X1-075 (2011/04/29)

حضیض ِ زمین در مدار ِ خُرشید

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

تفاوت ِ حضیض ِ زمین در مدار ِ خُرشید، با حضیض ِ دستگاه ِ زمین-ماه در مدار ِ خُرشید بررسی میشود. اختلاف ِ زمانی یِ این دُ رویداد محاسبه میشود.

1 حرکت ِ یک دستگاه ِ پکیده در یک میدان ِ گرانشی یِ ایستا

جسمها یِ 1 تا n در میدان ِ گرانشی یِ $\boldsymbol{g}$ حرکت میکنند. جرم و بردارِمکان ِ جسم ِ i را با به ترتیب m_i و $\boldsymbol{r}_i$ نمایش میدهیم. جرم ِ کل را با m، و بردارِمکان ِ مرکزِجرم را با $\boldsymbol{r}_{\rm cm}$ نمایش میدهیم. بردارها یِ نسبت به چارچوب ِ مرکزِجرم را هم با علامت ِ پریم بر بردارها یِ متناظر نشان میدهیم. داریم

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{r}_{\rm cm}=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{r}_i\right), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}'_i=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{\rm cm}. \tag{3}$$

این تقریب که $\boldsymbol{g}$ ایستا باشد متناظر است با این که سازنده یِ این میدان بسیار پرجرمتر از ذرات ِ

دستگاه است (و در نتیجه تقریبَن ساکن است). یک مثال دستگاه ِ دُجسمی یِ زمین و ماه در میدان ِ گرانشی یِ خُرشید است.

معادله یِ حرکت برا یِ ذره یِ i میشود

$$m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{f}_i + m_i\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_i), \tag{4}$$

که $\boldsymbol{f}_i$ نیرو یِ درونی یِ وارد بر ذره یِ i است (که از طرف ِ ذره‌ها یِ دیگر ِ دستگاه به آن وارد میشود). نقطه هم مشتق‌گیری نسبت به t (زمان) است. از شکل ِ ضعیف ِ قانون ِ سه‌وم ِ نیوتُن [1] نتیجه میشود

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i = 0. \tag{5}$$

به این ترتیب از (4) نتیجه میشود

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_i). \tag{6}$$

طرف ِ چپ ِ این رابطه حاصلِ‌ضرب ِ جرم در شتاب ِ مرکزِجرم است. اما طرف ِ راست تابع ِ مکان ِ تک‌تک ِ ذرات است. داریم

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_i) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{\rm cm} + \boldsymbol{r}'_i),\\ &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{\rm cm}) + [(\boldsymbol{r}'_i\cdot\nabla)\boldsymbol{g}](\boldsymbol{r}_{\rm cm}) + O\left[\left(\frac{|\boldsymbol{r}'_i|}{L}\right)^2\,|\boldsymbol{g}|\right],\end{aligned} \tag{7}$$

که L طول ِ مشخصه یِ تغییرات ِ $\boldsymbol{g}$ است:

$$[(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)^k\boldsymbol{g}] \sim \left(\frac{|\boldsymbol{a}|}{L}\right)^k\,|\boldsymbol{g}|. \tag{8}$$

از (2) و (3) دیده میشود

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{r}'_i = 0. \tag{9}$$

به این ترتیب از (6) و (7) نتیجه میشود

$$m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm} = m\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{\rm cm}) + O\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{|\boldsymbol{r}'_i|}{L}\right)^2\,|\boldsymbol{g}|\right], \tag{10}$$

یا

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{\rm cm}) + O\left(\frac{I'}{m\,L^2}\,|\boldsymbol{g}|\right), \tag{11}$$

که

$$I' := \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{r}'_i \cdot \boldsymbol{r}'_i. \tag{12}$$

I' گشتاور ِ دوم ِ جرم ِ دستگاه نسبت به مرکزِجرم است، که از مرتبه یِ مثلفه‌ها یِ لختی یِ دورانی نسبت به مرکزِجرم است. با شرط ِ

$$I' \ll (m\,L^2), \tag{13}$$

میشود از جمله یِ دوم در (11) چشم پوشید. در این صورت معادله یِ حرکت ِ مرکزِجرم به این شکل ِ ساده در می‌آید.

