X1-077 (2011/07/28)

آنالِما

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

جهت ِ خُرشید از دید ِ یک نقطه یِ ثابت در سطح ِ زمین (نسبت به زمین) محاسبه میشود. به این ترتیب شکل ِ آنالِما [1] (مکان ِ هندسی یِ این جهت در یک زمان ِ قراردادی یِ ثابت) به دست می‌آید.

0 قراردادها

جهت ِ سرعت ِ زاویه‌ای یِ مداری یِ زمین (عمود بر صفحه یِ مداری یِ زمین) را با $\hat{\varpi}$، جهت ِ اعتدال ِ بهاری را با $\hat{\boldsymbol{q}}$، و جهت ِ محور ِ قطبی یِ زمین را با $\hat{\boldsymbol{p}}$ نشان میدهیم. زاویه یِ $\hat{\varpi}$ با $\hat{\boldsymbol{p}}$ را با γ نشان میدهیم. در یک نقطه از سطح ِ زمین (رصدگاه)، مماس بر زمین به سو یِ شرق و شمال را با به ترتیب $\hat{\boldsymbol{e}}$ و $\hat{\boldsymbol{n}}$، و عمود بر سطح ِ زمین به سو یِ بالا را با $\hat{\boldsymbol{u}}$ نشان میدهیم. $(\hat{\boldsymbol{e}}, \hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{u}})$ در یک نقطه از سطح ِ زمین را کنج ِ متناظر با آن نقطه مینامیم. بُعد و میل را با ترتیب η و δ، و ارتفاع و سمت را با به ترتیب α و β نشان میدهیم. بُعد ِ یک جهت زاویه یِ تصویر ِ آن جهت بر صفحه یِ استوایی با $\hat{\boldsymbol{q}}$ (جهت ِ اعتدال ِ بهاری) است، که پادساعتگرد سنجیده میشود. میل ِ یک جهت زاویه یِ آن جهت نسبت به صفحه یِ استوایی (عمود بر $\hat{\boldsymbol{p}}$) است، که به سو یِ شمال سنجیده میشود. ارتفاع ِ یک جهت

زاویه یِ آن جهت با مماس بر زمین است، که به سو یِ بالا سنجیده میشود. سمت ِ یک جهت زاویه یِ تصویر ِ آن جهت بر مماس بر زمین با جهت ِ شمالی یِ مماس بر زمین ($\hat{\boldsymbol{n}}$) است، که ساعتگرد سنجیده میشود. سرعت ِ زاویه یِ نجومی یِ زمین را با ω_{a}، و سرعت ِ زاویه‌ای یِ خُرشیدی یِ میانگین ِ زمین را با $\bar{\omega}$ نشان میدهیم. داریم

$$\bar{\omega} = \frac{2\,\pi}{\mathrm{d}}, \tag{1}$$

که d یک روز (24 ساعت) است، و

$$(\omega_{\mathrm{a}} - \bar{\omega})\,\mathrm{y} = 2\,\pi, \tag{2}$$

که y یک سال است. دوران به اندازه یِ θ حوْل ِ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ را با $R(\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})$ نشان میدهیم. داریم

$$[R(\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}})]\,\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}\times(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{\theta}})\,\cos\theta + (\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\boldsymbol{r})\,\sin\theta. \tag{3}$$

همچنین، اگر P یک دوران باشد،

$$R(P\,\boldsymbol{\theta}) = P\,[R(\boldsymbol{\theta})]\,P^{-1}. \tag{4}$$

دیده میشود

$$\hat{\boldsymbol{\varpi}} = [R(\gamma\,\hat{\boldsymbol{q}})]\,\hat{\boldsymbol{p}}, \tag{5}$$

و

$$\hat{\boldsymbol{r}}(\eta,\delta) = [R(\eta\,\hat{\boldsymbol{p}})]\,[R(\delta\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]\,\hat{\boldsymbol{q}}, \tag{6}$$

که $\hat{\boldsymbol{r}}(\eta,\delta)$ جهت ی با بُعد ِ η و میل ِ δ است.

