X1-076 (2011/05/25)

ناورداها یِ بیدررُ، و انرژی یِ آونگ

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

تغییر ِ انرژی یِ آونگ ی بررسی میشود که طول َش به کندی با زمان تغییر میکند. برا یِ این کار، هم محاسبه یِ مستقیم به کار میرود و قضیه یِ ناورداها یِ بیدررُ، که البته به نتایج ِ یکسان ی می‌انجامند.

1 حرکت ِ آونگ ی که طول َش متغیر است

جسم ی به جرم ِ m را در نظر بگیرید، که از نخ ی به طول ِ ℓ آویزان است. جسم در یک صفحه یِ ثابت ِ عمودی حرکت میکند، اما طول ِ نخ تابع ِ زمان است. لگرانژی یِ چنین سیستم ی

$$L = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2 + m\, g\, \ell\, \cos\theta + \frac{1}{2}\, m\, \dot{\ell}^2 \qquad (1)$$

است، که L لگرانژی، g شتاب ِ گرانش، و θ زاویه یِ نخ با راستا یِ عمودی یِ روبه‌پایین است. زمان را با t نشان میدهیم، و $\dot{X}$ مشتق ِ X نسبت به زمان است. E (انرژی یِ این آونگ) میشود

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot{\theta}^2 - m\, g\, \ell\, \cos\theta - \frac{1}{2}\, m\, \dot{\ell}^2. \qquad (2)$$

معادله یِ حرکت برا یِ آونگ میشود

$$\mathcal{E} = 0, \tag{3}$$

که

$$\mathcal{E} := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\ell^2\,\dot{\theta}) - m\,g\,\ell\,\sin\theta. \tag{4}$$

مثلفه یِ شعاعی یِ قانون ِ دوم ِ نیوتُن [1] هم میشود

$$m\,(\ddot{\ell} - \ell\,\dot{\theta}^2) = m\,g\,\cos\theta - T, \tag{5}$$

که T کشش ِ نخ است. البته (5) را با واردکردن ِ یک قید در لَگرانژی هم میشد به دست آورد: به جا یِ L لَگرانژی یِ $\tilde{L}$ را میگیریم

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,r\,\cos\theta + \lambda(r - \ell), \tag{6}$$

که r فاصله یِ جسم تا نقطه یِ آویز، و λ ضریب ِ لَگرانژ [2] است. معادله یِ حرکت برا یِ r میشود

$$-m\,\ddot{r} + m\,r\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,\cos\theta + \lambda = 0, \tag{7}$$

λ مثلفه یِ شعاعی یِ نیرو یِ قیدی است. پس

$$T = -\lambda, \tag{8}$$

که نتیجه میدهد

$$T = m\,(g\,\cos\theta + \ell\,\dot{\theta}^2 - \ddot{\ell}). \tag{9}$$

مشتق ِ زمانی یِ انرژی را میشود مستقیمَن از قضیه یِ کار-انرژی یِ جنبشی، یا از خُد ِ معادله یِ حرکت به دست آورد. از قضیه یِ کار-انرژی یِ جنبشی نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{\ell}^2\right) = -T\,\dot{\ell} + m\,g\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell\,\cos\theta), \tag{10}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t} = -T'\,\dot{\ell}, \tag{11}$$

که

$$E' := \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\theta}^2 - m\,g\,\ell\,\cos\theta, \tag{12}$$

$$T' := m\,(g\,\cos\theta + \ell\,\dot{\theta}^2). \tag{13}$$

2 تغییرِ انرژی با زمان

از (11) نتیجه میشود

$$E'(t+\Delta) - E'(t) = -\int_t^{t+\Delta} \mathrm{d}t'\ \dot{\ell}(t')\, T'(t'),$$
$$= -\dot{\ell}(t) \int_t^{t+\Delta} \mathrm{d}t'\ T'_0(t') + o(\tau^{-1}), \tag{14}$$

که τ زمانِ مشخصه یِ تغییراتِ ℓ است، و X_0 یعنی X وقت یِ طول ثابت است. فرض میکنیم τ از دُوره یِ حرکتِ آونگ وقت یِ طول َش ثابت است خیلی بزرگتر باشد. در این حالت میشود Δ را بسیار بزرگتر از دُوره و بسیار کوچکتر از τ گرفت. چنین میکنیم. نتیجه میشود

$$E'(t+\Delta) - E'(t) = -\dot{\ell}(t)\, \langle T'_0\rangle\, \Delta + o(\tau^{-1}), \tag{15}$$

که $\langle X_0\rangle$ میانگینِ زمانی یِ X_0 طیِ یک دُوره است. به این ترتیب،

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}\ell} = -\langle T'_0\rangle. \tag{16}$$

از این پس همه یِ محاسبات را در حدِ $\tau \to \infty$ انجام میدهیم، یعنی در حدِ تغییراتِ بسیارکندِ پارامتر. به این گونه تغییرات، تغییراتِ بیدررُ میگوییم. همچنین، برا یِ ساده‌گی شاخصِ 0 را از عبارتها یی که طرفِ راستِ (16) ظاهر میشوند حذف میکنیم.

