X1-078 (2011/08/25)

اپتیک ِ گاؤسی و ماتریس ِ انتقال

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

اپتیک ِ هندسی یِ باریکه‌ها یِ پیرامحوری در دستگاهها یِ سمتی-متقارن، از طریق ِ ماتریس ِ انتقال بررسی میشود.

0 مقدمه، قراردادها

اپتیک ِ گاؤسی یعنی بررسی یِ باریکه‌ها یِ پیرامحوری در دستگاهها یی که تقارن ِ سمتی دارند، در تقریب ِ اپتیک ِ هندسی. دقیقتر باشیم باید این را هم اضافه کنیم که دستگاه نسبت به یک صفحه یِ (و در نتیجه هر صفحه یِ) گذرنده از محور ِ اپتیکی تقارن ِ بازتابی داشته باشد. محور ِ اپتیکی هم ان محور ی است که دستگاه نسبت به آن تقارن ِ سمتی دارد، و تقریب ِ پیرامحوری یعنی فاصله یِ باریکه‌ها تا محور ِ اپتیکی، و زاویه یِ باریکه‌ها با محور ِ اپتیکی کوچک است، چنان که میشود از جمله‌ها یِ غیرِخطی نسبت به این دُکمیت چشم پوشید. در کل ِ این متن این تقریب را به کار میبریم. [1] و [2] مرجعها یی (به عنوان ِ مثال) در باره یِ اپتیک ِ گاؤسی اند.

باریکه ای را در نظر بگیرید که با محور ِ اپتیکی در یک صفحه است. از تقارن ِ بازتابی یِ دستگاه نتیجه میشود این باریکه طی ِ عبور از دستگاه در هم ین صفحه میمانَد. این صفحه را صفحه یِ فرود

مینامیم. محور ِ اپتیکی را محور ِ z مینامیم. یک محور ِ عمود بر محور ِ اپتیکی در صفحه ی ِ فرود را هم محور ِ x مینامیم، و مبدئ ِ محور ِ x را رو ی ِ محور ِ اپتیکی میگیریم. به x عرض ِ باریکه میگوییم. زاویه ی ِ جبری ی ِ باریکه با محور ِ اپتیکی (در هر نقطه ی ِ باریکه) را با θ نشان میدهیم. دُتایی ی ِ v را با

$$v := \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} \tag{1}$$

تعریف میکنیم، و به آن بردار ِ باریکه میگوییم. باریکه ای که با بردار ِ v_1 وارد ِ دستگاه ِ اپتیکی شود، با بردار ِ v_2 از آن بیرون میرود. تقارن ِ سمتی نتیجه میدهد اگر v_1 صفر باشد v_2 هم صفر است. از تقریب ِ پیرامحوری معلوم میشود v_2 نسبت به v_1 خطی است. از تقارن ِ سمتی ضمنَن معلوم میشود رابطه ی ِ v_2 با v_1 به صفحه ی ِ فرود بسته‌گی ندارد. پس تا جا یی که که به باریکه‌ها ی ِ فرودی ی ِ نامتنافر با محور ِ اپتیکی مربوط میشود، رفتار ِ دستگاه ِ اپتیکی را میشود در یک نگاشت ِ خطی خلاصه کرد که v_2 را به v_1 مربوط میکند:

$$v_2 = M\, v_1. \tag{2}$$

به این نگاشت (M) ماتریس ِ انتقال ِ دستگاه میگوییم.

برا ی ِ تعیین ِ z (طول ِ باریکه) یک مبدئ (رو ی ِ محور ِ z) لازم است. این مبدئ لزومَن برا ی ِ باریکه‌ها ی ِ ورودی و خروجی یکسان نیست. اما برا ی ِ هردُدسته باریکه این قرارداد را به کار میبریم که z به طرف ِ راست زیاد میشود. ماتریس ِ انتقال باریکه ی ِ خروجی در مبدئ ِ خروجی را به باریکه ی ِ ورودی در مبدئ ِ ورودی مربوط میکند. z با مبدئ ِ متناظر با باریکه‌ها ی ِ ورودی و خروجی را طول ِ به ترتیب ورودی و خروجی مینامیم.