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{\rm cm} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_{\rm cm}). \tag{14}$$

دیده میشود با این تقریب معادله یِ حرکت ِ مرکزِجرم خُدگردان است، هر چند شتاب ِ مرکزِجرم صفر نیست.

از (4) و (6) نتیجه میشود

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_i = \frac{1}{m_i}\,\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_i) - \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_j), \tag{15}$$

که با استفاده از (7) میشود

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}'_i = \frac{1}{m_i}\,\boldsymbol{f}_i &+ \left\{\left[\left(\boldsymbol{r}'_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m}\,\boldsymbol{r}'_j\right)\cdot\nabla\right]\boldsymbol{g}\right\}(\boldsymbol{r}_{\rm cm})\\ &+ O\left(\frac{r'^2_i}{L^2}\,|\boldsymbol{g}|\right) + O\left(\frac{I'}{m\,L^2}\,|\boldsymbol{g}|\right).\end{aligned} \tag{16}$$

با شرط ِ

$$r'_i \ll L, \tag{17}$$

که (13) را هم در بر دارد، میشود از دُجمله یِ آخر ِ طرف ِ راست ِ (16) چشم پوشید. در این صورت

$$\ddot{\boldsymbol{r}}'_i = \frac{1}{m_i}\,\boldsymbol{f}_i + \left\{\left[\left(\boldsymbol{r}'_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{m}\,\boldsymbol{r}'_j\right)\cdot\nabla\right]\boldsymbol{g}\right\}(\boldsymbol{r}_{\rm cm}). \tag{18}$$

دستگاه ی که (17) را برآورَد را یک دستگاه ِ پکیده مینامیم. معادلات ِ حرکت برا یِ یک دستگاه ِ پکیده در یک میدان ِ گرانشی یِ ایستا (14) و (18) اند. دیده میشود در این حالت معادله یِ حرکت ِ

مرکزِجرم، تا حد ِ اولین جمله بعد از جمله ی ِ غالب هم خُدگردان است. اما مرکزِجرم در اولین جمله بعد از جمله ی ِ غالب، در معادلات ِ حرکت ِ بردارها ی ِ مکان نسبت به مرکزِجرم وارد میشود.

برا ی ِ یک دستگاه ِ دُجسمی، جرم ِ کاسته را با μ و مکان ِ نسبی را با $\boldsymbol{r}$ نمایش میدهیم. داریم

$$\mu = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\boldsymbol{r}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\boldsymbol{r}. \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mu}\,\boldsymbol{f}_2 + [(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}](\boldsymbol{r}_{\rm cm}) + O\left(\frac{r'^2_2 - r'^2_1}{L^2}\,|\boldsymbol{g}|\right). \tag{23}$$

اینجا هم با شرط ِ

$$|r'^2_2 - r'^2_1| \ll L^2, \tag{24}$$

میشود از جمله ی ِ آخر در (23) چشم پوشید. در این صورت (23) میشود

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mu}\,\boldsymbol{f}_2 + [(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}](\boldsymbol{r}_{\rm cm}). \tag{25}$$

پس برا ی ِ یک دستگاه ِ دُجسمی ی ِ پکیده در یک میدان ِ گرانشی ی ِ ایستا، معادله ی ِ حرکت ِ مرکز ِ جرم تا حد ِ اولین جمله بعد از جمله ی ِ غالب خُدگردان است، اما در معادله ی ِ حرکت ِ مکان ِ نسبی، در اولین جمله بعد از جمله ی ِ غالب مرکزِجرم ظاهر میشود. در حد ِ فقط جمله ی ِ غالب، معادله ی ِ حرکت ِ مکان ِ نسبی هم خُدگردان است.

بخش ی از این بحث در مثلَن بخش ِ 7-4 از [2] آمده است.

