X1-073 (2011/01/25)

زمان به عنوان ِ متغیر ِ دینامیکی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

نقش ِ زمان از پارامتر ِ تحول به یک متغیر ِ دینامیکی تغییر داده میشود، و یک کمیت ِ دیگر به عنوان ِ پارامتر ِ تحول وارد میشود. فرمولبندیها یِ لگرانژی و همیلتنی در فضا یِ گسترش-یافته (با متغیر ِ دینامیکی یِ اضافی یِ زمان) بررسی میشود.

0 قراردادها

شاخصها یِ فضایِ‌پیکربندی یِ معمول را حروف ِ میانی یِ لاتین میگیریم. مقدار ِ این شاخصها از 1 تا N (تعداد ِ درجه‌ها یِ آزادی یِ سیستم) تغییر میکند. q^i مختصه یِ i ِ نقطه یِ $\boldsymbol{q}$ در فضا یِ پیکربندی است. شاخصها یِ فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته را با حروف ِ میانی یِ یونانی نشان میدهیم. مقدار ِ این شاخصها از 0 تا N تغییر میکند، و مختصه یِ صفرُم ِ فضا یِ پیکربندی زمان (t) است:

$$q^0 := t. \tag{1}$$

نقطه یِ $(q^0, \boldsymbol{q})$ در فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته را با q نشان میدهیم.

شاخصها یِ فضایِ‌فاز ِ معمول را با حروف ِ ابتدایی یِ لاتین نمایش میدهیم. مقدار ِ این شاخصها

از 1 تا $(2\,N)$ تغییر میکند. x^a مختصه ی ِaی ِ نقطه ی ِ $\boldsymbol{x}$ در فضا ی ِ فاز است. این نقطه با دُتایی ی ِ $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ مشخص میشود، که $\boldsymbol{p}$ تکانه ی ِ مزدوج ِ $\boldsymbol{q}$ است. داریم

$$x^a := \begin{cases} q^a, & 1 \le a \le N \\ p_{a-N}, & N+1 \le a \le 2\,N \end{cases}. \qquad (2)$$

نقطه ی ِ x در فضای ِفاز ِ گسترش-یافته به شکل ِ $(p_0, t, \boldsymbol{x})$ است، که p_0 تکانه ی ِ متناظر با زمان است. شاخصها ی ِ فضای ِفاز ِ گسترش-یافته را با حروف ِ ابتدایی ی ِ یونانی نشان میدهیم. مقدار ِ این شاخصها از (-1) تا $(2\,N)$ تغییر میکند، چنان که علاوه بر (2)،

$$x^\alpha := \begin{cases} t, & \alpha = 0 \\ p_0, & \alpha = -1 \end{cases}. \qquad (3)$$

مثلفه‌ها ی ِ ناصفر ِ J (تانسُر ِ همتافته) چنین اند.

$$\begin{aligned} J^{i\,(i+N)} &= 1, \\ J^{(i+N)\,i} &= -1, \\ J^{0\,(-1)} &= 1, \\ J^{(-1)\,0} &= -1. \end{aligned} \qquad (4)$$

کروشه ی ِ پوؤِسُن [1] ِ نگاشتها ی ِ A و B از فضای ِفاز ِ معمول با $\{A,B\}$ نمایش داده میشود:

$$\{A,B\} := J^{a\,b}\,(\partial_a A)\,(\partial_b B). \qquad (5)$$

برا ی نگاشتها ی ِA و B از فضای ِفاز ِ گسترش-یافته هم کروشه‌ی ِپوؤَسُن [1] ِ گسترش-یافته $(\{A,B\}_{\mathrm{ext}})$ تعریف میشود:

$$\{A,B\}_{\mathrm{ext}} := J^{\alpha\,\beta}\,(\partial_\alpha A)\,(\partial_\beta B). \qquad (6)$$

مشتق ِ کامل ِ A نسبت به زمان را با $\dot{A}$، و مشتق ِ کامل ِ A نسبت به τ (پارامتر ِ تحول وقت ی زمان پارامتر ِ دینامیکی شد) را با A' نمایش میدهیم. مشتق ِ A نسبت به متغیر َش را با $\mathrm{D}A$ نشان میدهیم. اگر A تابع ِ چند متغیر باشد، مشتق ِ A نسبت به متغیر ِ k اُم َش را با $\mathrm{D}_k A$ نشان میدهیم.

$\left(\dfrac{\partial A}{\partial r}\right)_u$ یعنی مشتق ِ پاره‌ای یِ A نسبت به r، وقت ی متغیرها یِ A را u گرفته ایم.

واورون ِ نگاشت ِ A را با A^{inv} نشان میدهیم.

