X1-081 (2012/01/19)

میدانها یِ الکتریکی-عرضی و مغناطیسی-عرضی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

با یک تابع ِ به-حدِ-کافی-هموار میشود فضا را به زیرمجموعه‌ها یی (رویه‌ها یِ تراز ِ آن تابع) افراز کرد که بُعد ِشان یک ی از بُعد ِ فضا کمتر است. میدانها یِ برداری یِ مماس بر (عمود بر) این رویه‌ها را عرضی (طولی) مینامند. میدانها یِ الکترُمغناطیسی بر حسب ِ میدانها یِ الکتریکی-عرضی و مغناطیسی-عرضی، و هر یک از این دُدسته بر حسب ِ مئلفه‌ها یِ طولی یِ ناصفر نوشته میشوند.

1 هندسه یِ رویه‌ها یِ تراز

تابع ِ f از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. بردار ِ یکه یِ عمود بر رویه‌ها یِ تراز ِ این تابع را با $\hat{\boldsymbol{n}}$ نمایش میدهیم. داریم

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{\nabla} f}{|\boldsymbol{\nabla} f|}. \tag{1}$$

بخشها یِ طولی و عرضی یِ میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{F}$ را با به ترتیب $\boldsymbol{F}_\mathrm{l}$ و $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ نشان میدهیم، که

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{l} := \hat{\boldsymbol{n}}\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{F}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} := \boldsymbol{F} - \hat{\boldsymbol{n}}\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{F}). \tag{3}$$

برا یِ عملگر ِ مشتق هم تجزیه یِ مشابه ی تعریف میکنیم:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{l}} := \hat{\boldsymbol{n}}\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}} := \boldsymbol{\nabla} - \hat{\boldsymbol{n}}\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}). \tag{5}$$

همچنین F_{l} را چنین تعریف میکنیم.

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{l}} =: \hat{\boldsymbol{n}}\,F_{\mathrm{l}}, \tag{6}$$

و مشابه با آن

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{l}} =: \hat{\boldsymbol{n}}\,\nabla_{\mathrm{l}}. \tag{7}$$

تعریف میکنیم

$$\ell := \frac{1}{|\boldsymbol{\nabla} f|}. \tag{8}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\ell}\,\nabla_{\mathrm{l}}\ell + \ell\,\nabla^2 f, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{\ell}\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla_{\mathrm{t}}\ell. \tag{10}$$

همچنین، متناظر با میدان ِ اسکالر ِ ϕ تعریف میکنیم

$$\triangle_{\mathrm{t}}\phi := \frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}\,\cdot(\ell\,\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}\phi). \tag{11}$$

طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا، در واقع فقط به رویه‌ها یِ تراز بسته‌گی دارد و با تغییر ِ f (به شرط ی که رویه‌ها یِ تراز تغییر نکنند) عوض نمیشود. برا یِ دیدن ِ این توجه میکنیم که اگر

$$\tilde{f} := g\circ f, \tag{12}$$

آنگاه

$$\tilde{\ell} = \frac{\ell}{g'\circ f}, \tag{13}$$

که g' مشتق ِ g است. اما مقدار ِ $(g'\circ f)$ رو یِ هر یک از رویه‌ها یِ تراز ثابت است. پس

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}(g'\circ f) = 0, \tag{14}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{1}{\tilde{\ell}}\,\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\;\cdot(\tilde{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi).=\frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\;\cdot(\ell\,\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi). \tag{15}$$

به $\triangle_{\rm t}$ لَپلَسی یِ عرضی میگوییم. البته برا یِ تعریف ِ کامل ِ لَپلَسی یِ عرضی لازم است دامنه یِ آن (مجموعه یِ توابع ی که لَپلَسی یِ عرضی بر آنها اثر میکند) هم معین باشد. این دامنه متناظر با شرایط ِ مرزی یِ مسئله ای که لَپلَسی یِ عرضی در آن به کا رمیرود تعریف میشود. داریم

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}}{\rm d}S\;\ell\,(\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi)&=\int_{\mathbb{S}}{\rm d}S\;\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\cdot[\ell\,\phi\,(\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi)]-\int_{\mathbb{S}}{\rm d}S\;\ell\,\phi\,\triangle_{\rm t}\phi,\\&=\int_{\partial\mathbb{S}}{\rm d}l\;\hat{\boldsymbol{q}}\cdot[\ell\,\phi\,(\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi)]-\int_{\mathbb{S}}{\rm d}S\;\ell\,\phi\,\triangle_{\rm t}\phi,\end{aligned} \tag{16}$$

که $\mathbb{S}$ یک رویه یِ تراز ِ f، و $\hat{\boldsymbol{q}}$ بردار ِ یکه یِ مماس بر $\mathbb{S}$ و عمود بر $\partial\mathbb{S}$ به سو ی بیرون است. در اینجا و از این پس فرض شده $\mathbb{S}$ فشرده است.