این قراردادها را به کار میبریم.

$$\begin{bmatrix} e^{\mathrm{l}} \\ e^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} e_{\mathrm{u}} & e_{\mathrm{d}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\zeta(z) := \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

دیده میشود

$$[\zeta(z)]\, e_{\mathrm{d}} = 1. \tag{6}$$

با

$$M =: \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{7}$$

و

$$M^{-1} =: \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

داریم

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{9}$$

طول با مبدئ ِ ناحیه یِ μ (مثلَن ورودی یا خروجی) از دستگاه را با $Z^{(\mu)}$ نشان میدهیم. بردار ِ یک باریکه (یا امتدادیافته اَش) به نقطه یِ مشاهده بسته‌گی دارد. $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(Z^{(\nu)} = z)$ بردار ِ یک باریکه (یا امتدادیافته اَش) با شاخص ِ α (از یک دسته باریکه)، در بخش ِ μ از دستگاه، در طول ِ z محاسبه‌شده در بخش ِ ν از دستگاه است. وقت ی ν با μ برابر باشد، به جا یِ $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(Z^{(\nu)} = z)$ شکل ِ ساده‌تر ِ $V^{(\mu)}_{(\alpha)}(z)$ را به کار میبریم. مختصه‌ها یِ اول و دوم ِ v را با به ترتیب $\Theta(v)$ و $X(v)$ نشان میدهیم. وقت ی فقط دُ ناحیه (ورودی و خروجی) برا یِ دستگاه به کار رود، و قرارداد ِ دیگر ی ذکر نشود، $\mu = 1$ و $\mu = 2$ ناحیه‌ها یِ به ترتیب ورودی و خروجی اند. در این حالت ورودی و خروجی یِ دستگاه با به ترتیب $Z^{(1)} = 0$ و $Z^{(2)} = 0$ متناظر اند.

1 جابه‌جایی

بردار ِ هر باریکه به نقطه یِ مشاهده بسته‌گی دارد. با تغییر ِ نقطه یِ مشاهده زاویه ثابت میمانَد، اما عرض تغییر میکند. باریکه ای را در نظر بگیرید که بردار َش در نقطه یِ A برابر ِ v_{A}، و در نقطه یِ B که به اندازه یِ z طرف ِ راست ِ A است v_{B} است. داریم

$$x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}} + \theta\, z. \tag{10}$$

این رابطه و برابری یِ θ_{B} با θ_{A} هم‌ارز است با

$$v_{\mathrm{B}} = [T(z)]\, v_{\mathrm{A}}, \tag{11}$$

که

$$T(z) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

به $T(z)$ ماتریس ِ جابه‌جایی به اندازه یِ z میگوییم. دیده میشود

$$x_{\mathrm{B}} = [\zeta(z)]\, v_{\mathrm{A}}. \tag{13}$$

همچنین،

$$e^{\mathrm{r}}\, [T(z)] = \zeta(z), \tag{14}$$

$$[\zeta(z)]\, [T(z')] = \zeta(z+z'), \tag{15}$$

$$[T(z)]\, [T(z')] = T(z+z'). \tag{16}$$

2 جسم، تصویر

نقطه ای (جسم) را در نظر بگیرید که در $(Z^{(1)} = z_{\mathrm{i}}, x_{\mathrm{i}})$ است. باریکه‌ها یی که از جسم میگذرند را با زاویه یِشان برچسب میزنیم:

$$V^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{i}}) = \alpha\, e_{\mathrm{u}} + x_{\mathrm{i}}\, e_{\mathrm{d}}. \tag{17}$$