1 لگرانژی، معادلات ِ حرکت

کنش ِ S از مرتبه یِ یک را در نظر بگیرید. این کنش انتگرال ِ یک لگرانژی (L) است، که تابع ِ مکان (نقطه در فضا یِ پیکربندی)، سرعت، و زمان است:

$$S=\int \mathrm{d}t\; L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{7}$$

این کنش را میشود بر حسب ِ یک پارامتر ِ دیگر (τ) چنین نوشت.

$$S=\int \mathrm{d}\tau\; t'\,L[t,\boldsymbol{q},(t')^{-1}\,\boldsymbol{q}']. \tag{8}$$

از اینجا یک لگرانژی یِ دیگر تعریف میکنیم که تابع ِ مکان ِ گسترش-یافته (مکان و زمان، یعنی نقطه در فضا یِ پیکربندی یِ گسترش-یافته) و سرعت (نسبت به پارامتر ِ τ) است:

$$\tilde{L}(q,q'):=t'\,L[t,\boldsymbol{q},(t')^{-1}\,\boldsymbol{q}']. \tag{9}$$

تکانه‌ها یِ متناظر با این لگرانژی یِ جدید را با $\tilde{p}$ نمایش میدهیم:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i &:= \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^{i\,\prime}},\\ &= t'\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^{i\,\prime}},\\ &= t'\,p_i\,(t')^{-1},\end{aligned} \tag{10}$$

و

$$\tilde{p}_0 := \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'},$$
$$= L + t'\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial t'},$$
$$= L - t'\,p_i\,\dot{q}^i\,(t')^{-1}. \tag{11}$$

(10) و (11) به ترتیب میشوند

$$\tilde{p}_i = p_i, \tag{12}$$

$$\tilde{p}_0 = -H, \tag{13}$$

که H همیلتنی ی ِ متناظر با لگرانژی ی ِ L است:

$$H := p_i\,\dot{q}^i - L. \tag{14}$$

معادلات ِحرکت ِ متناظر با $\tilde{L}$ عبارت اند از $\tilde{\mathcal{E}}_\mu$ برابر ِ صفر، که

$$\tilde{\mathcal{E}}_\mu := \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^\mu} - p'_\mu. \tag{15}$$

دیده میشود

$$\tilde{\mathcal{E}}_i = t'\,\frac{\partial L}{\partial q^i} - t'\,\dot{p}_i,$$
$$= t'\,\mathcal{E}_i, \tag{16}$$

که

$$\mathcal{E}_i := \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{p}_i, \tag{17}$$

و معادلات ِحرکت ِ متناظر با L عبارت اند از $\mathcal{E}_i$ برابر ِ صفر. همچنین،

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = t'\,\frac{\partial L}{\partial t} + t'\,\frac{\mathrm{d}(p_i\,\dot{q}^i - L)}{\mathrm{d}t},$$
$$= t'\,\left(\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\,\dot{q}^i,$$
$$= -t'\,\mathcal{E}_i\,\dot{q}^i. \tag{18}$$

از (16) و (18) نتیجه میشود معادلات‌ِحرکت ِ متناظر با $\tilde{L}$ با معادلات‌ِحرکت ِ متناظر با L هم‌ارز اند، با وجود ِ این که تعداد ِ معادلات ِ متناظر با $\tilde{L}$ یک ی بیشتر است. در واقع بین ِ معادلات ِ متناظر با $\tilde{L}$ یک اتحاد هست:

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 + \tilde{\mathcal{E}}_i\,\dot{q}^i\ = 0, \tag{19}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\tilde{\mathcal{E}}_\mu\,\dot{q}^\mu = 0. \tag{20}$$

2 لگرانژی، تقارنها

در [2] بحث ِ مفصل ی در باره یِ تقارن و فرمولبندی یِ لگرانژی آمده است. بخش ی از تعریفها یی که اینجا به کار میرود هم انها یی است که آنجا به کار رفته.

