X1-072 (2010/11/26)

ویژه‌نماها یِ مدارها یِ غیرِفعال

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

مدارها یِ شامل ِ مقاومت، خازن، و القاگر (همه خطی، مستقل‌اززمان، و غیرِفعال) بررسی میشود. نشان داده میشود بخش ِ حقیقی یِ ویژه‌نماها یِ چنین مدارها یی نامثبت است؛ همچنین برا یِ مدارها یی که خازن ندارند یا القاگر ندارند، ویژه‌نماها حقیقی اند.

0 قراردادها

هر مدار (ِ فشرده) با یک شبکه و عنصرها یی که در شاخه‌ها یِ شبکه اند مشخص میشود. برا یِ هر شاخه یک جهت ِ قراردادی میگیریم، به این ترتیب که یک سر ِ شاخه را سر ِ مثبت و سر ِ دیگر ِ شاخه را سر ِ منفی میگیریم. سر ِ مثبت ِ شاخه یِ j را با ∂_+j، و سر ِ منفی یِ شاخه یِ j را با ∂_-j نشان میدهیم. مجموعه یِ همه یِ شاخه‌ها یی که گره یِ a سر ِ مثبت ِشان است را با $(\partial_+)^{-1}a$ مجموعه یِ همه یِ شاخه‌ها یی که گره یِ a سر ِ منفی یِشان است را با $(\partial_-)^{-1}a$ نشان میدهیم. این شبکه یِ (یا گراف ِ) جهتدار را با Γ (ماتریس ِ شبکه) مشخص میکنیم. شاخص ِ اول ِ این ماتریس شاخص ِ گره، و شاخص ِ دوم ِ این ماتریس شاخص ِ شاخه است، چنان که

$$\Gamma^a{}_j := \begin{cases} 1, & a = \partial_+ j \\ -1, & a = \partial_- j \\ 0, & (a \neq \partial_+ j) \wedge (a \neq \partial_- j) \end{cases} . \tag{1}$$

دیده میشود هر ستون ِ این ماتریس یک $+1$ و یک -1 دارد، و بقیه یِ عنصرها یَش 0 اند. از جمله با تعریف ِ همبردار ِ S با

$$S_a := 1, \tag{2}$$

داریم

$$S\,\Gamma = 0. \tag{3}$$

قرارداد ی که برا یِ ضرب ِ ماتریسی به کار میبریم این است که در $(X\,Y)$ شاخص ِ آخر ِ X با شاخص ِ اول ِ Y یکسان شده است و رو یِ این شاخص ِ مشترک جمع زده ایم.

Γ به این که هر شاخه چه عنصر ی است مربوط نیست. حتا به این که عناصر ِ مدار خطی یا مستقل‌اززمان اند یا نَه هم بسته‌گی ندارد. به چیزها یی که مستقل از عناصر ِ مدار اند و فقط به شبکه یِ مدار بسته‌گی دارند، چیزها یِ تُپُلُژیک میگوییم. Γ یک کمیت ِ تُپُلُژیک، و (3) یک رابطه یِ تُپُلُژیک است.

عنصرها یِ مدار رابطه یِ بین ِ ولتاژها و جریانها یِ شاخه‌ها را تعیین میکنند. ولتاژها و جریانها را با علامت ِ قراردادی به کار میبریم، به این معنی که ولتاژ ِ هر شاخه ولتاژ ِ سر ِ مثبت ِ آن منها یِ ولتاژ ِ سر ِ منفی یِ آن است. جریان ِ هر شاخه هم جریان ی است که از سر ِ مثبت به سر ِ منفی میرود. البته هر یک از این دُکمیت ممکن است مثبت یا منفی باشند. در حالت ِ کلی بین این کمیتها به تعداد ِ شاخه‌ها معادله هست، که ممکن است جبری یا دیفرانسیل باشند. وقت ی بین ِ ولتاژ و جریان ِ فقط یک شاخه یک رابطه هست، میگوییم عنصر ِ آن شاخه مستقل است. وقت ی رابطه یِ V_j با I^j (به ترتیب ولتاژ و جریان ِ شاخه یِ j) جبری است، میگوییم شاخه یِ j مقاومت است. وقت ی رابطه یِ I^j با انتگرال ِ V_j بر زمان جبری است، میگوییم شاخه یِ j القاگر است. وقت ی رابطه یِ V_j با انتگرال ِ I^j بر زمان جبری است، میگوییم شاخه یِ j خازن است. در حالتها یِ اخیر، بین ِ I^j و $\dot{I}^j$ و V_j (القاگر)، یا V_j

و $\dot{V}_j$ و I^j (خازن) یک رابطه یِ جبری هست، که $\dot{X}$ مشتق ِ X نسبت به زمان (t) است.