1 بُعد و میل ِ خُرشید و رصدگاه

زمان ِ قراردی یِ اعتدال ِ بهاری را با $\tilde{t}_0$ نشان میدهیم. این زمان طبعَن به مبدئ ِ قراردادی یِ سنجش بسته‌گی دارد. جهت ِ خُرشید را با $\hat{\boldsymbol{s}}$ نشان میدهیم. داریم

$$\hat{\boldsymbol{s}}(t) = \{R[\phi(t)\,\hat{\boldsymbol{\varpi}}]\}\,\hat{\boldsymbol{q}}, \tag{7}$$

که t زمان نسبت به اعتدال ِ بهاری است:

$$t := \tilde{t} - \tilde{t}_0, \tag{8}$$

و ϕ زاویه ی جهت ِ خُرشید نسبت به اعتدال ِ بهاری است. از (4)، (5)، و (7) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{s}} &= [R(\gamma\,\hat{\boldsymbol{q}})]\,[R(\phi\,\hat{\boldsymbol{p}})]\,[R(\gamma\,\hat{\boldsymbol{q}})]^{-1}\,\hat{\boldsymbol{q}},\\ &= \hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}}\,\cos\gamma\,\sin\phi+\hat{\boldsymbol{p}}\,\sin\gamma\,\sin\phi+\hat{\boldsymbol{q}}\,\cos\phi,\\ &= [R(\eta_{\rm s}\,\hat{\boldsymbol{p}})]\,[R(\delta_{\rm s}\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]\,\hat{\boldsymbol{q}},\\ &= \hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}}\,\sin\eta_{\rm s}\,\cos\delta_{\rm s}+\hat{\boldsymbol{p}}\,\sin\delta_{\rm s}+\hat{\boldsymbol{q}}\,\cos\eta_{\rm s}\,\cos\delta_{\rm s},\end{aligned}\tag{9}$$

که η_s بُعد و δ_s میل ِ خُرشید است. به این ترتیب،

$$\delta_{\rm s}=\sin^{-1}(\sin\gamma\,\sin\phi),\tag{10}$$

$$\eta_{\rm s}=\mathrm{Itn}(\cos\gamma,\phi),\tag{11}$$

که Itn پیوسته است، و داریم

$$\mathrm{Itn}(a,b)=\tan^{-1}(a\,\tan b)+k\,\pi\,\mathrm{sgn}(a),\quad \left(k-\frac{1}{2}\right)\,\pi<b<\left(k+\frac{1}{2}\right)\,\pi,\tag{12}$$

که k صحیح و sgn تابع ِ علامت است.

میل ِ رصدگاه هم ان عرض ِ جغرافیایی یِ رصدگاه است. زمان ِ قراردادی یِ ظهر در روز ِ اعتدال ِ بهاری در رصدگاه را با $\tilde{t}_1$ نشان میدهیم. جهت ِ رصدگاه را با $\hat{\boldsymbol{u}}$ نشان میدهیم. در ظهر ِ رصدگاه، بُعد ِ رصدگاه و خُرشید یکسان است. پس

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t_1)=\{R[\eta_{\rm s}(t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,[R(\lambda\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]\,\hat{\boldsymbol{q}},\tag{13}$$

که λ عرض ِ جغرافیایی یِ رصدگاه است. زمین با سرعت ِ زاویه‌ای یِ $\omega_{\rm a}\,\hat{\boldsymbol{p}}$ دُر ِ خُد َش میچرخد. پس،

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{u}}(t) &= \{R[\omega_{\rm a}\,(t-t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,\hat{\boldsymbol{u}}(t_1),\\ &= \{R[\omega_{\rm a}\,(t-t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,\{R[\eta_{\rm s}(t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,[R(\lambda\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]\,\hat{\boldsymbol{q}}.\end{aligned}\tag{14}$$