متناظر با نگاشت ِ وارونپذیر ِ $\tilde{\mathcal{O}}$ از فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته به فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته، یک نگاشت از خمها یِ فضا یِ پیکربندی به خمها یِ فضا یِ پیکربندی هست، که آن را با $\mathcal{O}$ نمایش میدهیم:

$$[\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{q})]\{\tilde{\mathcal{O}}^0[t,\boldsymbol{q}(t)]\} := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{O}}}[t,\boldsymbol{q}(t)]. \tag{21}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\{\dot{\tilde{\mathcal{O}}}^0[t,\boldsymbol{q}(t)]\}\,\{\mathrm{D}\,[\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{q})]\}\{\tilde{\mathcal{O}}^0[t,\boldsymbol{q}(t)]\} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{O}}}}[t,\boldsymbol{q}(t)], \tag{22}$$

یا

$$\{\mathrm{D}\,[\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{q})]\}\{\tilde{\mathcal{O}}^0[t,\boldsymbol{q}(t)]\} = \{\dot{\tilde{\mathcal{O}}}^0[t,\boldsymbol{q}(t)]\}^{-1}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{O}}}}[t,\boldsymbol{q}(t)], \tag{23}$$

میگوییم $\tilde{\mathcal{O}}$ یک تقارن ِ نقطه‌ای یِ کنش (در فضایِ‌پیکربندی‌یِ گسترش-یافته) است، اگر $\tilde{\mathcal{O}}$ یک نگاشت ِ وارونپذیر از فضایِ‌پیکربندی‌یِ گسترش-یافته به فضایِ‌پیکربندی‌یِ گسترش-یافته باشد، با اثردادن ِ خُد َش بر مسیر لگرانژی تغییر نکند، و با اثردادن ِ وارون َش بر مسیر هم لگرانژی تغییر نکند. این که تقارن ِ $\tilde{\mathcal{O}}$ لگرانژی در فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته را عوض نمیکند، نتیجه میدهد لگرانژی در فضایِ‌پیکربندی یِ معمول چنین تغییر میکند.

$$\dot{\tilde{\mathcal{O}}}^0(t,\boldsymbol{q})\,L\{\tilde{\mathcal{O}}^0(t,\boldsymbol{q}),\tilde{\boldsymbol{\mathcal{O}}}(t,\boldsymbol{q}),[\dot{\tilde{\mathcal{O}}}^0(t,\boldsymbol{q})]^{-1}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{O}}}}(t,\boldsymbol{q})\}=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \qquad (24)$$

از این نتیجه میشود

$$\int_{\tilde{\mathcal{O}}^0[t_1,\boldsymbol{q}(t_1)]}^{\tilde{\mathcal{O}}^0[t_2,\boldsymbol{q}(t_2)]}\mathrm{d}T\;L\Big(T,[\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{q})](T),\{\mathrm{D}\,[\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{q})]\}(T)\Big)=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\;L[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]. \qquad (25)$$

این یعنی کنش در بازه یِ زمانی یِ تبدیل-شده، برا یِ مسیر ِ تبدیل-شده، هم ان کنش ِ قبلی است.

میگوییم $\tilde{\mathcal{O}}$ یک خانواده یِ یکپارامتری (یِ مشتقپذیر) نگاشتها یِ وارونپذیر است، اگر $\tilde{\mathcal{O}}$ تابع ی یکمتغیری باشد که نسبت به متغیر َش مشتقپذیر است، مقدار َش (به ازا یِ بازه ای از متغیر) وارونپذیر است، و به ازا یِ مقدار ی از متغیر (در آن بازه) همانی است. مقدار ی از متغیر (پارامتر) را که در آن $\tilde{\mathcal{O}}$ همانی میشود، بدون ِ کاستن از کلیت ِ مسئله صفر میگیریم. مولد ِ متناظر با این خانواده را با $\tilde{G}$ نشان میدهیم:

$$[\tilde{\mathcal{O}}^\mu(s)](q)=q^\mu+s\,\tilde{G}^\mu(q)+o(s). \qquad (26)$$

متناظر با $\tilde{\mathcal{O}}$ که یک خانواده یِ یکپارامتری یِ نگاشتها یِ وارونپذیر از فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته به فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته است، یک خانواده یِ یکپارامتری یِ نگاشتها از خمها یِ فضا یِ پیکربندی به خمها یِ فضا یِ فضا یِ پیکربندی هست، که آن را با $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ نشان میدهیم. $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ مثل ِ (21) تعریف میشود. از اینجا دیده میشود

$$[\mathcal{O}^i(\boldsymbol{q})](t)=q^i+s\,\{\tilde{G}^i[t,\boldsymbol{q}(t)]-\tilde{G}^0[t,\boldsymbol{q}(t)]\,\dot{q}^i(t)\}+o(s). \qquad (27)$$

به این ترتیب $\boldsymbol{G}$ (مولد ِ متناظر با $\boldsymbol{\mathcal{O}}$) چنین میشود.

$$\boldsymbol{G}=\tilde{\boldsymbol{G}}-\tilde{G}^0\,\dot{\boldsymbol{q}}. \qquad (28)$$

