**X1-080 (2011/11/28)**

# کرنش، تنش، و مدولها

**محمد خرمی** mamwad@mailaps.org

پارامترها یِ مشخص-کننده یِ کشسانی یِ ماده بررسی میشوند، به ویژه در حالت ی که ماده همسانگرد و انحراف از تعادل کوچک است.

## 1 کرنش

ذره ای از یک توده که در حالت ِ تعادل در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ است، با تغییرِشکل ِ ماده به نقطه یِ $[\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r})]$ میرود. فاصله یِ دُ نقطه یِ نزدیک به هم در توده یِ تغییرِشکل-یافته را با $(\mathrm{d}s)$، و هم ین فاصله در توده یِ در تعادل را با $(\mathrm{d}s)_{\mathrm{eq}}$ نشان میدهیم. در کل ِ این متن، پایه‌ها یِ دِکَرتی به کار میرود. داریم

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 &= (\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\psi})\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}),\\
&= \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}+\mathrm{d}\boldsymbol{\psi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\psi},\\
&= (\mathrm{d}s)^2_{\mathrm{eq}}+(\partial_i\psi_j+\partial_j\psi_i+\delta^{k\,l}\,\partial_k\psi_i\,\partial_l\psi_j)\,\mathrm{d}r^i\,\mathrm{d}r^j,\\
&= (\mathrm{d}s)^2_{\mathrm{eq}}+2\,\Sigma_{i\,j}\,\mathrm{d}r^i\,\mathrm{d}r^j, \qquad (1)
\end{aligned}$$

که $\Sigma$ (تانسُر ِ کرنش) چنین تعریف میشود.

$$\Sigma_{i\,j} := \frac{1}{2}\,(\partial_i\psi_j + \partial_j\psi_i + \delta^{k\,l}\,\partial_k\psi_i\,\partial_l\psi_j), \tag{2}$$

یا تا مرتبه یِ یک نسبت به مشتق ِ جابه‌جایی (یعنی وقت ِ مشتق ِ $\boldsymbol{\psi}$ کوچک است)،

$$\Sigma_{i\,j} := \frac{1}{2}\,(\partial_i\psi_j + \partial_j\psi_i). \tag{3}$$

توده یِ $V$ از یک ماده را در نظر بگیرید. $\delta V$ (تغییر ِ حجم ِ توده) از این رابطه به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\delta V &= \oint_{\partial V} \mathrm{d}S_i\;\psi^i,\\ &= \int_V \mathrm{d}V\;\partial_i\,\psi^i,\\ &= V\,\frac{1}{D}\,\delta^{i\,j}\,\Sigma_{i\,j},\end{aligned} \tag{4}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{1}{D}\,\delta^{i\,j}\,\Sigma_{i\,j}. \tag{5}$$

همچنین $\delta\ell_i$ (تغییر ِ طول ِ پاره‌خط ی به طول ِ $\ell_i$ در راستا یِ $i$) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\delta\ell_i &= \psi(\boldsymbol{r} + \ell_i\,\hat{\boldsymbol{e}}_i) - \psi(\boldsymbol{r}),\\ &= \int_x^{x+\ell_i} \mathrm{d}r'^i\,\partial_i\,\psi_i,\\ &= \ell_i\,\Sigma_{i\,i},\end{aligned} \tag{6}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\delta\ell_i}{\ell_i} = \Sigma_{i\,i}. \tag{7}$$

در هردُ مُرد فرض شده توده کوچک یا کرنش همگن است، چنان که انتگرال برابر ِ انتگرالده ضرب در بازه یِ انتگرالگیری است.

## 2 تنش

توده یِ $V$ از یک ماده را در نظر بگیرید. نیرو یی که از طریق ِ تکه ای از مرز ِ این توده با بردارِمساحت ِ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ به این توده وارد میشود، با $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ متناسب است (نسبت به $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ خطی است). این یعنی یک تانسُر ِ $T$