بردارها یِ باریکه‌ها در ورودی یِ دستگاه میشوند:

$$V^{(1)}_{(\alpha)}(0) = [T(-z_{\mathrm{i}})]\, V^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{i}}). \tag{18}$$

از (2) بردارها یِ باریکه‌ها در خروجی یِ دستگاه به دست می‌آیند:

$$V^{(2)}_{(\alpha)}(0) = M\, [V^{(1)}_{(\alpha)}(0)]. \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$V^{(2)}_{(\alpha)}(z) = [T(z)]\, M\, [T(-z_{\mathrm{i}})]\, V^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{i}}). \tag{20}$$

این باریکه‌ها از نقطه یِ $(Z^{(2)} = z_{\rm o}, x_{\rm o})$ می‌گذرند، اگر

$$x_{\rm o} = e^{\rm r}\,[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\rm o})], \qquad \forall\,\alpha. \tag{21}$$

این رابطه هم‌ارز است با

$$[\zeta(z_{\rm o})]\,M\,[T(-z_{\rm i})]\,e_{\rm u} = 0, \tag{22}$$

$$x_{\rm o} = \{[\zeta(z_{\rm o})]\,M\,e_{\rm d}\}\,x_{\rm i}. \tag{23}$$

از (22) نتیجه می‌شود

$$\{[\zeta(z_{\rm o})]\,M\,[T(-z_{\rm i})]\} \parallel e_{\rm d}. \tag{24}$$

پس،

$$\zeta(z_{\rm o}) = \frac{[\zeta(z_{\rm i})]\,M^{-1}}{[\zeta(z_{\rm i})]\,M^{-1}\,e_{\rm d}}, \tag{25}$$

$$x_{\rm o} = \frac{x_{\rm i}}{[\zeta(z_{\rm i})]\,M^{-1}\,e_{\rm d}}. \tag{26}$$

به این ترتیب،

$$z_{\rm o} = \frac{-c + d\,z_{\rm i}}{a - b\,z_{\rm i}}, \tag{27}$$

$$\frac{x_{\rm o}}{x_{\rm i}} = \frac{\det M}{a - b\,z_{\rm i}}. \tag{28}$$

دیده می‌شود $z_{\rm o}$ و نسبتِ $(x_{\rm o}/x_{\rm i})$، هیچ کدام به $x_{\rm i}$ بسته‌گی ندارند. به نسبتِ $(x_{\rm o}/x_{\rm i})$ بزرگنمایی یِ عرضی می‌گوییم. به $({\rm d}z_{\rm o}/{\rm d}z_{\rm i})$ هم بزرگنمایی یِ طولی می‌گوییم. دیده می‌شود

$$\frac{{\rm d}z_{\rm o}}{{\rm d}z_{\rm i}} = \frac{\det M}{(a - b\,z_{\rm i})^2}, \tag{29}$$

$$\frac{{\rm d}z_{\rm o}}{{\rm d}z_{\rm i}} = \frac{1}{\det M}\,\left(\frac{x_{\rm o}}{x_{\rm i}}\right)^2. \tag{30}$$

3 صفحه‌ها یِ اصلی

یک دسته باریکه یِ ورودی یِ موازی را در نظر بگیرید. دنبالِ $z_{\rm p\,o}$ می‌گردیم که در صفحه یِ $Z^{(2)} = z_{\rm p\,o}$ اختلافِ عرضِ باریکه‌ها یِ خروجی برابرِ اختلافِ عرضِ باریکه‌ها یِ ورودی یِ

متناظر باشد. این یعنی با

$$V^{(1)}_{(\alpha)}(0) = \theta_1\, e_{\mathrm{u}} + \alpha\, e_{\mathrm{d}}, \qquad (31)$$

بردارها یِ دسته‌باریکه‌ها یِ خروجی این را برآورند.

$$X[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,o}})] = \alpha + C\,\theta_1, \qquad (32)$$