میگوییم مقاومت خطی است، وقت ی بین ِ جریان و ولتاژ ِ آن یک رابطه یِ خطی باشد. میگوییم القاگر خطی است، وقت ی ولتاژ ِ آن تابع ِ جریان َش نباشد و یک تابع ِ خطی از مشتق ِ زمانی یِ جریان باشد. میگوییم خازن خطی است، وقت ی جریان ِ آن تابع ِ ولتاژ َش نباشد و یک تابع ِ خطی از مشتق ِ زمانی یِ ولتاژ باشد. مدار ی شامل ِ عنصرها یِ خطی و منبعها یِ آرمانی (یِ ولتاژ یا جریان) را یک مدار ِ خطی می‌نامیم.

میگوییم مدار مستقل‌اززمان است اگر همه یِ رابطه‌ها یِ بین ِ (ولتاژ و جریان ِ) عنصرها یَش (جز منبعها) مستقل‌اززمان باشد. برا یِ مدارها یِ خطی و مستقل‌اززمان، هر مقاومت با یک ثابت ِ r (مقاومت)، هر القاگر با یک ثابت ِ l (خُدالقایی)، و هر خازن با یک ثابت ِ c (ظرفیت) مشخص میشود.

میگوییم یک عنصر (ِ خطی یِ مستقل‌اززمان) غیرِفعال است، وقت ی ثابت ِ متناظر با آن عنصر نامنفی باشد. میگوییم مدار غیرِفعال است، وقت ی همه یِ عنصرها یِ آن (جز منبعها) غیرِفعال باشند. فرض میکنیم هر شاخه شامل ِ یک مقاومت، یک خازن، و یک القاگر موازی با هم است، جز شاخه‌ها یی که شامل ِ منبع اند. البته برا یِ هر شاخه ممکن است ظرفیت، عکس ِ مقاومت، یا عکس ِ خُدالقایی صفر باشد، که در این صورت آن عنصر ِ متناظر معادل ِ مدار ِ باز است.

اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

1 معادلات ِ مدار

2 دسته از معادلات ِ مدار اند که تُپُلُژیک اند. یک دسته این است که جمع ِ جبری یِ جریانها یی که از گره یِ a بیرون میروند صفر است:

$$\sum_{j\in(\partial_+)^{-1}a} I^j - \sum_{j\in(\partial_-)^{-1}a} I^j = 0, \tag{4}$$

که با توجه به تعریف ِ ماتریس ِ شبکه میشود

$$\Gamma^a{}_j\, I^j = 0. \tag{5}$$

دسته یِ دیگر این است که جمع ِ جبر یِ ولتاژ ِ شاخه‌ها یِ هر حلقه صفر است. این را میشود به این زبان نوشت که هر گره ولتاژ ِ معین ی دارد (E_a ولتاژ ِ گره یِ a است) و ولتاژ ِ هر شاخه برابر ِ ولتاژ ِ سر ِ مثبت ِ آن شاخه منها یِ ولتاژ ِ سر ِ منفی یِ آن شاخه است:

$$V_j = E_{\partial_+ j} - E_{\partial_- j}, \tag{6}$$

یا

$$V_j = E_a\,\Gamma^a{}_j. \tag{7}$$

شکل ِ بسته یِ (5) و (7) میشود

$$\Gamma\, I = 0, \tag{8}$$

$$V = E\,\Gamma. \tag{9}$$

از (3) دیده میشود معادلات ِ (8) مستقل از هم نیستند: تعداد ِ معادلات ِ مستقل دست‌ِکم یک ی کمتر از تعداد ِ گره‌ها ست. در یک شبکه یِ همبند، تعداد ِ معادلات ِ مستقل دقیقَن یک ی کمتر از تعداد ِ گره‌ها ست. برا یِ نشان-دادن ِ این توجه میکنیم که تعداد ِ معادلات ِ مستقل در (8) برابر است با تعداد ِ گره‌ها منها یِ بُعد ِ فضا یِ جوابها یِ معادله یِ

$$\Sigma\,\Gamma = 0 \tag{10}$$

(برا یِ Σ). ستون ِ j از (10) میشود

$$\Sigma_{\partial_+ j} - \Sigma_{\partial - j} = 0, \tag{11}$$

یعنی اگر a و b دُسر ِ یک شاخه باشند، Σ_a و Σ_b با هم برابر اند. از اینجا معلوم میشود اگر متناظر با گره‌ها یِ a و b یک رشته گره باشد که اولی a و آخری b است و هر دُگره یِ متوالی دُسر ِ یک شاخه اند، Σ_a و Σ_b با هم برابر اند. در یک شبکه یِ همبند، بین ِ هر دُگره چنین رشته ای از گره‌ها هست، که نشان میدهد همه یِ Σ_a ها برابر اند. در واقع با استدلال ِ مشابه ی معلوم میشود بُعد ِ فضا یِ جوابها یِ معادله یِ (10) برابر ِ تعداد ِ مثلفه‌ها یِ همبندی یِ شبکه است.

همچنین E یکتا نیست: V با افزودن ِ هر یک از جوابها یِ معادله یِ (10) به E تغییر نمیکند.