هست که

$$\mathrm{d}F_i = -T_{i\,j}\,\mathrm{d}S^j, \tag{8}$$

که $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ بخش ی از نیرو است که از طریق ِ $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ وارد میشود. به $T$ تانسُر ِ تنش میگوییم. از $(8)$ دیده میشود،

$$F_i = -\oint_{\partial V} \mathrm{d}S^j\;T_{i\,j}. \tag{9}$$

با این رابطه میشود $\boldsymbol{f}$ (چگالی یِ حجمی یِ نیرو) را حساب کرد. داریم

$$F_i = -\int_V \mathrm{d}V\;\partial^j T_{i\,j}, \tag{10}$$

که نتیجه میدهد

$$f_i = -\partial^j T_{i\,j}. \tag{11}$$

## 3 گشتاور

از $(11)$ میشود $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ (گشتاور ِ وارد بر توده) را حساب کرد. تانسُر ِ لوی-چیویتا [2] را با $\varepsilon$ نشان میدهیم. داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_i &= \int_V \mathrm{d}V\;\varepsilon_{i\,j\,k}\,r^j\,f^k,\\ &= -\int_V \mathrm{d}V\;\partial_m(\varepsilon_{i\,j\,k}\,r^j\,T^{k\,m}) + \int_V \mathrm{d}V\;\varepsilon_{i\,j\,k}\,(\partial_m r^j)\,T^{k\,m},\\ &= -\oint_{\partial V} \mathrm{d}S_m\;\varepsilon_{i\,j\,k}\,r^j\,T^{k\,m} + \int_V \mathrm{d}V\;\varepsilon_{i\,j\,k}\,T^{k\,j}.\end{aligned} \tag{12}$$

دیده میشود گشتاور به شکل ِ یک انتگرال ِ رو یِ سطح است (درون ِ توده در آن نقش ندارد)، اگر انتگرال ِ دوم صفر باشد. این که انتگرال ِ دوم برا یِ هر ناحیه ای صفر باشد، با صفربودن ِ انتگرالده همارز است. پس درون ِ توده در گشتاور ِ وارد بر آن (در اثر ِ نیروها یِ سطحی) سهم ندارد، اگر

$$\varepsilon_{i\,j\,k}\,T^{k\,j} = 0. \tag{13}$$

به این ترتیب، درون ِ توده در گشتاور ِ وارد بر آن (در اثر ِ نیروها یِ سطحی) سهم ندارد، اگر تانسُر ِ تنش متقارن باشد:

$$T^{j\,i} = T^{i\,j}. \tag{14}$$

## 4 انرژی

توده ای را در نظر بگیرید که از طریق ِ نیروها یی خارجی در سطح َش کرنش مییابد. وقت ی نیروها یِ خارجی چنان اند که توده تقریبَن در تعادل است، انرژی یِ جنبشی یِ توده ضمن ِ کرنش ِ آن صفر میمانَد. در این حالت $U$ (انرژی یِ پتانسیل ِ توده) هم ان کار ِ نیروها یِ خارجی است:

$$\delta U = \oint_{\partial V} \mathrm{d}F^i_{\mathrm{ext}}\, \delta\psi_i, \tag{15}$$

که $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ نیرو یِ خارجی است. شرط ِ تعادل این است که

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} = \mathrm{d}\boldsymbol{F}, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{f} = 0, \tag{17}$$

یا

$$\mathrm{d}F^i_{\mathrm{ext}} = -T^{i\,j}\, \mathrm{d}S_j, \tag{18}$$

$$\partial_j\, T^{i\,j} = 0. \tag{19}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} \delta U &= -\oint_{\partial V} \mathrm{d}S_j\; T^{i\,j}\, \delta\psi_i, \\ &= -\int_V \mathrm{d}V\; T^{i\,j}\, \partial_j\, \delta\psi_i. \end{aligned} \tag{20}$$

دیده میشود اگر تنش متقارن باشد،

$$\delta U = -\int_V \mathrm{d}V\; T^{i\,j}\, \delta\Sigma_{j\,i}. \tag{21}$$

## 5 رابطه یِ هوک

در حالت ِ کلی، تنش در زمان ِ $t$ در نقطه یِ $\boldsymbol{r}$ تابع ِ کرنش در زمانها یِ نابزرگتر از $t$ و همه یِ مکانها ست. اما در خیل ی از موارد، اگر کرنش کوچک باشد این تابعیت نقطهای است (یعنی تنش در یک زمان و یک مکان به کرنش در فقط هم ان زمان و هم ان مکان بستهگی دارد) و خطی است. یعنی