میگوییم $\tilde{O}$ یک خانواده یِ یکپارامتری یِ تقارنها (یِ مشتقپذیر) است، اگر $\tilde{O}$ یک خانواده یِ یکپارامتری (یِ مشتقپذیر) نگاشتها یِ وارونپذیر باشد، که مقدار َش تقارن است. متناظر با خانواده یِ یکپارامتری یِ $\tilde{O}$ از تقارنها یک ثابت ِ حرکت به دست میآید. این ثابت را با $\tilde{I}$ نشان میدهیم. داریم

$$\tilde{I} = p_\mu\,\tilde{G}^\mu. \tag{29}$$

از گذاشتن ِ (26) در (24) نتیجه میشود

$$L\,\dot{\tilde{G}}^0 + \frac{\partial L}{\partial t}\,\tilde{G}^0 + \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\tilde{G}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,(\dot{\tilde{G}}^i - \dot{\tilde{G}}^0\,\dot{q}^i) = 0, \tag{30}$$

که میشود آن را نوشت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\,\tilde{G}^0) + \frac{\partial L}{\partial q^i}\,(\tilde{G}^i - \tilde{G}^0\,\dot{q}^i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,(\dot{\tilde{G}}^i - \dot{\tilde{G}}^0\,\dot{q}^i - \tilde{G}^0\,\ddot{q}^i) = 0, \tag{31}$$

که با استفاده از (28) میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\,\tilde{G}^0) + \frac{\partial L}{\partial q^i}\,G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{G}^i = 0. \tag{32}$$

این یعنی $\boldsymbol{G}$ مولد ِ یک تقارن است، که ثابتِحرکت ِ متناظر با آن I است:

$$I = p_i\,G^i + L\,\tilde{G}^0. \tag{33}$$

از (28) نتیجه میشود

$$I = p_i\,\tilde{G}^i + (L - p_i\,\dot{q}^i)\,\tilde{G}^0, \tag{34}$$

که با استفاده از (12) تا (14) نتیجه میدهد

$$I = p_i\,\tilde{G}^i + \tilde{p}_0\,\tilde{G}^0, \tag{35}$$

یعنی

$$I = \tilde{I}. \tag{36}$$

خانواده ای که مولد َش $\tilde{G}$ است، یک خانواده یِ نگاشتها یِ درونی (نقطه‌ای) در فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته است. هم ین خانواده متناظر است با یک خانواده یِ نگاشتها یِ مخلوط در فضا یِ پیکربندی (نگاشت، هم بر متغیرها یِ دینامیکی اثر میکند و هم بر پارامتر ِ تحول، یعنی نگاشتها یی از مسیرها یِ فضا یِ پیکربندی به مسیرها یِ فضا یِ پیکربندی)، که مولد َش $\boldsymbol{G}$ است. اگر خانواده یِ اول تقارن باشد خانواده یِ دوم هم چنین است. اما ثابتِ‌حرکت ی که از این 2 خانواده به دست می‌آید یکسان است.

$\mathcal{P}$ را نگاشت ی از خمها یِ فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته به خمها یِ فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته بگیرید، که

$$[\mathcal{P}(q)][\mathcal{P}^{\tau}(\tau)] = q(\tau). \tag{37}$$

از ترکیب ِ این با (9) نتیجه میشود

$$\tilde{L}[q(\tau), q'(\tau)] = (\mathcal{P}^{\tau})'(\tau)\, \tilde{L}\Big([\mathcal{P}(q)][\mathcal{P}^{\tau}(\tau)], \{\mathrm{D}\,[\mathcal{P}(q)]\}[\mathcal{P}^{\tau}(\tau)]\Big). \tag{38}$$

این رابطه کاملَن مشابه با (24) است، جز این که (38) در فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته نوشته شده. اگر $\mathcal{P}$ یک خانواده یِ یک‌پارامتری با مولد ِ K باشد، کاملَن مشابه با آن چه در رسیدن به (31) به کار رفت نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tilde{L}\,K^{\tau}) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{\mu}}\,(-K^{\tau}\,q^{\mu\prime}) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^{\mu\prime}}\,(-K^{\tau\prime}\,q^{\mu\prime} - K^{\tau}\,q^{\mu\prime\prime}) = 0, \tag{39}$$

که قاعدتَن نتیجه میدهد J ثابت ِ حرکت است:

$$J := \tilde{p}_{\mu}\,(-K^{\tau}\,q^{\mu\prime}) + \tilde{L}\,K^{\tau}. \tag{40}$$

داریم

$$\begin{aligned} -\tilde{p}_{\mu}\,q^{\mu\prime} + \tilde{L} &= (-\tilde{p}_0 - p_i\,\dot{q}^i + L)\,t', \\ &= (H - p_i\,\dot{q}^i + L)\,t', \\ &= 0, \end{aligned} \tag{41}$$