با توجه به قراردادها یِ علامت ِ ولتاژ و جریان ِ یک عنصر، بین ِ ولتاژ و جریان ِ یک مقاومت ِ خطی یِ مستقل‌اززمان، یک القاگر ِ خطی یِ مستقل‌اززمان، و یک خازن ِ خطی یِ مستقل‌اززمان

به ترتیب این رابطه‌ها برقرار است.

$$
\begin{aligned}
i &= r^{-1}\,v,\\
\dot{i} &= l^{-1}\,v,\\
i &= c\,\dot{v},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

که v و i به ترتیب ولتاژ و جریان ِ عنصر اند. برا یِ یک مدار ِ خطی و مستقل از زمان، یک جواب ِ همگن (متناظر با صفرکردن ِ منبعها) به این شکل است که بسته‌گی یِ همه یِ ولتاژها و جریانها به زمان نمایی است. یعنی هر ولتاژ یا جریان ی برابر است با یک ثابت ضرب در $\exp(s\,t)$، که s یک ثابت است. فقط بعض ی s ها به جوابها یِ نابدیهی (ناصفر) می‌انجامند. به آن s ها ویژه‌نماها یِ مدار (در واقع هر سیستم ِ خطی یِ مستقل‌اززمان) میگویند. برا یِ این جوابها یِ همگن، معادلات ِ (12) میشوند

$$
\begin{aligned}
i &= r^{-1}\,v,\\
i &= (l\,s)^{-1}\,v,\\
i &= (c\,s)\,v.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

رابطه‌ها یِ متناظر برا یِ یک مدار متشکل از عنصرها یِ خطی، مستقل‌اززمان، و مستقل میشوند

$$I = (R^{-1} + L^{-1}\,s^{-1} + C\,s)\,V, \tag{14}$$

که R، L، و C به ترتیب ماتریس ِ مقاومت، القا، و ظرفیت اند. اینها ماتریسها یی قطری اند که عنصر ِ j در قطر ِشان به ترتیب مقاومت، خُدالقایی، و ظرفیت ِ شاخه یِ j است. مدار غیرِفعال است اگر و تنها اگر R^{-1} و L^{-1} و C مثبت ِ شبهِمعین باشند. در ادامه شرط ِ مستقل-بودن ِ عنصرها را از مدار برمیداریم. در این صورت R^{-1} و L^{-1} و C لازم نیست قطری باشند، اما همچنان متقارن و مثبت ِ شبهِمعین اند. از ترکیب ِ (8) با (14) نتیجه میشود

$$\Gamma\,(R^{-1} + L^{-1}\,s^{-1} + C\,s)\,V = 0. \tag{15}$$

رابطه یِ (9) را هم میشود چنین نوشت.

$$V = \Gamma^{*}\,E, \tag{16}$$

که

$$(\Gamma^*)_j{}^a := \Gamma^a{}_j. \tag{17}$$

از ترکیب ِ این با (15) نتیجه میشود

$$[\Gamma\,(R^{-1} + L^{-1}\,s^{-1} + C\,s)\,\Gamma^*]\,E = 0. \tag{18}$$

s ویژه‌نما ست، اگر و تنها اگر معادله یِ بالا برا یِ E جواب ِ نابدیهی داشته باشد. جواب ِ نابدیهی جواب ی است که جواب ِ (10) نباشد.

2 ویژه‌نماها

با ضرب-کردن ِ $\bar{E}$ از چپ در (18) نتیجه میشود

$$\bar{V}\,(R^{-1} + L^{-1}\,s^{-1} + C\,s)\,V = 0, \tag{19}$$

یا

$$(\bar{V}\,R^{-1}\,V) + (\bar{V}\,L^{-1}\,V)\,s^{-1} + (\bar{V}\,C\,V)\,s = 0, \tag{20}$$

که $\bar{X}$ مزدوج ِ مختلط ِ X است. در حالت ِ کلی، (20) یک معادله یِ درجه یِ 2 برا یِ s است. توجه داریم که این معادله با (18) هم‌ارز نیست، از (18) نتیجه میشود. تعداد ِ معادلات ِ مستقل در (18) برابر ِ تعداد ِ گره‌ها منها یِ تعداد ِ مثلفه‌ها یِ همبندی یِ شبکه است. در حال ی که (20) فقط یک معادله است.

از این که R^{-1}، L^{-1}، و C حقیقی و متقارن اند نتیجه میشود هر یک از ضریبها یِ s^k در (20) حقیقی است. از جمله معلوم میشود یک مدار ِ خطی یِ مستقل‌اززمان اگر خازن یا القاگر نداشته باشد، ویژه‌نماها یَش حقیقی اند، چون در این حالتها به ترتیب C یا L^{-1} صفر اند و (20) یک معادله یِ درجه یِ یک با ضرایب ِ حقیقی میشود. اگر مدار خطی، مستقل‌اززمان، و غیرِفعال باشد، هر یک از ضریبها یِ s^k در (20) نامنفی است. این نتیجه میدهد جزئِ‌حقیقی یِ همه یِ ویژه‌نماها نامثبت است.

3 پانوشتها

[1] Charles A. Desoer & Ernest S. Kuh; “basic circuit theory” (Mc-Graw Hill, 1969) chapter 10