یک تانسُر ِ $M$ هست که

$$T^{i\,j} = -M^{i\,j}{}_{k\,l}\,\Sigma^{k\,l}. \tag{22}$$

به این رابطه یِ هوک [3] میگویند. در این رابطه $M$ نسبت به شاخصها یِ سه‌وم و چهارم َش متقارن است. دیده میشود اگر

$$M_{k\,l}{}^{i\,j} = M^{i\,j}{}_{k\,l}, \tag{23}$$

آنگاه

$$T^{i\,j}\,\delta\Sigma_{j\,i} = \frac{1}{2}\,\delta(T^{i\,j}\,\Sigma_{j\,i}). \tag{24}$$

در این صورت،

$$U = -\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}V\;T^{i\,j}\,\Sigma_{j\,i}. \tag{25}$$

متناظر با تانسُر ِ $N$ تعریف میکنیم

$$N_{(0)}^{i\,j} := \frac{1}{D}\,\delta^{i\,j}\,\delta_{k\,l}\,N^{k\,l}, \tag{26}$$

$$N_{(1)}^{i\,j} := \frac{1}{2}\,(N^{i\,j} - N^{j\,i}), \tag{27}$$

$$N_{(2)}^{i\,j} := \frac{1}{2}\,(N^{i\,j} + N^{j\,i}) - \frac{1}{D}\,\delta^{i\,j}\,\delta_{k\,l}\,N^{k\,l}. \tag{28}$$

$N_{(0)}$ و $N_{(1)}$ و $N_{(2)}$ بخشها یِ به ترتیب متناسب با متریک، پادمتقارن، و متقارن ِ بی‌رَد ِ $N$ اند، و $D$ بُعد ِ فضا است. دیده میشود

$$N = N_{(0)} + N_{(1)} + N_{(2)}. \tag{29}$$

البته در $D = 4$، بخش ِ پادمتقارن را میشود به دُ بخش ِ دیگر تجزیه کرد. از این پس فرض میکنیم $D$ مخالف ِ $4$ است. با اعمال ِ تجزیه یِ مشابه ی برا یِ $M$، نتیجه میشود

$$M = M_{(0,0)} + M_{(0,2)} + M_{(1,0)} + M_{(1,2)} + M_{(2,0)} + M_{(2,2)}, \tag{30}$$

که در آن شاخصها یِ اول و دوم ِ درون ِ پرانتز متناظر با زُج-شاخصها یِ اول و دوم ِ $M$ اند، و چون $M$ نسبت به زُج-شاخص ِ دوم متقارن است،

$$M_{(a,1)} = 0. \tag{31}$$

به این ترتیب،

$$T_{(a)} = -M_{(a,0)}\,\Sigma_{(0)} - M_{(a,2)}\,\Sigma_{(2)}. \tag{32}$$

## 6 همسانگردی

وقت ی ماده همسانگرد باشد، با چرخاندن ِ تانسُر ِ کرنش تانسُر ِ تنش هم به هم ان اندازه میچرخد. این یعنی اگر $R$ یک دَوران باشد،

$$M^{i\,j}{}_{k\,l}\, R^k{}_m\, R^l{}_n = R^i{}_p\, R^j{}_q\, M^{p\,q}{}_{m\,n}, \tag{33}$$

یا به شکل ِ بسته

$$M\,(R\otimes R) = (R\otimes R)\,M. \tag{34}$$

تجزیه یِ تانسُر ِ $N$ به شکل ِ (29)، در واقع تجزیه یِ $N$ به نمایشها یِ کاهش-ناپذیر ِ دَوران است: $N$ در حاصلِضرب ِ تانسُری یِ دُ فضا یِ نمایش ِ برداری یِ دَوران است. حاصلِضرب ِ تانسُری یِ دُ نمایش ِ برداری به نمایشها یِ اسکالر، تانسر ِ پادمتقارن، و تانسر ِ متقارن ِ بیرَد تجزیه شده. با تجزیه یِ $(R\otimes R)$ به هم ین نمایشها، از (34) نتیجه میشود