که C یک ثابت است. این یعنی

$$[\zeta(z_{\mathrm{p\,o}})]\, M\, e_{\mathrm{d}} = 1, \qquad (33)$$

$$[\zeta(z_{\mathrm{p\,o}})]\, M\, e_{\mathrm{d}} = C. \qquad (34)$$

(33) نتیجه میدهد

$$z_{\mathrm{p\,o}} = \frac{1-d}{b}. \qquad (35)$$

با گذاشتن ِ این در (34) هم نتیجه میشود

$$X[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,o}})] = \alpha + \frac{a-\det M}{b}\,\theta_1, \\ = X\left[V^{(1)}_{(\alpha)}\left(\frac{a-\det M}{b}\right)\right]. \qquad (36)$$

به صفحه یِ $Z^{(2)} = z_{\mathrm{p\,o}}$ صفحه یِ اصلی یِ خروجی میگوییم. مشابه با هم ین صفحه یِ اصلی یِ ورودی هم تعریف میشود: جا یی که باریکه‌ها یِ ورودی یی که به باریکه‌ها یِ خروجی یِ موازی می‌انجامند، احتلاف ِ عرض ِشان با اختلاف ِ عرض ِ باریکه‌ها یِ خروجی یِ متناظر برابر است. میشود محاسبه ای مشابه انجام داد، یا مانسته‌ها یِ (35) و (36) را با تبدیل ِ M به M^{-1} به دست آورْد. نتیجه میشود

$$z_{\mathrm{p\,i}} = \frac{a-\det M}{b}. \qquad (37)$$

مانسته یِ (36) هم میشود

$$X[W^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,o}})] = \alpha + \frac{1-d}{b}\,\theta_2, \\ = X\left[W^{(2)}_{(\alpha)}\left(\frac{1-d}{b}\right)\right], \qquad (38)$$

که

$$W^{(2)}_{(\alpha)}(0) = \theta_2\, e_{\mathrm{u}} + \alpha\, e_{\mathrm{d}}. \qquad (39)$$

اینها متناظر با باریکه‌ها یی اند که در خروجی با هم موازی اند.

با استفاده از (37)، رابطه یِ (36) میشود

$$X[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,o}})] = X[V^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,i}})]. \qquad (40)$$

همچنین، با استفاده از (35)، رابطه یِ (38) میشود

$$X[W^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,i}})] = X[W^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{p\,i}})]. \qquad (41)$$

رابطه‌ها یِ (40) و (41) نشان میدهند مسیر ِ باریکه‌ها (یا راستا یِشان) چنان است که گویا بخش ی (حقیقی یا مجازی) از باریکه که بین ِ صفحه‌ها یِ اصلی یِ ورودی و خروجی است، موازی یِ محور ِ اپتیکی است.

مانسته یِ (33)

$$[\zeta(z_{\mathrm{p\,i}})]\, M^{-1}\, e_{\mathrm{d}} = 1 \qquad (42)$$

است. ضمنَن داریم

$$[\zeta(z_{\mathrm{p\,o}})]\, e_{\mathrm{d}} = 1, \qquad (43)$$

$$[\zeta(z_{\mathrm{p\,i}})]\, e_{\mathrm{d}} = 1. \qquad (44)$$

از (33)، و (42) تا (44) نتیجه میشود $\{[\zeta(z_{\mathrm{p\,o}})]\, M\}$ و $[\zeta(z_{\mathrm{p\,i}})]$ معادله‌ها یِ یکسان ی را بر می‌آورَند. به این ترتیب (یا مستقیمَن) معلوم میشود

$$[\zeta(z_{\mathrm{p\,o}})]\, M = [\zeta(z_{\mathrm{p\,i}})]. \qquad (45)$$

4 صفحه‌ها یِ کانونی

یک دسته باریکه یِ ورودی یِ موازی را در نظر بگیرید. دنبال ِ نقطه ای میگردیم که باریکه‌ها یِ خروجی یِ متناظر، همه از آنجا بگذرند. طول ِ خروجی یِ چنین نقطه ای (در صورت ِ وجود) را با $z_{\mathrm{f\,o}}$ نمایش میدهیم.این یعنی با (31)،

$$X[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{f\,o}})] = D\,\theta_1, \qquad (46)$$