که نتیجه میدهد J صفر است. انتظار هم نمیرفت ثابتِ‌حرکت ی بیش از آن چه احتمالَن از فضا یِ پیکربندی نتیجه میشد به دست آید. پارامتر ِ دینامیکی یِ τ در کنش وارد نمیشود، به این معنی که با تغییر ِ آن (به هر شکل ِ وارونپذیر و هموار ی) کنش تغییر نمیکند. پس تقارن ی که در کنش (در فضایِ‌پیکربندی یِ گسترش-یافته) هست، یک تقارن ِ پیمانه‌ای است (K^τ یک تابع ِ دلبخاه از τ است). چنین-تقارن ی به وجود ِ ثابتِ‌حرکت نمی‌انجامد، به وجود ِ یک اتحاد ِ پیمانه‌ای در معادلات ِ حرکت می‌انجامد [3].

3 همیلتنی، معادلات ِ حرکت

معادلات ِ حرکت در فضایِ‌فاز ِ معمول این است.

$$\dot{x}^a = J^{a\,b}\,\frac{\partial H}{\partial x^b}, \tag{42}$$

که H تابع ِ فضا یِ فاز و احتمالَن زمان است. معادلات ِ حرکت در فضایِ‌فاز ِ گسترش-یافته میشوند

$$x^{\alpha\,\prime} = J^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^\beta}, \tag{43}$$

یا به شکل ِ بازشده

$$x^{a\,\prime} = J^{a\,b}\,\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^b}, \tag{44}$$

$$t' = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_0}, \tag{45}$$

$$p_0' = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}, \tag{46}$$

که $\tilde{H}$ تابع ی از فضایِ‌فاز ِ گسترش-یافته است.

این که (44) و (45) به (42) بینجامد نتیجه میدهد

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^b} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_0}\,\frac{\partial H}{\partial x^b}. \tag{47}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{d}\tilde{H} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_0}\,\left(\frac{\partial H}{\partial x^b}\,\mathrm{d}x^b + \mathrm{d}p_0\right) + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\,\mathrm{d}t, \tag{48}$$

یا

$$\mathrm{d}\tilde{H} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_0}\,\mathrm{d}(H + p_0) + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_0}\,\frac{\partial H}{\partial t}\right)\,\mathrm{d}t, \tag{49}$$

که نتیجه میدهد $\tilde{H}$ تابع ی از 2 متغیر ِ $(H + p_0)$ و t است:

$$\tilde{H}(x) = h[H(t, \boldsymbol{x}) + p_0, t]. \tag{50}$$

h یک نگاشت ِ هموار ِ دلبخاه است، با این شرط که مشتق َش نسبت به متغیر ِ اول َش صفر نشود.
معادلات ِ حرکت میشوند

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}\tau} = J^{a\,b}\,(\mathrm{D}_1 h)\,\frac{\partial H}{\partial x^b}, \tag{51}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{D}_1 h, \tag{52}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\tau} = -(\mathrm{D}_1 h)\,\frac{\partial H}{\partial t} - \mathrm{D}_2 h. \tag{53}$$

از جمله برا یِ $\tilde{H}$ انتخاب ِ ساده یِ $\tilde{H}_{\mathrm{s}}$ هست که

$$\tilde{H}_{\mathrm{s}}(x) := H(t, \boldsymbol{x}) + p_0. \tag{54}$$

با این انتخاب، مشتق ِ t نسبت به پارامتر ِ تحول (τ) یک میشود. یعنی میشود τ را هم ان t گرفت.

4 همیلتنی، تقارنها

نگاشت ِ وارونپذیر ِ $\tilde{\mathcal{C}}$ از فضایِفاز ِ گسترش-یافته به فضایِفاز ِ گسترش-یافته را در نظر بگیرید. میگوییم $\tilde{\mathcal{C}}$ کانُنیک است، اگر به ازا یِ هر دُنگاشت ِ اسکالر ِ A و B از فضایِفاز ِ گسترش-یافته

$$\{A \circ \tilde{\mathcal{C}}, B \circ \tilde{\mathcal{C}}\}_{\mathrm{ext}} = (\{A, B\}_{\mathrm{ext}}) \circ \tilde{\mathcal{C}}. \tag{55}$$

با تعریف ِ

$$X^\alpha := \tilde{\mathcal{C}}^\alpha(x), \tag{56}$$

دیده میشود

$$\{A\circ\tilde{\mathcal{C}}, B\circ\tilde{\mathcal{C}}\}_{\rm ext}=[(\mathrm{D}_\alpha A)\circ\tilde{\mathcal{C}}]\,[(\mathrm{D}_\beta B)\circ\tilde{\mathcal{C}}]\,\{X^\alpha, X^\beta\}_{\rm ext}, \tag{57}$$