$$M_{(a\,b)}\,(R\otimes R)_{(b)} = (R\otimes R)_{(a)}\,M_{(a,b)}. \tag{35}$$

از اینجا بر اساس ِ لمها یِ شور [4] (مثلَن [5]) نتیجه میشود

$$M_{(a,b)} = \mu_{(a)}\,\delta_{a\,b}\,\mathbf{1}, \tag{36}$$

که $\mathbf{1}$ همانی و $\mu_{(a)}$ عدد است. به این ترتیب از (36) نتیجه میشود

$$T_{(0)} = -\mu_{(0)}\,\Sigma_{(0)}, \tag{37}$$

$$T_{(1)} = 0, \tag{38}$$

$$T_{(2)} = -\mu_{(2)}\,\Sigma_{(2)}. \tag{39}$$

رابطه یِ (38) یعنی تنش متقارن است. از (37) و (39) هم دیده میشود رابطه یِ تنش با کرنش از طریق ِ فقط دُ پارامتر ِ اسکالر است. در این حالت،

$$T_{i\,j} = -\mu_{(2)}\,\Sigma_{i\,j} - \frac{1}{D}\,[\mu_{(0)} - \mu_{(2)}]\,\delta_{i\,j}\,\delta^{k\,l}\,\Sigma_{k\,l}, \tag{40}$$

یا

$$\Sigma_{i\,j} = -\frac{1}{\mu_{(2)}}\,T_{i\,j} - \frac{1}{D}\,\left[\frac{1}{\mu_{(0)}} - \frac{1}{\mu_{(2)}}\right]\,\delta_{i\,j}\,\delta^{k\,l}\,T_{k\,l}. \tag{41}$$

رُشن است که وقت ی رابطه یِ هوک [3] درست است و محیط همسانگرد است، رابطه یِ (23) درست است. در این حالت رابطه یِ (25) برا یِ انرژی یِ پتانسیل میشود

$$U = \frac{1}{2\,D}\int_V \mathrm{d}V\;\mu_{(0)}\,(\delta^{i\,j}\,\Sigma_{i\,j})^2 + \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}V\;\mu_{(2)}\,\delta_{i\,l}\,\delta_{j\,k}\,\Sigma^{i\,j}_{(2)}\,\Sigma^{k\,l}_{(2)}. \tag{42}$$

شرط ِ این که تعادل ِ توده پایدار باشد این است که

$$\mu_{(0)} > 0, \tag{43}$$

$$\mu_{(2)} > 0. \tag{44}$$

## 7 مدولها

در کل ِ این بخش، فرض بر این است که ماده همسانگرد است و رابطه یِ هوک برا یِ آن درست است.

توده ای را در نظر بگیرید که تحت ِ یک تنش ِ همسانگرد است، یعنی

$$T_{i\,j} = P\,\delta_{i\,j}. \tag{45}$$

$P$ فشار ِ وارد بر توده (یا انحراف ِ فشار ِ وارد بر توده نسبت به یک حالت ِ تعادل) است. از (41) دیده میشود

$$\Sigma_{i\,j} = -\frac{P}{\mu_{(0)}}\,\delta_{i\,j}. \tag{46}$$

به این ترتیب، از (5) نتیجه میشود

$$\frac{\delta V}{V} = -\frac{P}{\mu_{(0)}}. \tag{47}$$

$B$ (مدول ِ کپه‌ای) و $\kappa$ (تراکم-پذیری) چنین تعریف میشوند.

$$\frac{\delta V}{V} =: -\frac{P}{B}, \tag{48}$$

$$\frac{\delta V}{V} =: -\kappa\,P. \tag{49}$$

پس،

$$B = \mu_{(0)}, \tag{50}$$

$$\kappa = \frac{1}{\mu_{(0)}}. \tag{51}$$

توده ای را در نظر بگیرید که تحت ِ یک تنش است که فقط یک مئلفه یِ ناصفر دارد:

$$T_{i\,j} = \Pi\,\delta_i^1\,\delta_j^1. \tag{52}$$

تنش ی به این شکل یعنی توده را در یک راستا میفشاریم (یا میکشیم). همه یِ اجزا یِ نیرو یِ خارجی در راستا یِ محور ِ 1 اند، و $\Pi$ نیرو بر تصویر ِ مساحت عمود بر محور ِ 1 است. از (41) نتیجه میشود

$$\Sigma_{i\,j} = -\frac{\Pi}{\mu_{(2)}}\,\delta_i^1\,\delta_j^1 - \frac{\Pi}{D}\,\left(\frac{1}{\mu_{(0)}} - \frac{1}{\mu_{(2)}}\right)\,\delta_{i\,j}. \tag{53}$$