داریم

$$(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})(\eta,\delta)=[R(\eta\,\hat{\boldsymbol{p}})]\,[R(\delta\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]\,(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})(0,0).\tag{15}$$

که $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})(\eta,\delta)$ کنج ِ متناظر با نقطه ای با بُعد و میل ِ به ترتیب η و δ است. داریم

$$(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})(0,0)=(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}).\tag{16}$$

به این ترتیب،

$$(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})(t)=\{R[\omega_{\rm a}\,(t-t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,\{R[\eta_{\rm s}(t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,[R(\lambda\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]\,(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}}). \quad (17)$$

آنالِما [1] مجموعه یِ جهتها یِ خُرشید نسبت به کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})$ در زمانها یی متوالی است، که فاصله یِ هر دُتا یِ مجاور ِشان از هم یک روز است. طی ِ یک روز، خُرشید نسبت به کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})$ تقریبَن یک دُر میزند. کنج ِ دیگر ی تعریف میکنیم که فرق َش با این کنج چرخش با سرعت ِ زاویه‌ای یِ خُرشیدی یِ متوسط ِ زمین است. نسبت به این کنج، خُرشید به کندی جابه‌جا میشود. کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'$ را چنین تعریف میکنیم.

$$(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'(t):=\{R[\bar{\omega}\,(t-\tau)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})(t), \quad (18)$$

که τ یک زمان ِ ثابت است. اگر سرعت ِ زاویه‌ای یِ خُرشیدی ثابت میبود، جهت ِ خُرشید نسبت به $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'$ ثابت میمانْد. دیده میشود $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'$ به ازا یِ زمانها یی که اختلاف ِشان با τ مضرب ِ صحیح ی از روز باشد یکسان است. مکان ِ هندسی یِ جهت ِ خُرشید نسبت به این کنج، نقطه‌ها یِ آنالِما [1] را دارد، اما پیوسته است. به این مکان آنالِما یِ پیوسته میگوییم.

2 ارتفاع و سمت ِ خُرشید

داریم

$$\hat{\boldsymbol{s}}=\hat{\boldsymbol{e}}'\,\cos\alpha'_{\rm s}\,\sin\beta'_{\rm s}+\hat{\boldsymbol{n}}'\,\cos\alpha'_{\rm s}\,\cos\beta'_{\rm s}+\hat{\boldsymbol{u}}'\,\sin\alpha'_{\rm s}, \quad (19)$$

که $\alpha'_{\rm s}$ و $\beta'_{\rm s}$ به ترتیب ارتفاع و سمت ِ آنالِما یِ پیوسته اند. کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'$ دوران-یافته یِ کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}})$ با دوران ِ U است. به این ترتیب، مئلفه‌ها یِ $\hat{\boldsymbol{s}}$ در کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'$ با مئلفه‌ها یِ $(U^{-1}\,\hat{\boldsymbol{s}})$ در کنج ِ $(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},\hat{\boldsymbol{q}})$ برابر اند. به این ترتیب،

$$U^{-1}\,\hat{\boldsymbol{s}}=\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}}\,\cos\alpha'_{\rm s}\,\sin\beta'_{\rm s}+\hat{\boldsymbol{p}}\,\cos\alpha'_{\rm s}\,\cos\beta'_{\rm s}+\hat{\boldsymbol{q}}\,\sin\alpha'_{\rm s}, \quad (20)$$

که

$$U^{-1}=[R(\lambda\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}})]^{-1}\,\{R[\eta_{\rm s}(t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}^{-1}\,\{R[\omega_{\rm a}\,(t-t_1)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}^{-1}\,\{R[\bar{\omega}\,(t-\tau)\,\hat{\boldsymbol{p}}]\}. \quad (21)$$