که نتیجه میدهد (55) هم‌ارز ِ آن است که

$$\{X^\alpha, X^\beta\}_{\rm ext}=J^{\alpha\,\beta}. \tag{58}$$

نگاشت ِ کانُنیک ِ وابسته‌به‌زمان ِ $\mathcal{C}$ در فضایِ‌فاز ِ معمول را در نظر بگیرید. با این نگاشت میشود یک نگاشت ِ کانُنیک در فضایِ‌فاز ِ گسترش-یافته ساخت. این نگاشت را $\tilde{\mathcal{C}}$ نمایش میدهیم، که

$$\tilde{\mathcal{C}}^0(p_0, t, \boldsymbol{x}):=t, \tag{59}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^a(p_0, t, \boldsymbol{x}):=\mathcal{C}^a(t, \boldsymbol{x}). \tag{60}$$

تعریف ِ $\tilde{\mathcal{C}}^{-1}$ باقی میمانَد. برا یِ این کار یک نگاشت ِ سازنده (F) برا یِ $\mathcal{C}$ میگیریم. یک دسته مختصه شامل ِ N تا از مختصات ِ قدیم و N تا از مختصات ِ جدید هست که N تا یِ اول با هم و N تا یِ دوم هم با هم پووَسُنی اند. با یک نگاشت ِ کانُنیک ِ ساده میشود N تا یِ اول را مکان ِ قدیم، و N تا یِ دوم را نکانه یِ جدید کرد. به این ترتیب، بدون ِ کاستن از کلیت، میشود F را از نُع ِ دوم گرفت، یعنی آن را تابع ِ مکان ِ قدیم $(\boldsymbol{q})$، و تکانه یِ جدید $(\boldsymbol{p})$، و البته زمان گرفت. داریم

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial q^i}, \tag{61}$$

$$Q^i=\frac{\partial F}{\partial P_i}, \tag{62}$$

که $\boldsymbol{Q}$ و $\boldsymbol{P}$ به ترتیب مکان و تکانه یِ جدید اند. اینها را میشود در [4] یافت. هدف یافتن $\tilde{\mathcal{C}}^{-1}$ است، چنان که $\tilde{\mathcal{C}}$ کانُنیک شود. برا یِ این کار سازنده یِ $\tilde{F}$ را در نظر میگیریم که $(p_0, t, \boldsymbol{x})$ را به $(P_0, t, \boldsymbol{X})$ تبدیل میکند. این سازنده را هم از نُع ِ دوم میگیریم. پس، متغیرها یِ $\tilde{F}$ را $(P_0, t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{P})$ میگیریم.

داریم

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q^i}, \tag{63}$$

$$Q^i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_i}, \tag{64}$$

$$t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P_0}, \tag{65}$$

$$p_0 = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}. \tag{66}$$

از (61) تا (65) نتیجه میشود

$$\tilde{F}(P_0, t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = P_0\, t + F(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) + f(t), \tag{67}$$

که f دلبخاه است. یک انتخاب ِ ساده این است که f را صفر بگیریم. با این انتخاب، از (67) و (66) نتیجه میشود

$$p_0 = P_0 + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{68}$$

مستقیمَن هم میشود نشان داد $\tilde{\mathcal{C}}$ که با (59) و (60) و

$$\tilde{\mathcal{C}}^{-1}(p_0, t, \boldsymbol{x}) := p_0 - (\mathrm{D}_1 F)[t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mathcal{C}}_2(t, \boldsymbol{x})] \tag{69}$$

تعریف میشود یک نگاشت ِ کانُنیک است. $\boldsymbol{\mathcal{C}}_2$ در (69) چنین تعریف میشود.

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{2\,i} := \boldsymbol{\mathcal{C}}^{N+i}. \tag{70}$$