2 زمین و ماه در میدان ِ گرانشی یِ خُرشید

در دستگاه ِ زمین و ماه، جسم ِ 1 را زمین و جسم ِ 2 را ماه میگیریم. جرم ِ خُرشید را با m_0 نشان میدهیم، و مبدئ را خُرشید میگیریم. از [3] داریم

$$\begin{aligned} m_0 &= 2.0 \times 10^{30}\ \mathrm{kg}, \\ m_1 &= 6.0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}, \\ m_2 &= 7.3 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}, \end{aligned} \tag{26}$$

و

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{cm}} &= 1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}, \\ r &= 3.8 \times 10^{8}\ \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{27}$$

با این مقدارها، معلوم میشود

$$\begin{aligned} g(r_{\mathrm{cm}}) &= 5.9 \times 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \\ \frac{I'}{m\, r_{\mathrm{cm}}^2} &= 7.6 \times 10^{-8}, \\ \frac{1}{\mu}\, f_2 &= 2.7 \times 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \\ \frac{r}{r_{\mathrm{cm}}} &= 2.5 \times 10^{-3}, \\ \frac{m_2}{m_1 + m_2} &= 1.2 \times 10^{-2}. \end{aligned} \tag{28}$$

L هم ان r_{cm} است. البته r_{cm} و r ثابت نیستند. اما تغییر ِ اینها مرتبه یِ شتابها و نسبتها را عوض نمیکند.

مکان ِ زمین میشود

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \boldsymbol{r}. \tag{29}$$

دیده میشود چشمپوشی از جمله یِ دوم در طرف ِ راست ِ (11) به معنی یِ چشمپوشی از شتاب ی از مرتبه یِ A_1، و چشمپوشی از جمله یِ دوم در طرف ِ راست ِ (25) به معنی یِ چشمپوشی از شتاب ی

از مرتبه ی ِ A_2 در شتاب ِ زمین است، که

$$A_1 = \frac{I'}{m\, r_{\rm cm}^2}\, g(r_{\rm cm}),$$
$$= 4.5 \times 10^{-10}\ \frac{\rm m}{\rm s^2}, \tag{30}$$

و

$$A_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, \frac{r}{r_{\rm cm}}\, g(r_{\rm cm}),$$
$$= 1.8 \times 10^{-7}\ \frac{\rm m}{\rm s^2}. \tag{31}$$

دومی بزرگتر است. اما هم ین شتاب هم طی ِ زمان ی از مرتبه ی ِ روز جابه‌جایی ی ِ اضافی یی از مرتبه ی ِ کیلومتر میسازد. به این ترتیب، برا ی ِ بررسی ی ِ حرکت ِ زمین از این شتابها چشم میپوشیم. در این صورت معادلات ِ حاکم بر حرکت ِ زمین میشوند (14) و

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\mu}\, \boldsymbol{f}_2, \tag{32}$$

که شکل ِ تقریبیتر ِ (25) است. جمله ی ِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (25) (که از آن چشم پوشیده شده)، چند هزارم ِ جمله ی ِ اول طرف ِ راست ِ (25) است.

3 حضیض ِ زمین

مرکز ِ جرم ِ دستگاه ِ ماه و زمین رو ی ِ یک بیضی حرکت میکند که یک کانون ِ آن خُرشید است. معادله ی ِ این مسیر چنین است (مثلَن بخش ِ 14-3 از [2]).

$$r_{\rm cm} = \frac{a\,(1 - \varepsilon_{\rm cm}^2)}{1 + \varepsilon_{\rm cm}\, \cos\varphi_{\rm cm}}, \tag{33}$$

که $(r_{\rm cm}, \varphi_{\rm cm})$ مختصات ِ قطبی اند، a نیمقطر ِ بزرگ ِ مدار، و $\varepsilon_{\rm cm}$ خروج‌ازمرکز ِ مدار است. به این ترتیب در نزدیکی ی ِ حضیض ِ مرکز ِجرم،

$$r_{\rm cm} = a'\, \left(1 + \frac{\varepsilon_{\rm cm}\, \varphi_{\rm cm}^2}{2}\right) + o(\varepsilon_{\rm cm}, \varphi_{\rm cm}), \tag{34}$$

که a' فاصله ی ِ حضیض ِ مرکز ِجرم تا خُرشید است. حرکت ِ بردار ِ مکان ِ نسبی را به تقریب دایره‌ای میگیریم. نتیجه میشود

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0)\, \cos\omega\, t + \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r}(0)\, \sin\omega\, t, \tag{35}$$