از این رابطه، همراه با (9) نتیجه میشود

$$(U^{-1}\,\hat{\boldsymbol{s}})(t) = [R(\lambda\,\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}})]\,\Big(R\{-\eta_{\rm s}(t_1)+\omega_{\rm a}\,(t_1-t)+\bar{\omega}\,(t-\tau)+\eta_{\rm s}(t)]\,\hat{\boldsymbol{p}}\}\Big)$$
$$\times\,\{[R[\delta_{\rm s}(t)\,\hat{\boldsymbol{q}}\times\hat{\boldsymbol{p}}]\}\,\hat{\boldsymbol{q}},$$
$$= \hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{q}}\,\cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\sin[\zeta(t)]\}$$
$$+\,\hat{\boldsymbol{p}}\,\{\cos\lambda\,\sin[\delta_{\rm s}(t)]-\sin\lambda\,\cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\cos[\zeta(t)]\}$$
$$+\,\hat{\boldsymbol{q}}\,\{\sin\lambda\,\sin[\delta_{\rm s}(t)]+\cos\lambda\,\cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\cos[\zeta(t)]\}, \tag{22}$$

که

$$\zeta(t) := -\,\eta_{\rm s}(t_1)+\omega_{\rm a}\,(t_1-t)+\bar{\omega}\,(t-\tau)+\eta_{\rm s}(t),$$
$$= -\,\frac{2\,\pi}{\rm d}\,(\tau-t_1)-\frac{2\,\pi}{\rm y}\,(t-t_1)+\eta_{\rm s}(t)-\eta_{\rm s}(t_1). \tag{23}$$

به این ترتیب،

$$\cos\alpha'_{\rm s}\,\sin\beta'_{\rm s} = \cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\sin[\zeta(t)]\},$$
$$\cos\alpha'_{\rm s}\,\cos\beta'_{\rm s} = \cos\lambda\,\sin[\delta_{\rm s}(t)]-\sin\lambda\,\cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\cos[\zeta(t)],$$
$$\sin\alpha'_{\rm s} = \sin\lambda\,\sin[\delta_{\rm s}(t)]+\cos\lambda\,\cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\cos[\zeta(t)]. \tag{24}$$

این رابطه، همراه با (10)، (11)، و (23) و البته با داشتنِ ϕ بر حسبِ زمان، ارتفاع و سمتِ آنالِما یِ پیوسته را میدهد.

بسته‌گی به عرضِ جغرافیایی به شکلِ فقط یک دَوَران ظاهر شده. با تعریفِ کنجِ $(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})''$

$$(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})'' := [R(\lambda\,\hat{\boldsymbol{e}}')]\,(\hat{\boldsymbol{e}},\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{u}})', \tag{25}$$

و تعریفِ $(\alpha''_{\rm s},\beta''_{\rm s})$ نسبت به این کنج،

$$\cos\alpha''_{\rm s}\,\sin\beta''_{\rm s} = \cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\sin[\zeta(t)]\},$$
$$\cos\alpha''_{\rm s}\,\cos\beta''_{\rm s} = \sin[\delta_{\rm s}(t)],$$
$$\sin\alpha''_{\rm s} = \cos[\delta_{\rm s}(t)]\,\cos[\zeta(t)]. \tag{26}$$

با گذاشتن ِ $\delta_{\rm s}$ از (10) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\cos\alpha'_{\rm s}\,\sin\beta'_{\rm s} &= \sqrt{1-\sin^2\gamma\,\sin^2[\phi(t)]}\,\sin[\zeta(t)]\},\\ \cos\alpha'_{\rm s}\,\cos\beta'_{\rm s} &= \cos\lambda\,\sin\gamma\,\sin[\phi(t)]-\sin\lambda\sqrt{1-\sin^2\gamma\,\sin^2[\phi(t)]}\,\cos[\zeta(t)],\\ \sin\alpha'_{\rm s} &= \sin\lambda\,\sin\gamma\,\sin[\phi(t)]+\cos\lambda\sqrt{1-\sin^2\gamma\,\sin^2[\phi(t)]}\,\cos[\zeta(t)],\end{aligned} \tag{27}$$