اگر $\mathbb{S}$ مرز نداشته باشد، یا در هر تکه از مرز ϕ یا مشتق ِ عمودی یَش صفر شوند، آنگه از رابطه یِ بالا دیده میشود وقت ی $(\triangle_{\rm t}\phi)$ صفر است،

$$\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi=0. \tag{17}$$

دامنه یِ $\triangle_{\rm t}$ را مجموعه یِ توابع ِ هموار با یک شرط ِ مرزی یِ همگن ِ مناسب، تقسیم بر این رابطه یِ همارزی میگیریم که دُ تابع همارز اند اگر اختلاف ِشان ثابت باشد. اینجا شرط ِ مرزی یِ مناسب یعنی در هر تکه از مرز ِ $\mathbb{S}$ خُد ِ تابع یا مشتق ِ سویی یَش با $\hat{\boldsymbol{q}}$ صفر شود. این که کجا تابع و کجا مشتق ِ سویی یَش با $\hat{\boldsymbol{q}}$ صفر شود را مسئله ای تعیین میکند که لَپلَسی یِ عرضی قرار است در آن به کار رود.

با این تعریفها، از (16) دیده میشود اگر $(\triangle_{\rm t}\phi)$ صفر باشد، آنگاه ϕ همارز ِ صفر است. این یعنی هسته یِ $\triangle_{\rm t}$ بدیهی است.

1.1 دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری

دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t} &= \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_\mathrm{l}\boldsymbol{F}_\mathrm{t},\\ &= \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t} - \boldsymbol{F}_\mathrm{t}\cdot\nabla_\mathrm{l}\hat{\boldsymbol{n}},\\ &= \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}\cdot\left[\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{n}}) - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\right],\\ &= \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}\cdot\{\hat{\boldsymbol{n}}\times[(\boldsymbol{\nabla}\ell)\times(\boldsymbol{\nabla}f)]\},\\ &= \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{F}_\mathrm{t}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ell,\\ &= \frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot(\ell\,\boldsymbol{F}_\mathrm{t}).\end{aligned}\tag{18}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}_\mathrm{l} &= \nabla_\mathrm{l}F_\mathrm{l} + F_\mathrm{l}\,\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{n}},\\ &= \frac{1}{\ell}\,\nabla_\mathrm{l}(\ell\,F_\mathrm{l}) + \ell\,F_\mathrm{l}\,\nabla^2 f.\end{aligned}\tag{19}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = \frac{1}{\ell}\,\nabla_\mathrm{l}(\ell\,F_\mathrm{l}) + \ell\,F_\mathrm{l}\,\nabla^2 f + \frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\cdot(\ell\,\boldsymbol{F}_\mathrm{t}).\tag{20}$$

1.2 کرل ِ یک میدان ِ برداری

داریم

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\times\boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla_\mathrm{l}\boldsymbol{F}_\mathrm{t}.\tag{21}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}_\mathrm{l} &= (\boldsymbol{\nabla}F_\mathrm{l})\times\hat{\boldsymbol{n}} + F_\mathrm{l}\,\boldsymbol{\nabla}\times\hat{\boldsymbol{n}},\\ &= -\frac{1}{\ell}\,\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}(\ell\,F_\mathrm{l}).\end{aligned}\tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}\times\boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\nabla_\mathrm{l}\boldsymbol{F}_\mathrm{t} - \frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_\mathrm{t}(\ell\,F_\mathrm{l})\right].\tag{23}$$

2 میدانِ الکترُمغناطیسی

معادلاتِ مَکسوِل [1] برا یِ میدانها یِ الکترُمغناطیسی برا یِ میدانها یی هماهنگ با بسامدِ زاویه‌ای یِ $(c\,k)$، در نبودِ چشمه عبارت اند از

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\,c\,k\,\boldsymbol{B}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=-\frac{\mathrm{i}\,k}{c}\,\boldsymbol{E}, \tag{27}$$