که $\hat{\boldsymbol{n}}$ و ω به ترتیب جهت و مقدار ِ سرعت‌زاویه‌ای ی ِ این حرکت اند. $\hat{\boldsymbol{n}}$ بر $\boldsymbol{r}$ عمود است. داریم

$$r_1(t) = r_{\rm cm}(t) - \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\hat{\boldsymbol{r}}_{\rm cm}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) + o\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right). \qquad (36)$$

به این ترتیب تا اولین مرتبه ی ِ ناصفر نسبت به کمیتها ی ِ کوچک (نسبت ِ جرم ِ ماه به جرم ِ زمین، خروج‌ازمرکز ِ مدار ِ مرکزِجرم، و زاویه نسبت به حضیض)،

$$\begin{aligned} r_1(t) = a'\,&\left(1+\frac{\varepsilon_{\rm cm}\,\varphi_{\rm cm}^2}{2}\right)\\ &-\frac{m_2\,r}{m_1+m_2}\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,t+\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,t]+\cdots, \end{aligned} \qquad (37)$$

که $\hat{\boldsymbol{p}}$ بردار ِ یکه ی ِ جهت ِ حضیض ِ مرکزِجرم است:

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\rm cm}(0), \qquad (38)$$

و زمان ِ حضیض را مبدئ ِ زمان گرفته ایم.

کمینه ی ِ r_1 در τ به دست می‌آید، که

$$\dot{r}_1(\tau) = 0, \qquad (39)$$

$$\ddot{r}_1(\tau) > 0. \qquad (40)$$

از (39) نتیجه میشود

$$\varepsilon_{\rm cm}\,a'\,\Omega^2\,\tau - \frac{m_2\,r\,\omega}{m_1+m_2}\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[-\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,\tau+\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,\tau] = 0, \qquad (41)$$

یا

$$\omega\,\tau - \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{r}{a'}\,\frac{\omega^2}{\Omega^2}\,\frac{1}{\varepsilon_{\rm cm}}\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[-\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,\tau+\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,\tau] = 0, \qquad (42)$$

که Ω سرعت ِ زاویه‌ای ی ِ حرکت ِ مرکزِجرم است. از (40) هم نتیجه میشود

$$1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{r}{a'}\,\frac{\omega^2}{\Omega^2}\,\frac{1}{\varepsilon_{\rm cm}}\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,\tau+\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,\tau] > 0. \qquad (43)$$

از [3] داریم

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rm cm} &= 0.017,\\ \frac{2\,\pi}{\Omega} &= 365\ {\rm d},\\ \frac{2\,\pi}{\omega} &= 27.3\ {\rm d}. \end{aligned} \qquad (44)$$

به این ترتیب رابطه‌ها یِ (42) و (43) میشوند

$$\omega\,\tau - 0.32\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[-\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,\tau + \hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,\tau] = 0, \tag{45}$$

$$1 + 0.32\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,\tau + \hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,\tau] > 0. \tag{46}$$

داریم

$$\begin{aligned}|\hat{\boldsymbol{p}}\cdot[\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\cos\omega\,\tau + \hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{r}}(0)\,\sin\omega\,\tau]| &\le |\cos\omega\tau| + |\sin\omega\tau|,\\ &\le \sqrt{2},\end{aligned} \tag{47}$$

که نشان میدهد (46) برقرار است. پس τ زمان ِ متناظر با ریشه ای از معادله یِ (45) است که از همه به صفر نزدیکتر است.

بردارها یِ یکه یِ $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ و $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ را به این شکل تعریف میکنیم

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 := \frac{(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{p}})\times\hat{\boldsymbol{n}}}{|\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{p}}|}, \tag{48}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 := \frac{\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{p}}}{|\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{p}}|}. \tag{49}$$

$(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{n}})$ یک کنج ِ یکه‌متعامد ِ راستگرد است، که $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ جهت ِ مقابل ِ خُرشید در مدار ِ ماه است (وقت ی دستگاه ِ زمین-ماه در حضیض است). داریم

$$\hat{\boldsymbol{r}}(0) = \hat{\boldsymbol{e}}_1\,\cos\psi + \hat{\boldsymbol{e}}_2\,\sin\psi, \tag{50}$$

که ψ زاویه یِ جهت ِ ماه (از دید ِ زمین) با جهت ِ مقابل ِ خُرشید در مدار ِ ماه است. به این ترتیب (45) میشود

$$\omega\,\tau + 0.32\,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_1\,\sin(\psi + \omega\,\tau) = 0, \tag{51}$$