برا یِ نشان-دادن ِ این که $\tilde{\mathcal{C}}$ کانُنیک است، کافی است نشان دهیم کروشه‌یِ‌پووَسُن [1] ِ گسترش-یافته یِ P_0 با مکانها و تکانه‌ها یِ جدید و با زمان درست است. این که بقیه یِ کروشه‌یِ‌پووَسُن [1] ها درست اند، از آن نتیجه میشود که $\mathcal{C}$ کانُنیک است. داریم

$$\begin{aligned}\{t, P_0\}_{\text{ext}} &= \{t, p_0\}_{\text{ext}} - \{t, (\mathrm{D}_1 F)[t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mathcal{C}}_2(t, \boldsymbol{x})]\}_{\text{ext}},\\ &= 1.\end{aligned} \tag{71}$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
\{P_i, P_0\}_{\mathrm{ext}} &= \{P_i, P_0\},\\
&= \{P_0, p_0\} - \{P_i, q^j\}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^j\,\partial t},\\
&= \left(\frac{\partial P_i}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}} + \left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\right)_{t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}} \left(\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= -\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}} \left(\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} + \left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^i}\right)_{t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}} \left(\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= \left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\right)_{t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}} \left[-\left(\frac{\partial Q^k}{\partial q^l}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_l}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}} + \delta_i^k\right] \left(\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= \left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\right)_{t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}} \left[-\frac{\partial^2 F}{\partial q^l\,\partial P_k} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_l}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}} + \delta_i^k\right] \left(\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= \left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\right)_{t,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}} \left[-\left(\frac{\partial p_l}{\partial P_k}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_l}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}} + \delta_i^k\right] \left(\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

سرانجام،

$$
\begin{aligned}
\{Q^i, P_0\}_{\mathrm{ext}} &= \left(\frac{\partial Q^i}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \{t, P_0\}_{\mathrm{ext}} + \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \{q^j, P_0\}_{\mathrm{ext}}\\
&\quad + \left(\frac{\partial Q^i}{\partial P_j}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \{P_j, P_0\}_{\mathrm{ext}},\\
&= \left(\frac{\partial Q^i}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} - \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \left\{q^j, \frac{\partial F}{\partial t}\right\},\\
&= \left(\frac{\partial Q^i}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} - \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \{q^j, P_k\}\,\frac{\partial^2 F}{\partial P_k\,\partial t},\\
&= \left[\delta_k^i - \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}} \{q^j, P_k\}\right] \left(\frac{\partial Q^k}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= \left[\delta_k^i - \{Q^i, P_k\}\right] \left(\frac{\partial Q^k}{\partial t}\right)_{t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{P}},\\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{73}
$$

اگر $\tilde{\mathcal{C}}$ یک خانواده یِ یکپارامتری از نگاشتها یِ کانُنیک در فضایِفاز ِ گسترش-یافته باشد، یک

نگاشت ِ اسکالر ِ $\tilde{\mathcal{G}}$ از فضایِفاز ِ گسترش-یافته هست که

$$\tilde{\mathcal{C}}^\alpha(x) = x^\alpha + s\,\{x^\alpha, \tilde{\mathcal{G}}\}_{\rm ext} + o(s). \qquad (74)$$

وقت ی $\tilde{\mathcal{C}}$ یک خانواده یِ یکپارامتری از نگاشتها یِ کانُنیک در فضایِفاز ِ گسترش-یافته است که با (59)، (60)، و (69) به یک خانواده یِ یکپارامتری از نگاشتها یِ کانُنیک وابسته‌به‌زمان ِ $\mathcal{C}$ (در فضایِفاز ِ معمول) مربوط است، از این که $\tilde{\mathcal{C}}$ مقدار ِ t را عوض نمیکند نتیجه میشود

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{G}}}{\partial p_0} = 0. \qquad (75)$$

پس یک نگاشت ِ اسکالر ِ وابسته‌به‌زمان ِ $\mathcal{G}$ از فضایِفاز ِ معمول هست که

$$\mathcal{G}(t, \boldsymbol{x}) := \tilde{\mathcal{G}}(p_0, t, \boldsymbol{x}). \qquad (76)$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{C}^a = x^a + s\,\{x^a, \mathcal{G}\} + o(s). \qquad (77)$$

$\tilde{\mathcal{G}}$ و $\mathcal{G}$ را مولد ِ خانواده یِ به ترتیب $\tilde{\mathcal{C}}$ و $\mathcal{C}$ مینامیم.

نگاشت ِ $\tilde{\mathcal{C}}$ از فضایِفاز ِ گسترش-یافته به فضایِفاز ِ گسترش-یافته را در نظر بگیرید. داریم

$$\frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \{X^\alpha, X^\beta\}\,\frac{\partial\tilde{H}(x)}{\partial X^\beta} \qquad (78)$$

اگر $\tilde{\mathcal{C}}$ کانُنیک باشد و

$$\tilde{H}\circ\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{H}, \qquad (79)$$

میگوییم $\tilde{\mathcal{C}}$ یک تقارن ِ همیلتنی است. در این حالت

$$\frac{\mathrm{d}X^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = J^{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial\tilde{H}(X)}{\partial X^\beta}, \qquad (80)$$

که یعنی اگر خم ِ x یک جواب ِ معادلات ِ حرکت باشد، خم ِ $\tilde{\mathcal{C}}\circ x$ هم یک جواب ِ معادلات ِ حرکت است. به ساده‌گی دیده میشود در این حالت خم ِ $\tilde{\mathcal{C}}^{\rm inv}\circ x$ هم یک جواب ِ معادلات ِ حرکت است.