که c سرعتِ انتشارِ مُج، $\boldsymbol{E}$ میدانِ الکتریکی، و $\boldsymbol{B}$ میدانِ مغناطیسی است. از جمله نتیجه میشود

$$\frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}\cdot(\ell\,\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}})=-\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\mathrm{l}}(\ell\,B_{\mathrm{l}})+\ell\,B_{\mathrm{l}}\,\nabla^2 f\right], \tag{28}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{t}})=-\frac{\mathrm{i}\,k}{c}\,E_{\mathrm{l}}, \tag{29}$$

$$\frac{1}{\ell}\,\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}\cdot(\ell\,\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}})=-\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\mathrm{l}}(\ell\,E_{\mathrm{l}})+\ell\,E_{\mathrm{l}}\,\nabla^2 f\right], \tag{30}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}})=\mathrm{i}\,c\,k\,B_{\mathrm{l}}. \tag{31}$$

دیده میشود با معلوم بودنِ مئلفه‌ها یِ طولی یِ میدانها (و البته شرایطِ مرزی)، مئلفه‌ها یِ عرضی میدانها تعیین میشوند.

3 میدانها یِ عرضی

یک میدانِ الکترُمغناطیسی را الکتریکی-عرضی مینامند اگر

$$E_{\mathrm{l}}=0. \tag{32}$$

به هم ین ترتیب، میدان را مغناطیسی-عرضی مینامند اگر

$$B_{\mathrm{l}}=0. \tag{33}$$

میدان را الکتریکی-مغناطیسی-عرضی مینامند، اگر (32) و (33) هردُ برقرار باشند.

یک میدان ِ مغناطیسی-عرضی را در نظر بگیرید. از (31) نتیجه میشود یک پتانسیل ِ $\phi_{\rm e}$ هست که

$$\boldsymbol{E}_{\rm t} = -\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\phi_{\rm e}. \tag{34}$$

این را در (30) میگذاریم. نتیجه میشود

$$\triangle_{\rm t}\phi_{\rm e} = -\sigma_{\rm e}, \tag{35}$$

که

$$\sigma_{\rm e} := -\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,E_{\rm l}) + \ell\,E_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]. \tag{36}$$

اگر این میدان الکتریکی-مغناطیسی-عرضی باشد، طرف ِ راست ِ (35) صفر است. در این صورت نتیجه میشود

$$\triangle_{\rm t}\phi_{\rm e} = 0. \tag{37}$$

پس بخش ِ عرضی یِ میدان ِ الکتریکی، و در نتیجه کل ِ میدان ِ الکتریکی، صفر است. به این ترتیب از (25) نتیجه میشود میدان ِ مغناطیسی هم صفر است. نتیجه این که میدان ِ الکتریکی-مغناطیسی-عرضی نداریم. البته این وقت ی درست است که رویه‌ها یِ تراز بدون‌ِمرز باشند، یا اگر مرز دارند، میدانها در مرز شرایط ِ مرزی یِ مناسب را بر آورند. یک مثال که رویه‌ها یِ تراز بدون‌ِمرز اند، وقت ی است که این رویه‌ها کره اند. نتیجه میشود میدانها یِ الکترُمغناطیسی یی نداریم که برا یِشان در یک ناحیه مثلفه یِ شعاعی یِ هم میدان ِ الکتریکی و هم میدان ِ مغناطیسی صفر شود (فصل ِ 9 از [2]). یک مثال که رویه‌ها یِ تراز مرز دارند اما شرایط ِ مرزی مناسب است، مُجبر ِ استوانه‌ای با دیواره یِ یکپارچه یِ رسانایِ‌کامل است. نتیجه میشود میدانها یِ الکترُمغناطیسی یی نداریم که برا یِشان در یک ناحیه مثلفه یِ موازی‌بامحورِاستوانه یِ هم میدان ِ الکتریکی و هم میدان ِ مغناطیسی صفر شود (فصل ِ 8 از [2]). یک مثال که رویه‌ها یِ تراز مرز دارند اما شرایط ِ مرزی چنان نیست که لَپلَسی یِ عرضی وارونپذیر باشد، مُجبر ِ استوانه‌ای با دیواره یِ چندپارچه یِ رسانایِ‌کامل است. اینجا میدانها یِ الکتریکی-مغناطیسی-عرضی داریم، یعنی میدانها یی داریم که برا یِشان مثلفه یِ موازی‌بامحورِاستوانه یِ هم میدان ِ الکتریکی و هم میدان ِ مغناطیسی صفر شود (فصل ِ 8 از [2]).