یا، با استفاده از (48)،

$$\omega\,\tau + 0.32\,|\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{p}}|\,\sin(\psi + \omega\,\tau) = 0. \tag{52}$$

$\hat{\boldsymbol{p}}$ تقریبَن ثابت است، اما $\hat{\boldsymbol{n}}$ چنین نیست. جهت ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ دستگاه ِ زمین-ماه دُر ِ خُرشید را با $\hat{\boldsymbol{z}}$ نشان میدهیم. داریم

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{p}}\,\sin\alpha\,\cos\beta + (\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{p}})\,\sin\alpha\,\sin\beta + \hat{\boldsymbol{z}}\,\cos\alpha, \tag{53}$$

به این ترتیب،

$$\omega\,\tau + 0.32\,\sqrt{1-\sin^2\alpha\,\cos^2\beta}\,\sin(\psi+\omega\,\tau) = 0. \tag{54}$$

از [3] داریم

$$\alpha = 5^\circ, \tag{55}$$

و این که $\hat{\boldsymbol{n}}$ یک پیشروی دُر ِ $\hat{z}$ دارد که دُره اَش 19 y است. از (55) داریم

$$1-\cos\alpha = 0.004, \tag{56}$$

که نتیجه میدهد

$$0.31 \le 0.32\,\sqrt{1-\sin^2\alpha\,\cos^2\beta} \le 0.32. \tag{57}$$

پس تغییر ِ $\hat{\boldsymbol{n}}$ هم چندان مهم نیست. به این ترتیب، (54) به شکل ِ ساده‌تر ِ

$$\omega\,\tau + 0.3\,\sin(\psi+\omega\,\tau) = 0 \tag{58}$$

در می‌آید، که البته دقت ِ محاسبه ی ِ $(\omega\,\tau)$ در آن چند صدُم است. با این دقت، $(\omega\,\tau)$ به ساده‌گی با یک روش ِ تکرار به دست می‌آید:

$$(\omega\,\tau)_k = -+0.3\,\sin[\psi+(\omega\,\tau)_{k-1}], \tag{59}$$

که $(\omega\,\tau)_k$ عبارت ِ تقریبی برا ی ِ $(\omega\,\tau)$ تا مرتبه ی ِ k است. میگیریم

$$(\omega\,\tau)_0 = 0, \tag{60}$$

که نتیجه میدهد

$$(\omega\,\tau)_1 = -0.3\,\sin\psi,$$

$$(\omega\,\tau)_2 = -0.3\,\sin\psi + 0.09\,\sin\psi\,\cos\psi. \tag{61}$$

با توجه به تقریب ِ به‌کاررفته، هم ین تعداد تکرار کافی است. پس

$$(\omega\,\tau) = -0.3\,\sin\psi + 0.09\,\sin\psi\,\cos\psi. \tag{62}$$

از جمله معلوم میشود بیشینه ی ِ انحراف ِ زمان ِ حضیضِ زمین از زمان ِ حضیض ِ مرکزِجرم ِ زمین و ماه به ازا ی ِ ψ_0 رخ میدهد، که

$$\cos\psi_0 = 0.4, \tag{63}$$

و متناظر با آن

$$\omega\,\tau_0 = \pm 0.3, \tag{64}$$

یا

$$\tau_0 = \pm 1.3\,\mathrm{d}. \tag{65}$$

وقت ی ψ برابر با صفر یا π است، زمان ِ حضیض ِ زمین با زمان ِ حضیض ِ دستگاه ِ زمین-ماه یکسان است. ψ برابر ِ صفر متناظر است با این که وقت ی دستگاه ِ زمین-ماه در حضیض است، ماه در حالت ِ بدر است. ψ برابر ِ π هم متناظر است با این که وقت ی دستگاه ِ زمین-ماه در حضیض است، ماه در حالت ِ محاق (نُ) است.

4 پانوشتها

[1] Newton

[2] Keith R. Symon; "mechanics" 3rd edition (Addison-Wesley, 1974)

[3] Kenneth R. Lang; "astrophysical data: planets and stars" (Springer Verlag, 1991)