داریم

$$\langle X\rangle = \frac{\displaystyle\int_0^{\theta_{\mathrm{m}}} \mathrm{d}\theta\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\, X(\theta)}{\displaystyle\int_0^{\theta_{\mathrm{m}}} \mathrm{d}\theta\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}} \tag{17}$$

که θ_{m} بیشینه یِ θ است. از ثابت-بودنِ E'_0، همراه با (12) نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2\,g}{\ell}\,(\cos\theta - \cos\theta_{\mathrm{m}})}, \tag{18}$$

و از آنجا،

$$T' = m\,g\,(3\,\cos\theta - 2\,\cos\theta_{\mathrm{m}}). \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}\ell} &= -m\,g\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}\,(3\,\cos\theta-2\,\cos\theta_\mathrm{m})}{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}},\\
&= -m\,g\left(\cos\theta_\mathrm{m}+3\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}}\right),\\
&= \frac{E'}{\ell}+\frac{3}{2}\,m\,g\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}{\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta_\mathrm{m}}\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}},\\
&= \frac{E'}{\ell}-\frac{3}{2}\,\frac{\mathrm{d}(E'/\ell)}{\mathrm{d}\ell}\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}{\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

که نتیجه میدهد

$$
\ell\,\frac{\mathrm{d}(E'/\ell)}{\mathrm{d}\ell}\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}{\displaystyle\ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}\right)=0. \tag{21}
$$

داریم

$$
\ell\,\frac{\mathrm{d}(E'/\ell)}{\mathrm{d}\ell} = -3\,m\,g\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}}, \tag{22}
$$

که نتیجه میدهد مشتقِ (E'/ℓ) نسبت به ℓ صفر نیست. پس،

$$
1+\frac{3}{2}\,\frac{\displaystyle\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}{\displaystyle\ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}}=0, \tag{23}
$$

و از آنجا،

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\ell^{3/2}\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_\mathrm{m}}\right)=0. \tag{24}
$$

3 ناوردا یِ بیدَررُ

وقت ی همیلتنی یِ یک سیستم شامل ِ پارامتر ی است که به کندی (نسبت به زمانها یِ مشخصه یِ سیستم) تغییر میکند، متغیرها یِ کنش ثابت میمانند. برا یِ مسئله ای با یک درجه یِ آزادی، یک متغیر ِ کنش هست که چنین تعریف میشود

$$J := \oint \mathrm{d}q\, p, \tag{25}$$

که q و p مکان و تکانه اند، و مسیر ِ انتگرالگیری خم ِ حرکت در فضا یِ فاز است. متغیر ِ کنش یک تابع ِ فضا یِ فاز است. برا یِ محاسبه یِ آن در هر نقطه خم ی در فضا یِ فاز را میابیم که از آن نقطه میگذرد. انتگرال ِ طرف ِ راست ِ رابطه یِ (25) رو یِ این خم محاسبه میشود.

همیلتنی یی را در نظر بگیرید که در آن یک پارامتر ِ λ هست. خم ی در فضا یِ فاز که در t_0 از (q, p) میگذرد و جواب ِ معادلات ِ حرکت با همیلتنی یی است که در آن λ تابع ِ زمان است را با C نشان میدهیم. خم ی در فضا یِ فاز که در t_0 از (q, p) میگذرد و جواب ِ معادلات ِ حرکت با همیلتنی یی است که در آن λ مقدار ِ ثابت ِ $\lambda(t_0)$ است را با C_0 نمایش میدهیم. در حالت ِ کلی C و C_0 یکسان نیستند. قضیه یِ ناوردا یِ بیدَررُ میگوید وقت ی تغییرات ِ پارامتر کند باشد، متغیرِکنش ی که با خم ِ C_0 حساب میشود ثابت میماند. یعنی در هر زمان مسیر ی در فضا یِ فاز را در نظر میگیریم که متناظر با مقدار ِ پارامتر در آن لحظه است. متغیر ِ کنش را با این مسیر حساب میکنیم. این متغیر ثابت میماند. اینها را میشود در مثلَن [3] یافت.

در مسئله یِ آونگ ی که طول َش متغیر است، داریم

$$\begin{aligned} q &= \theta, \\ p &= m\,\ell^2\,\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{26}$$

از ثابت-بودن ِ E' وقت ی ℓ ثابت است (18) نتیجه میشود. به این ترتیب،

$$J = 4\,m\,\sqrt{2\,g}\,\left(\ell^{3/2}\,\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_\mathrm{m}}\right). \tag{27}$$

دیده میشود ثابت-ماندن ِ متغیر ِ کنش (وقت ی ℓ به کندی تغییر میکند)، با (24) همارز است.

4 نوسان ِ کوچک

وقت ی θ_{m} کوچک است، (24) را میشود ساده‌تر کرد. داریم

$$\int_0^{\theta_{\mathrm{m}}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_{\mathrm{m}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta_{\mathrm{m}}} \mathrm{d}\theta\,\sqrt{\theta_{\mathrm{m}}^2-\theta^2}\right)+O(\theta_{\mathrm{m}}^4),$$
$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,\theta_{\mathrm{m}}^2+O(\theta_{\mathrm{m}}^4), \qquad (28)$$

که نتیجه میدهد

$$\theta_{\mathrm{m}}^2 \propto \ell^{-3/2}, \qquad \theta_{\mathrm{m}} \ll 1. \qquad (29)$$

این هم یعنی

$$[E'-E'(\theta_{\mathrm{m}}=0)] \propto \ell^{-1/2}, \qquad \theta_{\mathrm{m}} \ll 1, \qquad (30)$$

یا

$$[E'-E'(\theta_{\mathrm{m}}=0)] \propto [\omega(\ell)], \qquad \theta_{\mathrm{m}} \ll 1, \qquad (31)$$

یعنی انرژی متناسب با بسامد تغییر میکند.

5 پانوشتها

[1] Newton

[2] Lagrange

[3] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “classical mechanics” 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 10