که D یک ثابت است. به این ترتیب،

$$[\zeta(z_{\mathrm{f\,o}})]\,M\,e_{\mathrm{d}} = 0, \tag{47}$$

$$[\zeta(z_{\mathrm{f\,o}})]\,M\,e_{\mathrm{d}} = D. \tag{48}$$

از (47) نتیجه میشود

$$z_{\mathrm{f\,o}} = -\frac{d}{b}. \tag{49}$$

با گذاشتنِ این در (48) هم معلوم میشود

$$X[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{f\,o}})] = -\frac{\det M}{b}\,\theta_1. \tag{50}$$

به صفحه یِ $Z^{(2)} = z_{\mathrm{f\,o}}$ صفحه یِ کانونی یِ خروجی میگوییم. البته (49) و (50) را میشد از (27) و (28) هم به دست آوْرد. باریکه‌ها یِ ورودی یِ موازی متناظر اند با $(z_{\mathrm{i}} \to \infty)$ و $\theta_1 \to (-x_{\mathrm{i}}/z_{\mathrm{i}})$، که با اینها از (27) و (28) نتیجه میشود

$$z_{\mathrm{o}} = -\frac{d}{b}, \tag{51}$$
$$x_{\mathrm{o}} = -\frac{\det M}{b}\,\theta_1. \tag{52}$$

سرانجام، با تبدیلِ M به M^{-1} یا با محاسبه یِ مستقیم، مانسته‌ها یِ (49) و (50) برا یِ صفحه یِ کانونی یِ ورودی به دست می‌آیند:

$$z_{\mathrm{f\,i}} = \frac{a}{b}, \tag{53}$$

و

$$X[W^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{f\,i}})] = \frac{1}{b}\,\theta_2. \tag{54}$$

به $(Z^{(1)} = z_{\mathrm{f\,i}}, 0)$ کانونِ ورودی، و به $(Z^{(2)} = z_{\mathrm{f\,o}}, 0)$ کانونِ خروجی میگوییم. باریکه ای که موازی با محورِ اپتیکی وارد شود، از کانونِ خروجی میگذرد. باریکه ای که در ورود از کانونِ ورودی بگذرد، موازی با محورِ اپتیکی خارج میشود.

5 صفحه‌ها یِ گره‌ای

دنبال ِ $z_{\mathrm{n\,i}}$ میگردیم که باریکه‌ها یِ ورودی یی که از $(Z^{(1)} = z_{\mathrm{n\,i}}, x_{\mathrm{i}})$ میگذرند، در خروجی از $(Z^{(2)} = z_{\mathrm{n\,o}}, x_{\mathrm{o}})$ بگذرند، چنان که زاویه یِ هر باریکه یِ خروجی با باریکه یِ فرودی یِ متناظر ثابت است. باریکه‌ها یِ ورودی میشوند

$$V^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{n\,i}}) = \alpha\, e_{\mathrm{u}} + x_{\mathrm{i}}\, e_{\mathrm{d}}, \tag{55}$$

و از اینجا باریکه‌ها یِ خروجی میشوند

$$V^{(2)}_{(\alpha)}(z) = [T(z)]\, M\, [T(-z_{\mathrm{n\,i}})]\, V^{(1)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{n\,i}}). \tag{56}$$

به این ترتیب،

$$\Theta[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{n\,o}})] = e^{\mathrm{l}}\, M\, [T(-z_{\mathrm{n\,i}})]\, (\alpha\, e_{\mathrm{u}} + x_{\mathrm{i}}\, e_{\mathrm{d}}), \tag{57}$$