یا

$$\begin{aligned}\cos\alpha''_{\rm s}\,\sin\beta''_{\rm s} &= \sqrt{1-\sin^2\gamma\,\sin^2[\phi(t)]}\,\sin[\zeta(t)]\},\\ \cos\alpha''_{\rm s}\,\cos\beta''_{\rm s} &= \sin\gamma\,\sin[\phi(t)],\\ \sin\alpha''_{\rm s} &= \sqrt{1-\sin^2\gamma\,\sin^2[\phi(t)]}\,\cos[\zeta(t)].\end{aligned} \tag{28}$$

3 زاویه یِ جهت ِ خُرشید نسبت به اعتدال ِ بهاری

فاصله یِ زمین تا خُرشید را با r نشان میدهیم. بردار ِ مکان ُ خُرشید نسبت به زمین یک بیضی است که مبدئ یک ی از کانونها یِ آن است. داریم

$$r\,[1+\varepsilon\,\cos(\phi-\phi_{\rm m})]=\text{constant}, \tag{29}$$

که $\phi_{\rm m}$ زاویه یِ جهت ِ خُرشید در حضیض با اعتدال ِ بهاری، و ε خروجازمرکز ِ مدار است. همچنین،

$$r^2\,\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}t}=\text{constant}. \tag{30}$$

اینها را میشود در مثلَن [2] یافت. به این ترتیب،

$$\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}t}=\frac{2\,\pi}{\zeta\,{\rm y}}\,[1+\varepsilon\,\cos(\phi-\phi_{\rm m})]^2, \tag{31}$$

که ζ یک ثابت است. از اینجا داریم

$$\frac{2\,\pi}{\zeta\,{\rm y}}\,(t-t_{\rm m})=\int_{\phi_{\rm m}}^{\Phi}\frac{{\rm d}\phi'}{[1+\varepsilon\,\cos(\phi'-\phi_{\rm m})]^2}, \tag{32}$$

که $t_{\rm m}$ زمانِ حضیض است. با انتگرالگیری نتیجه میشود

$$\frac{2\,\pi}{\zeta\,{\rm y}}\,(t-t_{\rm m}) = \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\,{\rm Itn}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \frac{\phi-\phi_{\rm m}}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin(\phi-\phi_{\rm m})}{1+\varepsilon\,\cos(\phi-\phi_{\rm m})}, \qquad (33)$$

وقت ی یک سال از حضیض بگذرد، زاویه یِ جهتِ خُرشید هم $(2\,\pi)$ زیاد میشود. به این ترتیب از (33) نتیجه میشود

$$\zeta = (1-\varepsilon^2)^{3/2}, \qquad (34)$$

و از آنجا،

$$\frac{2\,\pi}{\rm y}\,(t-t_{\rm m}) = 2\,{\rm Itn}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \frac{\phi-\phi_{\rm m}}{2}\right) - \varepsilon\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin(\phi-\phi_{\rm m})}{1+\varepsilon\,\cos(\phi-\phi_{\rm m})}, \quad (35)$$

از (12) نتیجه میشود

$${\rm Itn}(a,b) = b + \frac{a-1}{2}\,\sin 2\,b + o(a-1). \qquad (36)$$

به این ترتیب،

$$\frac{2\,\pi}{\rm y}\,(t-t_{\rm m}) = (\phi-\phi_{\rm m}) - 2\,\varepsilon\,\sin(\phi-\phi_{\rm m}) + o(\varepsilon), \qquad (37)$$

که نتیجه میدهد

$$(\phi-\phi_{\rm m}) = \frac{2\,\pi}{\rm y}\,(t-t_{\rm m}) + 2\,\varepsilon\,\sin\left[\frac{2\,\pi}{\rm y}\,(t-t_{\rm m})\right] + o(\varepsilon). \qquad (38)$$