وقت ی $\tilde{\mathcal{C}}$ یک تقارن ِ همیلتنی است که با (59)، (60)، و (69) به نگاشت ِ کانُنیک ِ وابسته‌به‌زمان ِ $\mathcal{C}$ مربوط است، از (50) و (79) نتیجه میشود

$$h[H(t,\boldsymbol{X})+P_0,t]=h[H(t,\boldsymbol{x})+p_0,t], \tag{81}$$

که با استفاده از (68) نتیجه میدهد

$$H(t,\boldsymbol{X})=H(t,\boldsymbol{x})+\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{82}$$

که F سازنده یِ $\mathcal{C}$ است.

فرض کنید $\tilde{\mathcal{C}}$ یک خانواده یِ یکپارامتری یِ تقارنها یِ همیلتنی در فضایِ‌فاز ِ گسترش-یافته است، که مولد َش $\tilde{\mathcal{G}}$ است. از (74) و (79) نتیجه میشود

$$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial x^\alpha}\,\{x^\alpha,\tilde{\mathcal{G}}\}=0, \tag{83}$$

یا

$$\{\tilde{\mathcal{G}},\tilde{H}\}_{\rm ext}=0, \tag{84}$$

یعنی $\tilde{\mathcal{G}}$ ثابت ِ حرکت است. رُشن است که این استنتاج دُطرفه است. یعنی $\tilde{\mathcal{G}}$ مولد ِ یک خانواده یِ یکپارامتری یِ تقارنها یِ همیلتنی در فضایِ‌فاز ِ گسترش-یافته است، اگر و تنها اگر ثابت ِ حرکت باشد.

سرانجام، اگر $\tilde{\mathcal{C}}$ یک خانواده یِ یکپارامتری یِ تقارنها یِ همیلتنی در فضایِ‌فاز ِ گسترش-یافته باشد که با (59)، (60)، و (69) به یک خانواده یِ یکپارامتری یِ نگاشتها یِ کانُنیک ِ وابسته‌به‌زمان ِ $\mathcal{C}$ مربوط است، از گذاشتن ِ (50) در (84) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}0&=\{\tilde{\mathcal{G}},\tilde{H}\}_{\rm ext},\\&=(\mathrm{D}_1h)\,\{\tilde{\mathcal{G}},H+p_0\}_{\rm ext},\\&=(\mathrm{D}_1h)\,\left(\{\mathcal{G},H\}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{85}$$

که نتیجه میدهد

$$\{\mathcal{G},H\}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}=0, \tag{86}$$

یعنی $\mathcal{G}$ یک ثابت ِ حرکت است. اینجا هم رُشن است که استنتاج دُطرفه است: $\mathcal{G}$ مولد ِ یک خانواده ی ِ یکپارامتری ی ِ تقارنها ی ِ وابسته‌زمان ِ همیلتنی در فضای ِفاز ِ معمول است، اگر و تنها اگر ثابت ِ حرکت باشد.

خُد ِ $\tilde{H}$ هم یک خانواده ی ِ یکپارامتری ی ِ تقارنها ی ِ همیلتنی در فضای ِفاز ِ گسترش-یافته است، چون کروشه ی ِ پووَسُن [1]َش با $\tilde{H}$ صفر میشود. پس $\tilde{H}$ ثابت است. اما با ثابت-بودن ِ $\tilde{H}$ رابطه ی ِ جدید ی بین ِ زمان و مختصات ِ فضای ِفاز ِ معمول به دست نمی‌آید. ثابت-بودن ِ $\tilde{H}$ فقط مقدار ِ p_0 را بر حسب ِ زمان و مختصات ِ فضای ِفاز ِ معمول میدهد. از جمله با انتخاب ِ ساده ی ِ (54) نتیجه میشود $(H + p_0)$ ثابت است. این ثابت را صفر هم میشود گرفت.

5 پانوشتها

[1] Poisson

[2] محمد خرمی؛ «تقارن و فرمولبندی ی ِ لگرانژی I» (2003/03/21) X1-015

[3] محمد خرمی؛ «تقارن و فرمولبندی ی ِ لگرانژی II» (2003/05/12) X1-016

[4] Vladimir Igorevich Arnold; "mathematical methods of classical mechanics" 2nd edition (Springer Verlag, 1989) chapter 9