که نتیجه میدهد

$$e^{\mathrm{l}}\, M\, [T(-z_{\mathrm{n\,i}})]\, e_{\mathrm{u}} = 1, \tag{58}$$

$$\Theta[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{n\,o}})] = \alpha + \{e^{\mathrm{l}}\, M\, [T(-z_{\mathrm{n\,i}})]\, e_{\mathrm{d}}\}\, x_{\mathrm{i}}. \tag{59}$$

از (58) نتیجه میشود

$$z_{\mathrm{n\,i}} = \frac{a-1}{b}. \tag{60}$$

از (59) هم نتیجه میشود

$$\Theta[V^{(2)}_{(\alpha)}(z_{\mathrm{n\,o}})] = \alpha + b\, x_{\mathrm{i}}. \tag{61}$$

از (27) هم $z_{\mathrm{n,o}}$ به دست می‌آید:

$$z_{\mathrm{n\,o}} = \frac{\det M - d}{b}. \tag{62}$$

سرانجام، از (28) هم x_{o} به دست می‌آید. نتیجه این که اگر زاویه یِ یک باریکه یِ ورودی θ_1 و زاویه یِ باریکه یِ خروجی θ_2 باشد،

$$\theta_2 = \theta_1 + b\, x_{\mathrm{i}}, \tag{63}$$

$$x_{\mathrm{o}} = (\det M)\, x_{\mathrm{i}}. \tag{64}$$

به $Z^{(1)} = z_{\rm n\,i}$ صفحه یِ گره‌ای یِ ورودی، و به $Z^{(2)} = z_{\rm n\,o}$ صفحه یِ گره‌ای یِ خروجی میگوییم. به $(Z^{(1)} = z_{\rm n\,i}, 0)$ گره یِ ورودی، و به $(Z^{(2)} = z_{\rm n\,o}, 0)$ گره یِ خروجی میگوییم. باریکه ای که از گره یِ ورودی بگذرد، موازی با راستا یِ ورودی از گره یِ خروجی میگذرد.

6 شکل ِ کانُنیک ِ ماتریس ِ انتقال

انتخاب ِ مبدئ در ناحیه‌ها یِ ورودی و خروجی دلبخاه است. ماتریس ِ انتقال بردار ِ باریکه در مبدئ ِ ورودی را به بردار ِ باریکه در مبدئ ِ خروجی تبدیل میکند. پس با جابه‌جایی یِ مبدئ ماتریس ِ انتقال عوض میشود. ماتریس ِ انتقال با مبدئها یِ ورودی و خروجی یِ در به ترتیب $Z^{(1)} = z_{\rm c,i}$ و $Z^{(2)} = z_{\rm c,o}$ را با $M(z_{\rm c,i}, z_{\rm c,o})$ نشان میدهیم. داریم

$$M(z_{\rm c,i}, z_{\rm c,o}) = [T(z_{\rm c,o})]\, M\, [T(-z_{\rm c,i})]. \tag{65}$$

دیده میشود

$$\det[M(z_{\rm c,i}, z_{\rm c,o})] = \det M, \tag{66}$$

$$e^{\rm r}\, [M(z_{\rm c,i}, z_{\rm c,o})]\, e_{\rm u} = e^{\rm r}\, M\, e_{\rm u}. \tag{67}$$

