $\mathbf{v}$ شود. با استفاده از (26)، و با این فرض که کنش در اثرِ خیز (ِ لُرِنتس [2]) تغییر نمیکند، نتیجه میشود

$$\Delta S = -(m\, c^2 + V)\, \gamma^{-1}\, \Delta t, \tag{65}$$

که هم ان (51) است.

3 میدان ِ اسکالر و مئلفه یِ صفر ِ یک میدان ِ برداری

لَگرانژی یی که در [4] آمده (L') چنین است.

$$L' = -m\,c^2\,\gamma^{-1} - V. \tag{66}$$

دیده میشود L' با L فرق دارد. از (66) و با استفاده از (26) دیده میشود

$$\Delta S'^{\,\mathrm{r}} = -(m\,c^2 + V\,\gamma)\,\Delta t^{\mathrm{r}}. \tag{67}$$

این پیشنهاد میکند تعریف کنیم

$$V^{\mathrm{r}} := \gamma\,V. \tag{68}$$

یک راه ِ برآوردن ِ این رابطه آن است که V را مئلفه یِ صفر ِ یک میدان ِ چاربرداری ($\mathcal{A}$) بگیریم، که مئلفه‌ها یِ فضایی یِ آن صفر اند (برا یِ ذره یِ متحرک، با لَگرانژی یِ L'):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= V,\\ \mathcal{A}_i &= 0. \end{aligned} \tag{69}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{\mathrm{r}} &= \gamma\,V,\\ \mathcal{A}_i^{\mathrm{r}} &= \gamma\,c^{-2}\,v_i\,V. \end{aligned} \tag{70}$$

به این ترتیب (67) میشود

$$\Delta S'^{\,\mathrm{r}} = -(m\,c^2 + \mathcal{A}_0^{\mathrm{r}})\,\Delta t^{\mathrm{r}}. \tag{71}$$

عبارت ِ درون ِ پرانتز را میشود چنان نوشت که صریحَن اسکالر باشد:

$$\begin{aligned} m\,c^2 + \mathcal{A}_0^{\mathrm{r}} &= m\,c^2 + \mathcal{A}_\alpha^{\mathrm{r}}\,u^{\alpha\,\mathrm{r}},\\ &= m\,c^2 + \mathcal{A}_\alpha\,u^\alpha. \end{aligned} \tag{72}$$

به این ترتیب، L' لَگرانژی یِ ذره ای است که در یک میدان ِ برداری حرکت میکند که مئلفه‌ها یِ فضایی یَش صفر اند:

$$L' = -(m\,c^2 + \mathcal{A}_\alpha\,u^\alpha)\,\gamma^{-1}. \tag{73}$$

یک مثال از این گونه، لَگرانژی یِ ذره در یک میدان ِ الکترُمغناطیسی یِ داده‌شده است، که در آن

$$\mathcal{A} = -q\,A, \tag{74}$$

که q بار ِ ذره و A چاربردار ِ پتانسیل است [4].

4 نیرو

ذره ای به جرم ِ m در انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ V را در نظر بگیرید. انرژی یِ پتانسیل 2 نقش دارد. یک یِ این که نیرو میسازد. دیگر این که جرم ِ ذره را عوض میکند. وقت یِ V را اسکالر میگیریم، یعنی مقدار ِ V در اثر ِ خیزاندن عوض نمیشود. پس محاسبه یِ جرم ِ ذره ساده است: ذره یِ ساکن انرژی یَش مجموع ِ این انرژی یِ پتانسیل و انرژی یِ سکون در نبود ِ این پتانسیل است:

$$E^{\mathrm{r}} = m\,c^2 + V. \tag{75}$$

دیده میشود این هم ان (60) برا یِ ذره یِ ساکن است. به این ترتیب برا یِ ذره یک جرم‌ِمئثر ِ تابع ِ فضازمان تعریف میکنیم، که آن را با m^{eff} نمایش میدهیم:

$$m^{\mathrm{eff}} = m + c^{-2}\,V. \tag{76}$$

این هم ان ضریب ِ u در (61) است. (10) میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(m + c^{-2}\,V)\,u] = f. \tag{77}$$

این هم ان (63) است، اگر

$$f_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \tag{78}$$

شاید این یک تعمیم ِ طبیعی برا یِ رابطه یِ نیرو با انرژی یِ پتانسیل بنماید. اما توجه کنید که انرژی یِ پتانسیل فقط در نیرو ظاهر نشده؛ جرم را هم تغییر داده. اگر به این توجه نمیکردیم، شاید معادله یِ حرکت را

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{s}\,\alpha} = 0 \tag{79}$$

مینوشتیم، که

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{s}\,\alpha} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(m\,u_\alpha) - \frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \tag{80}$$

در حال ی که (79) معادله‌یِ‌حرکت ِ درست ی نیست، چون (12) را برقرار نگه نمی‌دارد:

$$\frac{m}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u\cdot u)=-u^{\alpha}\,\tilde{\mathcal{E}}_{\mathrm{s}\,\alpha}-u^{\alpha}\,\frac{\partial V}{\partial r^{\alpha}}. \tag{81}$$

(79) و (12) طرف ِ راست ِ (81) را لزومَن صفر نمی‌کنند. (80) متناظر است با لگرانژی یِ (نادرست ِ) $\tilde{L}_{\mathrm{s}}$:

$$\tilde{L}_{\mathrm{s}}:=\frac{1}{2}\,m\,u\cdot u-V. \tag{82}$$

5 پانوشتها

[1] Minkowski

[2] Lorentz

[3] Newton

[4] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “classical mechanics” 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 7