4 شکلِ آنالِما

$\hat{\boldsymbol{u}}''$ در زمانِ عکسبرداری عمود بر شرق و عمود بر محورِ قطبی یِ زمین است. اگر دوربین در جهتِ $\hat{\boldsymbol{u}}''$ باشد، چیز ی که در عکس دیده میشود مختصهها یِ اول و دوم در رابطه یِ (26) یا (28) است. پارامتر را به جا یِ زمان خُدِ ϕ میگیریم. به این ترتیب ζ از رابطهها یِ (11) و (23) همراه با (35) یا (37) به دست میآید. معادلاتِ پارامتری یِ آنالِما یِ پیوسته میشوند

$$X = \sqrt{1-\sin^2\gamma\,\sin^2\phi}\,\sin\zeta,$$
$$Y = \sin\gamma\,\sin\phi, \qquad (39)$$

که

$$\zeta = -\frac{2\,\pi}{\mathrm{d}}\,(\tau - t_1) + \frac{2\,\pi}{\mathrm{y}}\,(t_1 - t_\mathrm{m}) + \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi) - \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi_1) - 2\,\mathrm{Itn}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \frac{\phi - \phi_\mathrm{m}}{2}\right) + \varepsilon\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin(\phi - \phi_\mathrm{m})}{1 + \varepsilon\,\cos(\phi - \phi_\mathrm{m})}, \tag{40}$$

یا

$$\zeta = -\frac{2\,\pi}{\mathrm{d}}\,(\tau - t_1) + \frac{2\,\pi}{\mathrm{y}}\,(t_1 - t_\mathrm{m}) + \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi) - \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi_1) - (\phi - \phi_\mathrm{m}) + 2\,\varepsilon\,\sin(\phi - \phi_\mathrm{m}) + o(\varepsilon). \tag{41}$$

از (37)، با صفر گذاشتنِ t مقدارِ t_m به دست می‌آید. به این ترتیب (41) میشود

$$\zeta = 2\,\varepsilon\,\sin\phi_\mathrm{m} + \frac{2\,\pi}{\mathrm{y}}\,t_1 - \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi_1) - \frac{2\,\pi}{\mathrm{d}}\,(\tau - t_1) + \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi) - \phi + 2\,\varepsilon\,\sin(\phi - \phi_\mathrm{m}) + o(\varepsilon). \tag{42}$$

جمله یِ اول ثابت است. جمله‌ها یِ دوم و سه‌وم فقط به این بسته‌گی دارند که در رصدگاه، ظهرِ روزِ اعتدالِ بهاری چه‌قدر بعد از اعتدالِ بهاری رخ داده. این جمله‌ها ضمنَن بسیار کوچک اند. جمله یِ چهارُم به زمانِ عکسبرداری بسته‌گی دارد. فقط سه‌جمله یِ آخر اند که با تغییرِ ϕ تغییر میکنند.

ϕ_1 زاویه ای کوچک است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi_1) &= \phi_1\,\cos\gamma + o(\phi_1),\\
&= t_1\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\Big|_{\phi=0}\,\cos\gamma + o(\phi_1),\\
&= \frac{2\,\pi}{\mathrm{y}}\,t_1\,(1 + 2\,\varepsilon\,\cos\phi_\mathrm{m})\,\cos\gamma + o(\phi_1) + o(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{43}$$

که نتیجه میدهد،

$$\zeta = 2\,\varepsilon\,\sin\phi_\mathrm{m} + [1 - (1 + 2\,\varepsilon\,\cos\phi_\mathrm{m})\,\cos\gamma]\,\frac{2\,\pi}{\mathrm{y}}\,t_1 - \frac{2\,\pi}{\mathrm{d}}\,(\tau - t_1) + \mathrm{Itn}(\cos\gamma, \phi) - \phi + 2\,\varepsilon\,\sin(\phi - \phi_\mathrm{m}) + o(\phi_1) + o(\varepsilon). \tag{44}$$

برا یِ زمین، از [3] داریم

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.017, \\ \phi_{\rm m} &= -77^\circ, \end{aligned} \tag{45}$$

و از [4] داریم

$$\gamma = 23.5^\circ. \tag{46}$$

از اینها نتیجه میشود

$$\left|[1-(1+2\,\varepsilon\,\cos\phi_{\rm m})\,\cos\gamma]\,\frac{2\,\pi}{\rm y}\,t_1\right| < 10^{-3}, \qquad |t_1| < \frac{\rm d}{2}. \tag{47}$$