یک انتخاب این است که مبدئ ِ هر ناحیه را صفحه یِ اصلی یِ هم ان ناحیه بگیریم. به شکل ِ ماتریس ِ انتقال با این مبدئ، شکل ِ کانُنیک ِ ماتریس ِ انتقال میگوییم. ماتریس ِ انتقال، مئلفه‌ها یَش، و طولها با این مبدئ (طولها یِ کانینک) را با پریم مشخص میکنیم. داریم

$$z'_{\rm p,o} = 0, \tag{68}$$

$$z'_{\rm p,i} = 0. \tag{69}$$

به این ترتیب از (35) و (37) نتیجه میشود

$$d' = 1, \tag{70}$$

$$a' = \det M. \tag{71}$$

از (66) و (67) هم نتیجه میشود

$$\det M' = \det M, \tag{72}$$

$$b' = b, \tag{73}$$

و از ترکیب ِ چهاررابطه یِ اخیر معلوم میشود

$$c' = 0. \tag{74}$$

پس،

$$M' = \begin{bmatrix} \det M & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{75}$$

رابطه‌ها یِ (27) تا (29) هم میشوند

$$-\frac{\det M}{z'_{\mathrm{i}}} + \frac{1}{z'_{\mathrm{o}}} = -b, \tag{76}$$

$$\frac{x_{\mathrm{o}}}{x_{\mathrm{i}}} = (\det M)\,\frac{z'_{\mathrm{o}}}{z'_{\mathrm{i}}}, \tag{77}$$

$$\frac{\mathrm{d}z'_{\mathrm{o}}}{\mathrm{d}z'_{\mathrm{i}}} = (\det M)\left(\frac{z'_{\mathrm{o}}}{z'_{\mathrm{i}}}\right)^2. \tag{78}$$

طولها یِ کانُنیک ِ صفحه‌ها یِ کانونی میشود

$$z'_{\mathrm{f,o}} = -\frac{1}{b}, \tag{79}$$

$$z'_{\mathrm{f,i}} = \frac{\det M}{b}. \tag{80}$$

طولها یِ کانُنیک ِ صفحه‌ها یِ گره‌ای هم میشود

$$z'_{\mathrm{n,o}} = \frac{\det M - 1}{b}, \tag{81}$$

$$z'_{\mathrm{n,i}} = \frac{\det M - 1}{b}. \tag{82}$$

چون $z'_{\mathrm{n,o}}$ و $z'_{\mathrm{n,i}}$ با هم برابر اند، هردُ را با z'_{n} نشان میدهیم.

7 دستگاهها یِ خاص

تغییر ِ محیط در یک دستگاه ِ اپتیکی، با n_1 و n_2 (ضریبِشکست ِ محیط ِ به ترتیب ورودی و خروجی) و شکل ِ سطح ِ جداکننده مشخص میشود. در اپتیک ِ گاؤسی، این سطح به خاطر ِ تقارن ِ سمتی بر محور ِ اپتیکی عمود است. به این ترتیب معادله یِ سطح ِ جداکننده در نزدیکی یِ محور ِ اپتیکی میشود

$$z = \frac{x^2}{2\,R}, \tag{83}$$

که مبدئ را رو یِ سطح ِ جداکننده گرفته ایم، و R شعاعِانحنا یِ جبری یِ سطح است. زاویه یِ بردار ِ عمود بر این سطح در نقطه ای به عرض ِ x را با ϕ نشان میدهیم. داریم

$$\phi = -\frac{x}{R}. \tag{84}$$

اگر باریکه ای با زاویه یِ θ_1 نسبت به محور ِ اپتیکی، از محیط ِ 1 به این سطح بخُرد، و با زاویه یِ θ_2 نسبت به محور ِ اپتیکی وارد ِ محیط ِ 2 شود،

$$n_2\,(\theta_2 - \phi) = n_1\,(\theta_1 - \phi), \tag{85}$$

که نتیجه میدهد

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\,\theta_1 - \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\,\phi. \tag{86}$$

در نقطه یِ برخُرد ِ باریکه با این سطح، زاویه عوض میشود ولی عرض عوض نمیشود. به این ترتیب از ترکیب ِ (84) و (86) نتیجه میشود اگر باریکه ای با بردار ِ v_1 از محیط ِ 1 به این سطح بخُرد، و با بردار ِ v_2 وارد ِ محیط ِ 2 شود،

$$v_2 = \left[S\left(\frac{n_1}{n_2}, R\right)\right]\,v_1, \tag{87}$$

که

$$S(n,R) := \begin{bmatrix} n & \dfrac{n-1}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{88}$$

به S ماتریس ِ شکست میگوییم. یک ماتریسِانتقال ِ کلی حاصلِضرب ی از ماتریسها یِ شکست و جابهجایی است.