به این ترتیب، از (7) نتیجه میشود

$$\frac{\delta\ell_{\|}}{\ell_{\|}} = -\frac{\Pi}{D\,\mu_{(0)}} - \frac{(D-1)\,\Pi}{D\,\mu_{(2)}}, \tag{54}$$

$$\frac{\delta\ell_{\perp}}{\ell_{\perp}} = -\frac{\Pi}{D}\left[\frac{1}{\mu_{(0)}} - \frac{1}{\mu_{(2)}}\right], \tag{55}$$

که $\|$ و $\perp$ یعنی به ترتیب موازی با و عمود بر راستا یِ نیرو یِ خارجی. در حالت ِ بالا موازی 1 و عمود راستاها یِ عمود بر 1 است. $Y$ (مدول ِ یانگ [6]) و $\nu$ (نسبت ِ پُوَسُن [7]) چنین تعریف میشوند.

$$\frac{\delta\ell_{\|}}{\ell_{\|}} =: -\frac{\Pi}{Y}, \tag{56}$$

$$\frac{\delta\ell_{\perp}}{\ell_{\perp}}\,\frac{\ell_{\|}}{\delta\ell_{\|}} =: -\nu. \tag{57}$$

پس،

$$Y = D\,\left[\frac{D-1}{\mu_{(2)}} + \frac{1}{\mu_{(0)}}\right]^{-1}, \tag{58}$$

$$\nu = \left[\frac{D-1}{\mu_{(2)}} + \frac{1}{\mu_{(0)}}\right]^{-1}\,\left[\frac{1}{\mu_{(2)}} - \frac{1}{\mu_{(0)}}\right]. \tag{59}$$

از جمله معلوم میشود

$$\begin{aligned}\mu_{(2)} &= (D-1)\,\left(\frac{D}{Y} - \frac{1}{B}\right)^{-1},\\ &= B\,\frac{1-(D-1)\,\nu}{1+\nu}.\end{aligned} \tag{60}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{D-1}\,\left(1 - \frac{Y}{B}\right),\\ Y &= [1-(D-1)\,\nu]\,B.\end{aligned} \tag{61}$$

به این ترتیب، از شرطها ی ِ پایداری ی ِ (43) و (44) نتیجه میشود

$$0 < \frac{Y}{B} < D, \tag{62}$$

$$-1 < \nu < \frac{1}{D-1}. \tag{63}$$

مدول ِ کپه‌ای نسبت ِ منفی ی ِ تغییر ِ فشار به تغییر ِ نسبی ی ِ حجم است، وقت ی تنش همسانگرد باشد. تراکم-پذیری عکس ِ مدول ِ کپه‌ای است. مدول ِ یانگ [6] نسبت ِ نیرو ی ِ کشش بر مساحت، به تغییر ِ نسبی ی ِ طول در راستا ی ِ نیرو است، وقت ی نیرو در فقط یک راستا اعمال شود. نسبت ِ پُوَسُن [7] منفی ی ِ تغییر ِ نسبی ی ِ طول در راستا ی ِ عمود بر نیرو، به تغییر ِ نسبی ی ِ طول در راستا ی ِ نیرو است، وقت ی نیرو در فقط یک راستا اعمال شود.

اختلاف ِ شاره با جامد در آن است که در یک شاره ی ِ ساکن، تنش همسانگرد است. این یعنی در شاره ی ِ ساکن

$$\mu_{(2)} = 0, \tag{64}$$

یا در شاره ی ِ ساکن مدول ِ یانگ [6] صفر است:

$$Y = 0. \tag{65}$$

## 8 پانوشتها

[1] L. D. Landau & E. M. Lifshitz; “Theory of elasticity” 3rd edition (Pergamon Press, 1986) chapter 1

[2] Levi-Civita

[3] Hooke

[4] Schur

[5] H. F. Jones; “Groups, representations and physics” 2nd edition (IoP Publishing, 2002) section 4.1

[6] Young

[7] Poisson