به این ترتیب از جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (44) چشم میپوشیم و نتیجه میشود

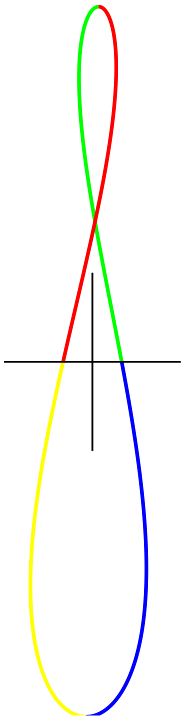
$$\zeta = 2\,\varepsilon\,\sin\phi_{\rm m} - \frac{2\,\pi}{\rm d}\,(\tau - t_1) + {\rm Itn}(\cos\gamma, \phi) - \phi + 2\,\varepsilon\,\sin(\phi - \phi_{\rm m}). \tag{48}$$

دیده میشود برا یِ زمین، عملَن تنهاعامل ی که شکل ِ آنالِما [1] را تعیین میکند زمان ِ عکسبرداری است، که در پارامتر ِ $(\tau - t_1)$ ظاهر میشود. این پارامتر زمان عکسبرداری در روز ِ اعتدال ِ بهاری، منها یِ زمان ِ ظهر ِ اعتدال ِ بهاری است.

در ادامه شکل ِ آنالِما [1] برا یِ دُ حالت آمده. شکل ِ اول مربوط به حالت ی است که مجموع ِ دُجمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (48) صفر است. این یعنی

$$\tau - t_1 = -7.6\,{\rm min}. \tag{49}$$

تقریبَن یعنی زمان ِ عکسبرداری از ظهر ِ اعتدال ِ بهاری شروع میشود. شکل ِ دوم مربوط به حالت ی است که زمان ِ عکسبرداری چهار ساعت پیش از حالت ِ قبل است. خطها یِ افقی و عمودی محورها یِ به ترتیب X و Y اند. طبعَن شکل ِ دوم نسبت به شکل ِ اول به شرق جابه‌جا شده. اما تغییر فقط یک انتقال نیست. چنان که از (39) دیده میشود ζ در فقط X ظاهر میشود، و چنان که از (48) دیده میشود $(\tau - t_1)$ به شکل ِ فقط یک ثابت ِ جمعی در ζ ظاهر میشود.



شکل ِ 1: تقریبَن ظهر

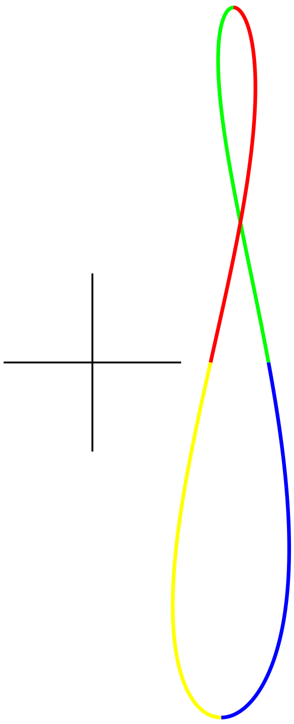
خطها یِ سیاه ِ افقی و عمودی محورها یِ به ترتیب X و Y اند.

بهار

تابستان

پاییز

زمستان



شکل ِ 2: چهار ساعت پیش از ظهر

خطها یِ سیاه ِ افقی و عمودی محورها یِ به ترتیب X و Y اند.

بهار

تابستان

پاییز

زمستان

5 پانوشتها

[1] analemma

[2] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “classical mechanics” 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 3

[3] Imke de Pater & Jack J. Lissauer; “planetary sciences” (Cambridge University Press, 2001) chapter 1

[4] Kenneth R. Lang; “astrophysical data: planets and stars” (Springer Verlag, 1991) chapter 2