7.1 آینه

ماتریسِ‌انتقال ِ متناظر با آینه $S(-1,R)$ است، که R شعاعِ‌انحنا یِ جبری یِ آینه است، مثبت برا یِ آینه یِ گوژ و منفی برا یِ آینه یِ کاو. $S(-1,R)$ به شکل ِ کانُنیک است، که نشان میدهد صفحه‌ها یِ اصلی رو یِ مبدئ (تقاطع ِ محور ِ اپتیکی با آینه، یا رئس ِ آینه) اند. با

$$\begin{aligned} M &= S(-1,R),\\ &= \begin{bmatrix} -1 & -\dfrac{1}{R}\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{89}$$

دیده میشود

$$z'_{\mathrm{f,o}} = \frac{R}{2}, \tag{90}$$

$$z'_{\mathrm{f,i}} = \frac{R}{2}, \tag{91}$$

$$z'_{\mathrm{n}} = R. \tag{92}$$

چون صفحه‌ها یِ اصلی رو یِ هم اند، از رابطه‌ها یِ بالا دیده میشود کانونها رو یِ هم و گره‌ها هم رو یِ هم اند. در واقع گره‌ها هم ان مرکز ِ انحنا یِ آینه اند، و کانونها وسط ِ مرکز ِ انحنا و رئس ِ آینه اند. همچنین،

$$\frac{1}{z'_{\mathrm{i}}} + \frac{1}{z'_{\mathrm{o}}} = \frac{1}{f}. \tag{93}$$

7.2 عدسی یِ نازک

عدسی یِ نازک ترکیب ِ دُ سطح ِ جداکننده یِ نزدیک به هم است، که ضریبِ‌شکست ِ ناحیه‌ها یِ بیرونی یکسان است. شعاعِ‌انحناها یِ جبری یِ جداکننده‌ها یِ چپ و راست را با به ترتیب R_1 و R_2، و نسبت ِ ضریبِ‌شکست در ناحیه یِ بین ِ دُجداکننده به ضریبِ‌شکست در ناحیه یِ بیرونی را با n نشان میدهیم. مبدئ را رئس ِ عدسی (تقاطع ِ مشترک ِ سطحها با محور ِ اپتیکی) میگیریم. ماتریسِ‌انتقال ِ چنین عدسی یی را با $U(n,R_1,R_2)$ نمایش میدهیم. داریم

$$U(n,R_1,R_2) = [S(n,R_2)]\,[S(n^{-1},R_1)], \tag{94}$$

که نتیجه میدهد

$$U(n, R_1, R_2) = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{95}$$

دیده میشود

$$z'_{\mathrm{f,o}} = f, \tag{96}$$

$$z'_{\mathrm{f,i}} = -f, \tag{97}$$

$$z'_{\mathrm{n}} = 0, \tag{98}$$

که

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{99}$$

گرەها رو یِ هم اند و رو یِ رئس ِ عدسی اند. کانونها دُطرف ِ رئس و به فاصله یِ یکسان از آن اند.

همچنین،

$$-\frac{1}{z'_{\mathrm{i}}} + \frac{1}{z'_{\mathrm{o}}} = \frac{1}{f}. \tag{100}$$

8 پانوشتها

[1] Max Born & Emil Wolf; “principles of optics” 7th edition (Cambridge University Press, 1999) section 4.4

[2] Eugene Hecht; “optics” 2nd edition (Addison Wesley, 1987) chapters 5 & 6