اگر میدان مغناطیسی-عرضی باشد (ولی بخش ِ طولی یِ میدان ِ الکتریکی صفر نباشد)، از (35)

نتیجه میشود

$$\phi_{\rm e} = -\triangle_{\rm t}^{-1}\,\sigma_{\rm e}. \tag{38}$$

$\triangle_{\rm t}$ وارونپذیر است، چون هسته اَش بدیهی است. از اینجا میدانها یِ مغناطیسی-عرضی ($\boldsymbol{E}_{\rm e}$ و $\boldsymbol{B}_{\rm e}$) میشوند

$$\boldsymbol{E}_{\rm e} = \hat{\boldsymbol{n}}\,E_{\rm l} - \boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,E_{\rm l}) + \ell\,E_{\rm l}\,\nabla^2 f\right], \tag{39}$$

$$\boldsymbol{B}_{\rm e} = \frac{1}{{\rm i}\,c\,k}\,\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\,E_{\rm l} + \hat{\boldsymbol{n}}\,\nabla_{\rm l}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,E_{\rm l}) + \ell\,E_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\right\}. \tag{40}$$

به هم ین ترتیب، میدانها یِ الکتریکی-عرضی ($\boldsymbol{E}_{\rm m}$ و $\boldsymbol{B}_{\rm m}$) میشوند

$$\boldsymbol{E}_{\rm m} = \frac{{\rm i}\,c}{k}\,\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\,B_{\rm l} + \hat{\boldsymbol{n}}\,\nabla_{\rm l}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,B_{\rm l}) + \ell\,B_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\right\}, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{B}_{\rm m} = \hat{\boldsymbol{n}}\,B_{\rm l} - \boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,B_{\rm l}) + \ell\,B_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]. \tag{42}$$

4 میدانها یِ کلی

یک میدان ِ الکترُمغناطیسی برهمنهش ِ میدانها یِ مغناطیسی-عرضی و الکتریکی-عرضی است. پس،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = {}& \hat{\boldsymbol{n}}\,E_{\rm l} - \boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,E_{\rm l}) + \ell\,E_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\\ &+ \frac{{\rm i}\,c}{k}\,\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\,B_{\rm l} + \hat{\boldsymbol{n}}\,\nabla_{\rm l}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,B_{\rm l}) + \ell\,B_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\right\},\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = {}& \hat{\boldsymbol{n}}\,B_{\rm l} - \boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,B_{\rm l}) + \ell\,B_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\\ &+ \frac{1}{{\rm i}\,c\,k}\,\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\,E_{\rm l} + \hat{\boldsymbol{n}}\,\nabla_{\rm l}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,E_{\rm l}) + \ell\,E_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\right\}.\end{aligned} \tag{44}$$

دیده میشود میدان ِ الکترُمغناطیسی بر حسب ِ مئلفهها یِ طولی یِ میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی به دست میآید.

از (25) و (27) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = k^2\,\boldsymbol{E}. \tag{45}$$

در نتیجه با توجه به

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{F}, \tag{46}$$

و (26) ،

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}+k^2)\boldsymbol{E}=0. \qquad (47)$$

یعنی میدان ِ الکتریکی معادله یِ هِلمهُلتس [3] را بر می‌آورَد. با استدلال ی مشابه دیده میشود میدان ِ مغناطیسی هم معادله یِ هِلمهُلتس [3] را بر می‌آورَد. و چون میدانها یِ مغناطیسی-عرضی و الکتریکی-عرضی هم جوابها یِ معادلات ِ مَکسوِل [1] اند، میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی یِ متناظر با میدانها یِ مغناطیسی-عرضی و الکتریکی-عرضی هم معادله یِ هِلمهُلتس [3] را بر می‌آورند. به این ترتیب،

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla^2\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\,E_{\rm l}-\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,E_{\rm l})+\ell\,E_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\right\}+k^2\,E_{\rm l}=0, \qquad (48)$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla^2\left\{\hat{\boldsymbol{n}}\,B_{\rm l}-\boldsymbol{\nabla}_{\rm t}\triangle_{\rm t}^{-1}\left[\frac{1}{\ell}\,\nabla_{\rm l}(\ell\,B_{\rm l})+\ell\,B_{\rm l}\,\nabla^2 f\right]\right\}+k^2\,B_{\rm l}=0. \qquad (49)$$

معادلات ِ (48) و (49) مئلفه‌ها یِ طولی یِ میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی را تعیین میکنند. با داشتن ِ این مئلفه‌ها، از (43) و (44) کل ِ میدان ِ الکترُمغناطیسی به دست می‌آید.

5 پانوشتها

[1] Maxwell

[2] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[3] Helmholtz